Решение обыкновенных дифференциальных уравнений

Часть 2

Задача Коши

К.ф.-м.н. Завьялова Наталья Александровна

natalia.zavyalova@gmail.com

Решение разностных уравнений

Общее решение разностных уравнений

Опр: Линейным разностным уравнением *n*-го порядка с постоянными коэффициентами называется уравнение вида

$$\sum_{k=1}^{N+1} a_{n+k} y^{n+k} = b_n f^n, \qquad a_{n+k} \quad , b_n = \mathrm{const}$$

Если $b_n = 0$, то уравнение называется **однородным**

Решение разностного уравнения представимо в виде:

$$y^n = y^n_{\text{общ}} + y^n_{\text{ч}}$$

Общее решение однородного уравнения

Частное решение неоднородного уравнения

Общее решение состоит из линейной комбинации решений разностного уравнения:

$$y^n_{\text{общ}} = \sum_{i=1}^{N} C_j y^n_{\text{o}j}$$

Общее решение разностных уравнений

Будем искать общее решение <u>однородного</u> уравнения в виде

$$y^n_{\text{общ}} = \lambda^n$$

Уравнение вида:

$$a_n + a_{n+1}\lambda + a_{n+2}\lambda^2 + a_{n+3}\lambda^3 + \dots + a_{n+k}\lambda^k = 0$$

Называется **характеристическим** уравнением

$$y^n_{\text{общ}} = \sum_{i=1}^{N} C_j \lambda_j^n \qquad , n = 0 \dots N$$

Проверим найденное решение

$$\sum_{j=1}^{N} C_j \lambda_j^{n-k} \left(a_n + a_{n+1}\lambda_j + a_{n+2}{\lambda_j}^2 + a_{n+3}{\lambda_j}^3 + \dots + a_{n+k}{\lambda_j}^k\right) = 0 \qquad \text{Верно } \forall C_j$$

Если какой-нибудь корень λ_j имеет кратность s, то соответствующая частичная сумма

$$\textstyle\sum_{p=0}^{s-1} C_{j+p}\lambda_{j+p}^n$$

заменяется выражением

$$(C_j + nC_{j+1} + \dots + n^{s-1}C_{j+s-1})\lambda_j^n$$

Частное решение

К полученному общему решению однородной подсистемы нужно добавить частное решение неоднородной подсистемы. Его вид завивит от вектора f правой части. Пусть они равны:

$$f_n = \mu^n (P_\alpha(n)\cos(\nu n) + R_\beta(n)\sin(\nu n))$$

$P_\alpha(n), R_\beta(n)$ - многочлены степеней α и β соответственно

μ и ν – действительные числа

$$y_ч^n = \mu^n (Q_\delta(n)\cos(\nu n) + S_\delta(n)\sin(\nu n))$$

$Q_\delta(n), S_\delta(n)$ - многочлены степени $\delta = \max(\alpha, \beta)$

Для случая, когда μ – модуль, а ν – аргумент какого-то одного корня характеристического уравнения полагаем

$$y_ч^n = n^r\ (Q_\delta(n)\cos(\nu n) + S_\delta(n)\sin(\nu n))$$

r – кратность корня

Пример

Найти решение разностного уравнение

$$y^{n+1} - 3y^n + 3y^{n-1} - y^{n-2} = ah^4 n, \qquad a, h = \mathrm{const}$$

Найдем общее решение однородного уравнения.

Подставляем в уравнение $y^n_{\text{общ}} = \lambda^n$

Получаем характеристическое уравнение

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{123} = 1$$

- Корень кратности 3

$$y^n_{\text{общ}} = (C_1 + C_2 n + C_3 n^2)1^n$$

Найдем частное решение

$$f_n = \mu^n (P_\alpha(n)\cos(\nu n) + R_\beta(n)\sin(\nu n))$$

В правой части $\mu = 1$, $\nu = 0$ $\Rightarrow$ Совпадают с модулем и аргументом λ

Будем искать решение в виде

$$y^n_{\text{ч}} = (A + Bn)n^3$$

Подставляем в неоднородное уравнение

$$A(n+1)^4 + B(n+1)^3 - 3An^4 - 3Bn^3 + 3A(n-1)^4 + 3B(n-1)^3 - A(n-2)^4 - B(n-2)^3 = 12A(2n-1) + 6B = ah^4 n$$

$$A = ah^4/24 \qquad B = ah^4/12$$

$$y^n = y^n_{\text{общ}} + y^n_{\text{ч}} = (C_1 + C_2 n + C_3 n^2)1^n + ah^4 n^3 (n+2)/24$$

Условия порядка методов Рунге-Кутты

Методы Рунге-Кутты 4-го порядка

Общий вид методов 4-го порядка

$$u^{n+1} = u^n + \tau(b_1 k_1 + b_2 k_2 + b_3 k_3 + b_4 k_4)$$

$$k_i = f\big(t_n + c_i \tau, u^n + \underbrace{\tau(a_{i1} k_1 + a_{i2} k_2 + a_{i3} k_3 + a_{i4} k_4)}_{\Delta u}\big)$$

$$u^{n+1} = u^n + \tau u' + \frac{\tau^2}{2} u'' + \frac{\tau^3}{6} u''' + \frac{\tau^4}{24} u'''' + \cdots$$

$$k_i = f^n + c_i \tau f_t' + \Delta u f_u' + \frac{1}{2}(\tau^2 f_t'' + 2\tau \Delta u f_{tu}'' + \Delta u^2 f_u'') +$$

$$\frac{1}{6}(\tau^3 f_t''' + 3\tau^3 \Delta u f_{ttu}''' + 3\Delta u^3 \tau f_{ttu}''' + \Delta u^3 f_u'')$$

Определим условия 3-го порядка аппроксимации…

Разложение коэффициентов методов

$$k_i = f\big(t_n + c_i\tau, u^n + \underbrace{\tau(a_{i1}k_1 + a_{i2}k_2 + a_{i3}k_3 + a_{i4}k_4)}_{\Delta u_i}\big)$$

$$k_i = f^n + \boxed{c_i\tau f_t'} + \Delta u_i f_u' + \frac{1}{2}\left(\boxed{\tau^2 c_i^{\,2} f_t''} + 2\tau c_i \Delta u_i f_{tu}'' + \Delta u_i^{\,2} f_u''\right) +$$

$$\frac{1}{6}\left(\boxed{\tau^3 f_t'''} + 3\tau^2 \Delta u_i f_{ttu}''' + 3\Delta u_i^{\,2}\tau f_{ttu}''' + \Delta u_i^{\,3} f_u'''\right)$$

$$\frac{1}{24}\left(\boxed{\tau^4 f_t^{IV}} + 4\tau^3 \Delta u_i f_{tttu}^{IV} + 6\Delta u_i^{\,2}\tau^2 f_{tu}^{IV} + 4\Delta u_i^{\,3}\tau f_{tuuu}^{IV} + \Delta u_i^{\,4} f_u^{IV}\right)$$

$$\Delta u_i = \tau(a_{i1}k_1 + a_{i2}k_2 + a_{i3}k_3 + a_{i4}k_4) = \tau\sum_{j=1}^{4} a_{ij}k_j =$$

$$= \tau\sum_{j=1}^{4} a_{ij}\left[\boxed{f^n} + \boxed{c_i\tau f_t'} + \Delta u_i f_u' + \frac{1}{2}\left(\boxed{\tau^2 f_t''} + 2\tau \Delta u_i f_{tu}'' + \Delta u_i^{\,2} f_u''\right) + \right.$$

$$\left.\frac{1}{6}\left(\boxed{\tau^3 f_t'''} + 3\tau^3 \Delta u_i f_{ttu}''' + 3\Delta u_i^{\,2}\tau f_{ttu}''' + \Delta u_i^{\,3} f_u'''\right)\right]$$

- 1-й порядок
- 2
- 3
- 4

Определение главных членов погрешности

$$\Delta u_i = \tau(a_{i1}k_1 + a_{i2}k_2 + a_{i3}k_3 + a_{i4}k_4) = \tau\sum_{j=1}^{4} a_{ij}k_j =$$

$$= \tau\sum_{j=1}^{4} a_{ij}\left[f^n + c_i\tau f'_t + \Delta u_{i2} f'_u + \frac{1}{2}\left(\tau^2 f''_t + 2\tau\Delta u_{i3} f''_{tu} + \Delta u_{i3}{}^2 f''_u\right) + \frac{1}{6}\left(\tau^3 f'''_t + 3\tau^3\Delta u_{i4} f'''_{ttu} + 3\Delta u_{i4}{}^2\tau f'''_{ttu} + \Delta u_{i4}{}^3 f''_u\right)\right] =$$

$$\Delta u_{i2} = \tau\sum_{j=1}^{4} a_{ij}\left[f^n + c_i\tau f'_t + \Delta u_3 f'_u + \frac{1}{2}\left(\tau^2 f''_t + 2\tau\Delta u_4 f''_{tu} + \Delta u_4{}^2 f''_u\right)\right]$$

$$\Delta u_{i3} = \tau\sum_{j=1}^{4} a_{ij}\left[f^n + c_i\tau f'_t + \Delta u_4 f'_u\right]$$

$$\Delta u_{i4} = \tau\sum_{j=1}^{4} a_{ij} f^n$$

1-й порядок

2

3

4

3 hours later…

Условия порядка

$$\frac{1}{\tau}\left(u^n + \tau u' + \frac{\tau^2}{2}u'' + \frac{\tau^3}{6}u''' + \frac{\tau^4}{24}u'''' + \cdots - u^n\right) = (b_1k_1 + b_2k_2 + b_3k_3 + b_4k_4)$$

Условие Кутты
$$c_i = \sum_{j=1}^{4} a_{ij}$$

1: $u' = (b_1 + b_2 + b_3 + b_4)f^n$

2: $$\frac{\tau}{2}u'' = \tau\sum_{i=1}^{4} b_i\left(c_i\tau f_t' + f_u'\sum_{j=1}^{4} a_{ij}f^n\right) = \tau\sum_{i=1}^{4} b_i\, c_i(f_t' + f_u' f^n)$$

3: $$\frac{\tau^2}{6}u''' = \frac{\tau^2}{2}\sum_{i=1}^{4} b_i\, c_i^2(f_t'' + 2ff_{tu}'' + f_u''f^2) + \tau^2\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4}\sum_{k=1}^{4} b_i a_{ij}a_{jk}f_u'(f_t' + ff_u')$$

$$= \sum_{i=1}^{4} b_i\sum_{j=1}^{4}\sum_{k=1}^{4} a_{ij}c_j$$

$$u' = f$$
$$u'' = f_t' + f_u'f$$

$$u''' = f_t'' + f_{tu}''f + f_{ut}''f + f_u''f^2 + f_u'f_t' + (f_u')^2 f$$

Условия порядка

Условие Кутты
$$c_i = \sum_{j=1}^{4} a_{ij}$$

1: $$1 = b_1 + b_2 + b_3 + b_4$$

2: $$1 = 2\sum_{i=1}^{4} b_i\, c_i$$

3: $$1 = 3\sum_{i=1}^{4} b_i\, c_i^2 \qquad 1 = 6\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4}\sum_{k=1}^{4} b_i a_{ij} a_{jk}$$

Устойчивость методов Рунге-Кутты

Устойчивость явных методов Рунге-Кутты

$$u' = f(t,u)$$
$$u(0) = u_0$$

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = F(t_n, u^n)$$
$$u^0 = u_0$$

Функция приращения ЯМРК

Лемма: пусть $f(t,u)$ удовлетворяет условию Липшица с константой C по второму аргументу, т.е.

$$\forall u, v \quad |f(t,u) - f(t,v)| \le C\|u - v\|$$

Тогда $F(t,u)$ так же удовлетворяет условию Липшица с константой $C_2 \approx C$

Иными словами, если решение дифференциальной задачи существует и единственно,
то решение разностной задачи так же существует и единственно.

$$F(t_n, u^n) \approx f^n\left(\underbrace{\sum_i b_i}_{1} + \tau c \underbrace{\sum_i b_i c_i}_{1/2} + (c\tau)^2 \left\{\underbrace{\sum b_i a_{ij} a_{jk}}_{1/6} + \cdots\right\} \ldots\right)$$

Это разложение в ряд Тейлора

Таким образом

$$|F(t_n, y) - F(t_n, z)| \le C_2\|y - z\|$$

$$C_2 \approx Ce^{c\tau}$$

Устойчивость явных методов Рунге-Кутты

Теорема: Пусть функция приращения ЯМРК удовлетворяет условию Липшица с константой
C_2 тогда, для решения двух возмущенных задач справедлива следующая оценка

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = F(t_n, u^n) + \varepsilon_1^n \qquad u^0 = u_0$$

$$\frac{z^{n+1} - z^n}{\tau} = F(t_n, z^n) + \varepsilon_2^n \qquad z^0 = z_0$$

Пусть для нормы погрешности решения двух задач выполнима оценка

$$\forall n \quad \|\varepsilon_1^n\| \le \varepsilon, \|\varepsilon_2^n\| \le \varepsilon,$$

Тогда

$$\|u^n - z^n\| \le e^{C_2 t_n}\|u^0 - z^0\| + e^{C_2 t_n}\frac{2\varepsilon}{C_2}$$

Т.е явные методы обладают
слабой устойчивостью

Слабая устойчивость

$$u^n = u^{n-1} + \tau F(t_{n-1}, u^{n-1}) + \tau \varepsilon_1^{n-1}$$

$$z^n = z^{n-1} + \tau F(t_{n-1}, z^{n-1}) + \tau \varepsilon_2^{n-1}$$

$$u^n - z^n = u^{n-1} - z^{n-1} + \tau(F(t_{n-1}, u^{n-1}) - F(t_{n-1}, z^{n-1}) + \varepsilon_1^{n-1} - \varepsilon_2^{n-1})$$

$$\|u^n - z^n\| \le \|u^{n-1} - z^{n-1}\| + \tau\|F(t_{n-1}, u^{n-1}) - F(t_{n-1}, z^{n-1})\| + 2\tau\varepsilon$$

$$\le (1 + C_2\tau)\big((1 + C_2\tau)\|u^{n-2} - z^{n-2}\| + 2\tau\varepsilon\big) + 2\tau\varepsilon \le$$

$$\le \|u^{n-1} - z^{n-1}\|(1 + C_2\tau) + 2\tau\varepsilon \le$$

$$\le (1 + C_2\tau)\big((1 + C_2\tau)\|u^{n-2} - z^{n-2}\| + 2\tau\varepsilon\big) + 2\tau\varepsilon \le \cdots$$

$$\le (1 + C_2\tau)^n\|u^0 - z^0\| + 2\tau\varepsilon(1 + (1 + C_2h) + \cdots + (1 + C_2h)^{n-1}) \le \cdots$$

$$(1 + C_2\tau)^n = (1 + C_2\tau)^{\frac{1}{C_2\tau}C_2\tau n} \le e^{C_2 t_n}$$

$$(1 + (1 + C_2h) + \cdots + (1 + C_2h)^{n-1} = \frac{(1 + C_2\tau)^n - 1}{1 + C_2\tau - 1}$$

$$\le e^{C_2 t_n}\|u^0 - z^0\| + 2\tau\varepsilon\frac{(1 + C_2\tau)^n - 1}{C_2\tau} \le e^{C_2 t_n}\|u^0 - z^0\| + 2\varepsilon\frac{e^{C_2 t_n}}{C_2}$$

Строгая (сильная) устойчивость

$\frac{\partial f}{\partial u}$ – фактор, определяющий устойчивость

Далее будем рассматривать модельное (линеаризованное) уравнение – уравнение Далквиста

$$u' = \lambda u$$

λ – производная, или собственное значение матрицы Якоби

В этом случае можно выразить

$$u^{n+1} = R(\lambda\tau)u^n \qquad z = \lambda\tau, z \in \mathbb{C}$$

Функция устойчивости

$$u^{n+1} = u^n + \tau \sum_i b_i k_i$$

Тогда $R(z)$ – многочлен степени s от z.

Точное решение

$$[u^{n+1}] = e^z [u^n]$$

Численное решение

$$u^{n+1} = R(z)u^n$$

$$\|[u^{n+1}] - u^{n+1}\| = O(\tau^{p+1})$$

p – порядок точности метода

Если $s = p$ то $\|R(z) - e^z\| = O(\tau^{p+1})$

$$R(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^s}{s!}$$

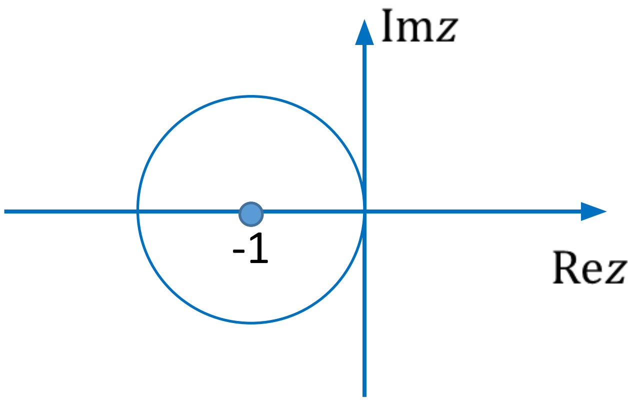
Сильная устойчивость

Область устойчивости $|R(z)| \le 1$

Пример: Найти область (сильной) устойчивости явного метода Эйлера

$$\frac{u^{n+1}-u^n}{\tau} = \lambda u^n$$

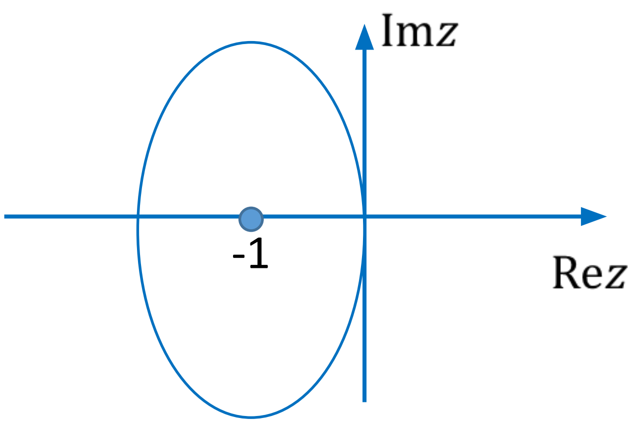
$$u^{n+1} = \underbrace{(1+\tau\lambda)}_{R(z)=|1+z|} u^n$$



Пример: Найти область (сильной) устойчивости метода Эйлера с пересчетом

$$R(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2}$$

1/2	1/2	
	0	1



Барьеры Бутчера

1 барьер Бутчера: Для $p \geq 5$ не существует ЯМРК с $s = p$

При $p = 5,\ s \geq 6$ функция устойчивости

$$R(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^5}{5!} + M_6 z^6$$

2 барьер Бутчера: Для $p \geq 7$ не существует ЯМРК с $s = p + 1$

3 барьер Бутчера: Для $p \geq 8$ не существует ЯМРК с $s = p + 2$

Жесткие задачи

Жесткие задачи

$$u' = f(t,u)$$

$$u(0) = u_0$$

1) $\tau \left\| \frac{\partial f}{\partial u} \right\| \leq 2$ – явные методы

- Климатические задачи
- Процессе в реакторе
- Химические реакции

2) Во многих задачах быстрый процесс определяет только начальный (пограничный) слой => нужны неявные схемы

Пример:

$$u' = au + \frac{1}{\varepsilon} v \qquad u(0) = u_0 \qquad a \sim O(1)$$

$$v' = -\frac{1}{\varepsilon} v \qquad v(0) = v_0 \qquad \varepsilon \ll 1$$

Решение:

$$u(t) = u_0 e^{at} + \frac{v_0}{1 + a\varepsilon}\left(e^{at} - e^{-\frac{t}{\varepsilon}}\right) \qquad v(t) = v_0 e^{-t/\varepsilon}$$

Пример:

$$u' = 998u + 1998v \qquad u(0) = 1$$

$$v' = -999u - 1999v \qquad v(0) = 1$$

Решение:

$$u(t) = 4e^{-t} - 3e^{-1000t}$$

$$v(t) = -2e^{-t} + 3e^{-1000t}$$

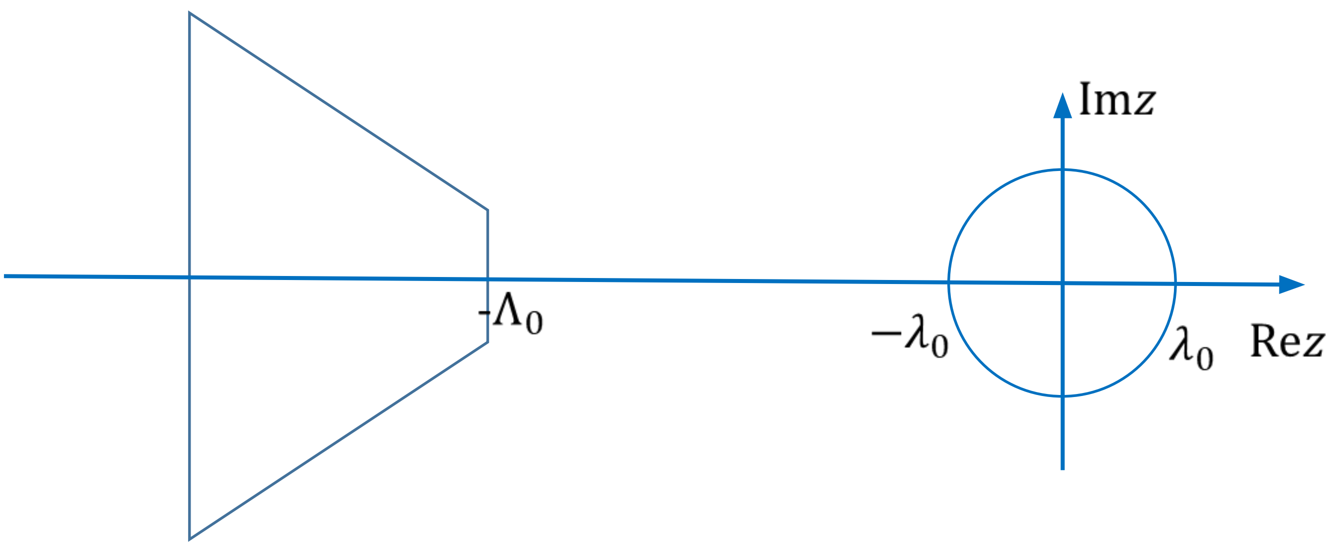
Жесткие задачи

Опр: Система дифференциальных уравнений $u' = f(t,u)$ называется жесткой, если спектр матрицы Якоби $J = \frac{\partial f}{\partial u}$ можно разделить на 2 части:

1) Жесткий спектр $\mathrm{Re}\lambda_i \le -\Lambda_0$, $|\mathrm{Im}\lambda_i| \le |\mathrm{Re}\lambda_i|$,

2) Мягкий спектр $|\lambda_i| \le \lambda_0$,

$\Lambda_0 \gg \lambda_0$ $\quad \frac{\Lambda_0}{\lambda_0}$ - показатель жесткости системы



Определения устойчивости

Опр: Разностная схема называется абсолютно устойчивой в заданной точке $z = \lambda\tau, z \in \mathbb{C}$ если функция устойчивости $|R(z)| \leq 1$

Опр: Совокупность всех точек $z \in \mathbb{C}$ для которых $|R(z)| \leq 1$ называется областью устойчивости

Рассмотрим уравнение Далквиста,

$$u' = \lambda u$$

$$[u^{n+1}] = e^{z}[u^{n}] \Rightarrow |[u^{n+1}]| \leq |[u^{n}]|$$

$$|e^{z}| \leq 1$$

Опр: Если область устойчивости разностной схемы ($|R(z)| \leq 1$) включает в себя левую полуплоскость, то такая разностная схема называется A-устойчивой

Опр: Разностная схема называется называется *L*-устойчивой, если она *A*-устойчива и $|R(z)| \to 0$ при $z \to -\infty$

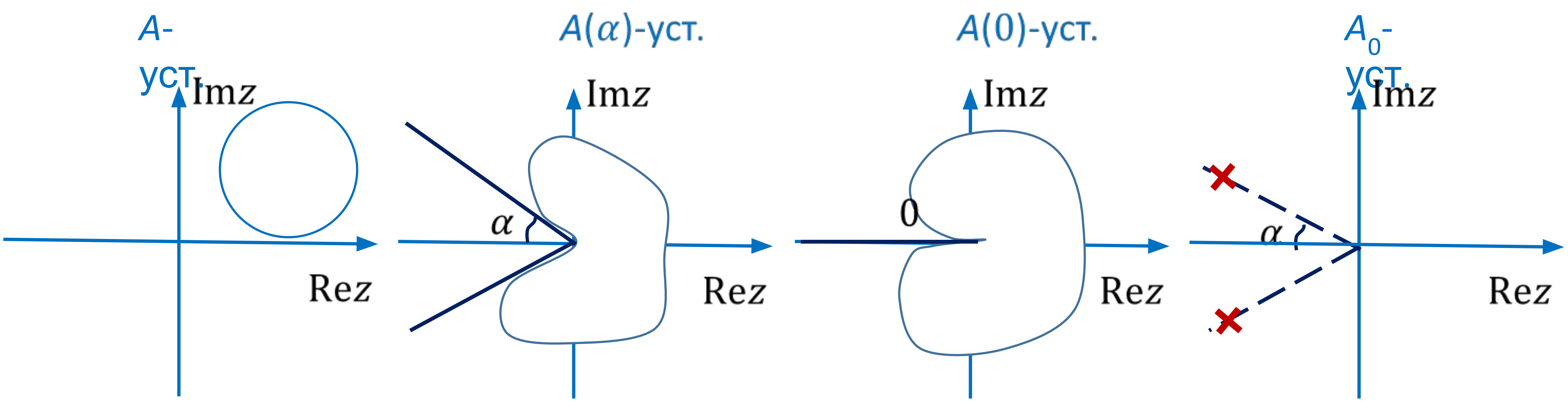
Если $|R(z)| \to 0$ при $z \to -\infty$ как z^p то такая разностная схема называеся L_p устойчивой

Определения устойчивости

Опр: Если область абсолютной устойчивости $|R(z)| \leq 1$ содержит в себя часть отрицательной полуплоскости, включающую угол α, отсчитываемый от отрицательного направления действительной оси, то такая разностная схема называется $A(\alpha)$-устойчивой.

Опр: Если область абсолютной устойчивости $|R(z)| \leq 1$ содержит в себя часть отрицательной полуплоскости, включающую бесконечно малый угол α, отсчитываемый от отрицательного направления действительной оси, то такая разностная схема называется $A(0)$-устойчивой.

Опр: Если область абсолютной устойчивости $|R(z)| \leq 1$ содержит в себя отрицательную действительную полуось, но граница области устойчивости пересекается с $\forall$ малым углом, то метод называется A_0 - устойчивым



Разностные схемы для жестких систем ОДУ

Одношаговые методы

- 1 шаг по времени
- Нужно решать нелинейную систему

Многошаговые методы

- Много шагов по времени
- Решается только 1 нелинейное уравнение
- Проблемы с устойчивостью

Неявные методы Рунге-Кутты

Опр: s-стадийным **неявным** методом Рунге-Кутты с определяющими коэффициентами

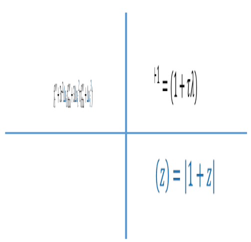
$$a_{ij}, c_i, b_i,$$

Называется метод вида

$$u^{n+1} = u^n + \tau \sum_{i=1}^{s} b_i k_i$$

$$k_i = f(x_n + c_i \tau, u^n + \tau \sum_j a_{ij} k_j)$$

Таблица Бутчера



c_1	a_{11}	…	a_{1s}
c_2	a_{21}	…	a_{2s}
…	…	…	…
c_s	a_{s1}	…	a_{ss}
	b_1	…	b_s

Необходимо решать систему нелинейных уравнений

Диагонально-неявные методы

Диагонально-неявные методы Рунге-Кутты

$$a_{ij} = 0, j > i$$

Система распадается на s отдельных систем по n уравнений

Однократно диагонально-неявные методы Рунге-Кутты (ОДНРК)

$$a_{ij} = 0, j > i$$

$$\forall i \; a_{ii} = a$$

$$\underbrace{(\mathbf{E} - \mathbf{A}h)}_{\substack{\text{На каждом шаге одна и та же матрица} \\ \text{Вычисляется один раз}}}\mathbf{k} = \mathbf{F}$$

Спасибо за внимание!