Вершины, ребра и грани

Рассмотрим известные нам многогранники и заполним следующую таблицу, в которой В – число вершин, Р – число ребер, Г – число граней многогранника.

Название многогранника	В	Р	Г
Треугольная пирамида	4	6	4
Четырехугольная пирамида	5	8	5
Треугольная призма	6	9	5
Четырехугольная призма	8	12	6
n-угольная пирамида	$n+1$	$2n$	$n+1$
n-угольная призма	$2n$	$3n$	$n+2$

ТЕОРЕМА ЭЙЛЕРА

Из приведенной таблицы непосредственно видно, что для всех выбранных многогранников имеет место равенство В - Р + Г = 2. Оказывается, что это равенство справедливо не только для рассмотренных многогранников, но и для произвольного выпуклого многогранника.

Впервые это свойство выпуклых многогранников было доказано Леонардом Эйлером в 1752 году и получило название теоремы Эйлера.

Теорема Эйлера. Для любого выпуклого многогранника имеет место равенство

$$В - Р + Г = 2,$$

где В - число вершин, Р - число ребер и Г - число граней данного многогранника.

Л. ЭЙЛЕР

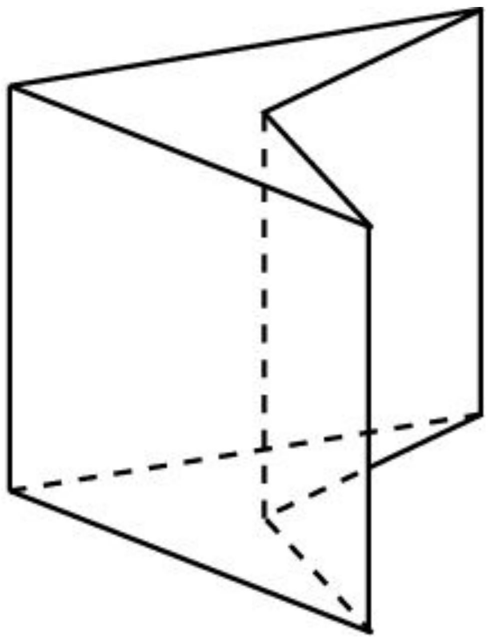
Леонард Эйлер (1707-1783) - один из величайших математиков мира, работы которого оказали решающее влияние на развитие многих современных разделов математики. Эйлер долгое время жил и работал в России, был действительным членом Петербургской Академии наук, оказал большое влияние на развитие отечественной математической школы и в деле подготовки кадров ученых-математиков и педагогов в России.

Поражает своими размерами научное наследие ученого. При жизни им опубликовано 530 книг и статей, а сейчас их известно уже более 800. Причем последние 12 лет своей жизни Эйлер тяжело болел, ослеп и, несмотря на тяжелый недуг, продолжал работать и творить.

Все математики последующих поколений так или иначе учились у Эйлера, и недаром известный французский ученый П.С. Лаплас сказал: "Читайте Эйлера, он - учитель всех нас".

Упражнение 1

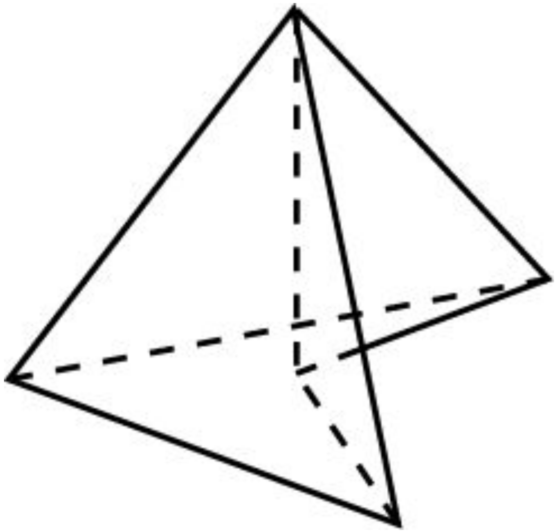
Выполняется ли соотношение Эйлера для невыпуклой призмы?



Ответ: Да.

Упражнение 2

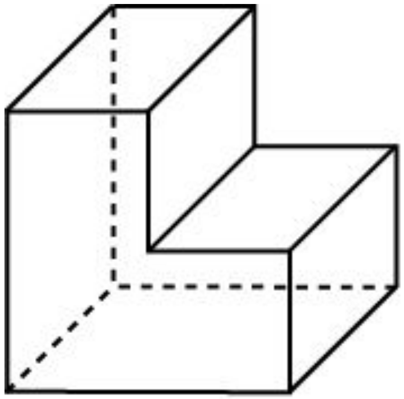
Выполняется ли соотношение Эйлера для невыпуклой пирамиды?



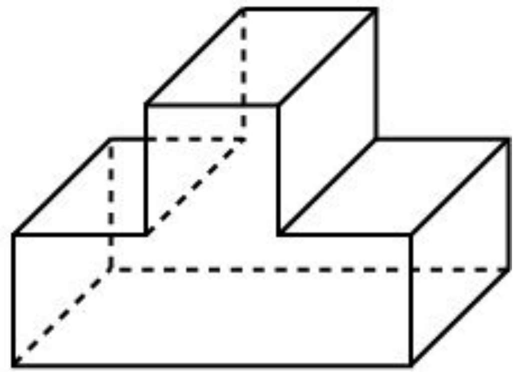
Ответ: Да.

Упражнение 3

Посчитайте число вершин (В), ребер (Р) и граней (Г) у многогранников, изображенных на рисунке. Выполняется ли для них равенство Эйлера?



а)



б)

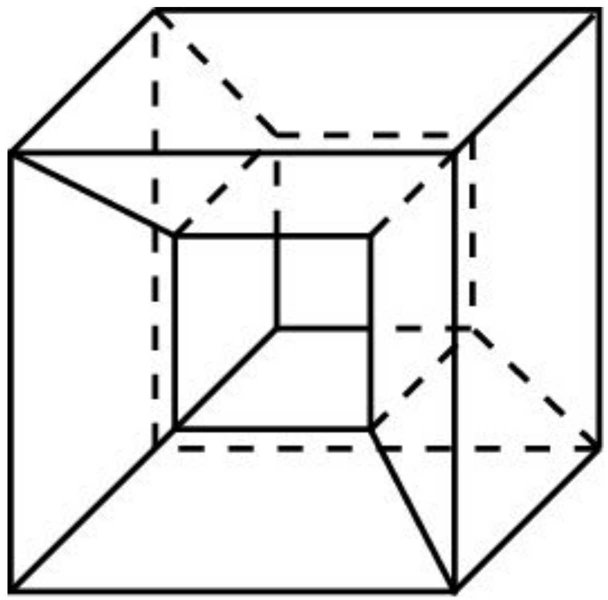
Ответ: а) В = 12, Р = 18, Г = 8, да;

б) В = 16, Р = 24, Г = 10, да.

Упражнение 4

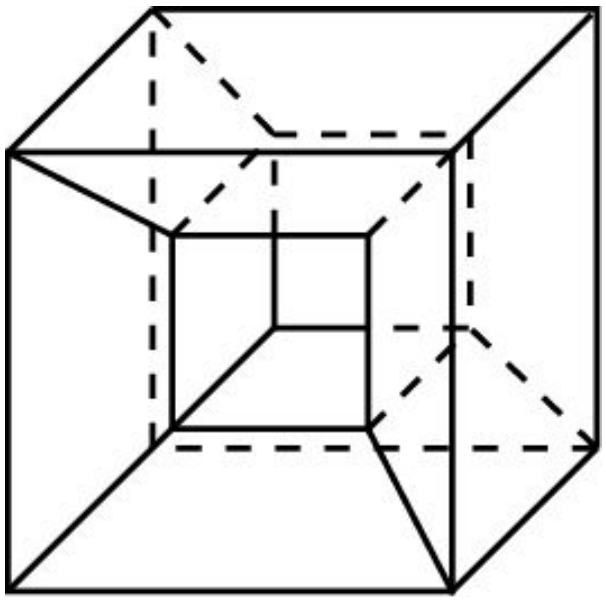
Приведите пример многогранника, для которого не выполняется соотношение Эйлера.

Ответ: Например, куб, из которого вырезан прямоугольный параллелепипед.



Упражнение 5

Чему равна эйлерова характеристика многогранника (В – Р + Г), где В – число вершин, Р – рёбер и Г – граней многогранника), представленного на рисунке?



Ответ: 0.

Упражнение 6

Гранями выпуклого многогранника являются только треугольники. Сколько у него вершин и граней, если он имеет: а) 12 ребер; б) 15 ребер?

Ответ: а) В = 6, Г = 8; б) В = 7, Г = 10.

Упражнение 7

Из каждой вершины выпуклого многогранника выходит три ребра. Сколько он имеет вершин и граней, если число ребер равно: а) 12; б) 15?

Ответ: а) В = 8, Г = 6; б) В = 10, Г = 7.

Упражнение 8

Гранями выпуклого многогранника являются только четырехугольники. Сколько у него вершин и граней, если число ребер равно 12? Приведите пример такого многогранника.

Ответ: В = 8, Г = 6, куб.

Упражнение 9

В каждой вершине выпуклого многогранника сходится по четыре ребра. Сколько он имеет вершин и граней, если число ребер равно 12? Приведите пример такого многогранника.

Ответ: В = 6, Г = 8, октаэдр.

Упражнение 10

Как изменится число вершин, рёбер и граней выпуклого многогранника, если к одной из его граней пристроить пирамиду? Изменится ли В – Р + Г?

Ответ: Пусть пристроена n-угольная пирамида, тогда количество вершин станет (В+1), рёбер - (Р+n), граней - (Г+n). В – Р + Г не изменится.

Упражнение 11

Как изменится число вершин, рёбер и граней выпуклого многогранника, если от него отсечь один из многогранных углов? Изменится ли В – Р + Г?

Ответ: Пусть отсекли m-гранный угол, тогда количество вершин будет (В+m-1), рёбер - (Р+m), граней - (Г+1). В – Р + Г не изменится.

Упражнение 12*

Докажите, что в любом выпуклом многограннике число треугольных граней плюс число трехгранных углов больше или равно восьми.

Доказательство. Обозначим через $В_i$ число вершин выпуклого многогранника, в которых сходится i ребер. Тогда для общего числа вершин В имеет место равенство $В = В_3 + В_4 + В_5 + \ldots$. Аналогично, обозначим через $Г_i$ число граней выпуклого многогранника, у которых имеется i ребер. Тогда для общего числа граней Г имеет место равенство $Г = Г_3 + Г_4 + Г_5 + \ldots$. Имеем: $3В_3 + 4В_4 + 5В_5 + \ldots = 2Р$, $3Г_3 + 4Г_4 + 5Г_5 + \ldots = 2Р$. По теореме Эйлера выполняется равенство $4В – 4Р + 4Г = 8$. Подставляя вместо В, Р и Г их выражения, получим $4В_3 + 4В_4 + 4В_5 + \ldots – (3В_3 + 4В_4 + 5В_5 + \ldots) – (3Г_3 + 4Г_4 + 5Г_5 + \ldots) + 4Г_3 + 4Г_4 + 4Г_5 + \ldots = 8$.

Следовательно, $В_3 + Г_3 = 8 + В_5 + \ldots + Г_5 + \ldots$, значит, число треугольных граней плюс число трехгранных углов больше или равно восьми.

Упражнение 13*

Докажите, что в любом выпуклом многограннике имеется грань с числом сторон, меньшим шести.

Доказательство. Обозначим через $В_i$ число вершин выпуклого многогранника, в которых сходится i ребер. Тогда для общего числа вершин В имеет место равенство $В = В_3 + В_4 + В_5 + \ldots$. Аналогично, обозначим через $Г_i$ число граней выпуклого многогранника, у которых имеется i ребер. Предположим, что у многогранника нет граней с числом сторон, меньшим шести. Тогда для общего числа граней Г имеет место равенство $Г = Г_6 + Г_7 + Г_8 + \ldots$. Имеем: $3В_3 + 4В_4 + 5В_5 + \ldots = 2Р$, $6Г_6 + 7Г_7 + 8Г_8 + \ldots = 2Р$. Из этих равенств следует выполнимость неравенств 3В 2Р и 6Г 2Р, из которых получаем: 3В – 3Р + 3Г 0, а по теореме Эйлера должно выполняться равенство 3В – 3Р + 3Г = 6. Полученное противоречие показывает, что неверным было наше предположение об отсутствии граней с числом сторон, меньшим шести. Значит, в выпуклом многограннике обязательно найдется грань с числом сторон, меньшим шести.

Упражнение 14*

Докажите, что в любом выпуклом многограннике имеется многогранный угол с числом ребер, меньшим шести.

Доказательство получается из предыдущего, если в нем буквы В и Г поменять местами.