РТУ МИРЭА

Теория сетей Петри и моделирование систем

Лекция 3

Дизайн И. Гайдель 2007

Основные определения и обозначения

Определение 1. *Сеть Петри* (СП) - это двудольный ориентированный мультиграф **N = (P, T, I, O, μ_0)**, где:

P - конечное непустое множество элементов, называемых *позициями*; **T** - конечное непустое множество элементов, называемых *переходами*; **I: P×T→** {0,1,2...} и **O: P×T→**{0,1,2...} - *функции инцидентности*;

μ_0 : **P**→{0,1,2...} - *начальная разметка*.

$n = |$**P**$|$ - мощность множества **P,**

$m = |$**T**$|$ - мощность множества **T.**

СП обычно представляют в виде геометрического объекта. При этом позиции изображают кружками, переходы - черточками или прямоугольниками.

Дуга проводится от позиции *pi* к переходу *tj*, если **I**(*pi*, *tj*) > 0, и от перехода *tj* к позиции *pi*, если **O**(*pi*, *tj*) > 0.

Основные определения и обозначения

Кратность дуги, соединяющей входную позицию *pi* с переходом *tj*, определяется величиной **I**(*pi*, *tj*). Аналогично кратность дуги, соединяющей переход *tj* с выходной позицией *pi*, определяется величиной **O**(*pi*, *tj*).

Кратность рассматривается как возможность дублирования дуги, соединяющей вершины *pi* и *tj* (или *tj* и *pi*), **I**(*pi*, *tj*) (или **O**(*pi*, *tj*)) раз.

Если **I**(*pi*, *tj*) > 0, то позицию *pi* называют *входной* к переходу *tj*, а переход *tj* - *выходным* к позиции *pi*.

Множество входных позиций *(pre(tj))* к переходу *tj* определяется как *pre(tj)={ p|***I***(pi, tj) > 0},* а множество выходных переходов *(post(pi))* к позиции *pi* - как *post(pi)={ t |* **I***(pi, tj) > 0}* .

Основные определения и обозначения

Аналогично, если **O(*pi*, *tj*)** > 0 , то переход ***tj*** называют *входным* к позиции *p**i***, а позицию *p**i*** - *выходной* к переходу ***tj*** .

Множество входных переходов к позиции *p**i*** определяется как
pre(*p**i***)={*t* | **O(*pi*, *tj*) > *0***},
а множество выходных позиций к переходу ***tj*** - как
*post***(*tj*)={***p* | **O(*pi*, *tj*) > *0***}.

Входная позиция ***pi*** к переходу ***tj*** называется *головной*, если *pre***(*pi*)** = ∅ .
Аналогично выходная позиция ***pi*** к переходу ***tj*** называется *хвостовой*, если *post***(*pi*)** = ∅ .

Основные определения и обозначения

Введем понятие элементарной сети.

Определение 2. *Элементарной сетью t* называется СП $\mathbf{N = (P, T, I, O, \mu_0)}$, для которой $\mathbf{T=\{t\}}$; $\mathbf{P=\{p',p''\}}$; $pre(t)=\{p'\}$, $post(t) = \{p''\}$; $\mu_0 = (0,0)$.

Основные определения и обозначения

При функционировании СП переходит от одной разметки к другой. Каждая разметка представляет собой функцию $\mu : P \rightarrow \{0,1,2...\}$. Переход может *сработать* при разметке μ, если он *активен*.

Переход t_j является *активным*, если $\forall p_i \in pre(t_j): \mu(p_i) >= I(p_i, t_j)$.

В результате срабатывания перехода t_j разметка меняется в соответствии со следующим правилом:
$\forall p_i \in (pre(t_j) \cup post(t_j)) : \mu'(p_i) = \mu(p_i) - I(p_i, t_j) + O(p_i, t_j)$.

В этом случае говорят, что разметка μ' *достижима* от разметки μ в результате срабатывания перехода t_j, а разметка μ предшествует μ'.
СП останавливается, если при некоторой разметке не может сработать ни один из ее переходов. Такая разметка называется *тупиковой*.

Таким образом, СП моделируют некоторую структуру и динамику ее функционирования.

Основные определения и обозначения

Обозначим через **T*** множество слов в алфавите **T**. Если разметка μ' достижима от разметки μ в результате срабатывания последовательности переходов $\nu = (t1, t2, \ldots, t_k)$, где ν - слово из множества **T*** , то это обозначается как

$$\mu \xrightarrow{t1} \mu_1 \xrightarrow{t2} \ldots \mu_{k-1} \xrightarrow{tk} \mu' \text{ или } \mu \xrightarrow{\nu} \mu' .$$

Разметка μ достижима в сети **N** , если $\mu_0 \rightarrow \mu$. Множество всех достижимых разметок в сети **N** обозначим через **R(N).**

Основные определения и обозначения

Переход t достижим от разметки μ ($\mu \to t$) в сети **N** , если

$$\exists \mu'(\mu' \in R(N)\ \&\ \mu \to \mu'): \mu' \xrightarrow{t} \mu'',\ \text{где}\ \mu'' \in R(N).$$

Переход t *достижим* в сети **N** , если $\mu_0 \to t$.

Переход t *живой*, если он достижим от любой разметки из **R(N),** т.е.

$$\forall \mu \in R(N): \mu \to t\ .$$

СП живая, если живы все ее переходы:

$$\forall \mu \forall t (t \in T\ \&\ \mu \in R(N)): \mu \to t\ .$$

В приложении к моделированию систем проблема достижимости разметки μ_0 из μ интерпретируется как возможность достижения определенного состояния системы. Анализ СП модели на свойство живости позволяет выявить события, которые могут произойти в моделируемой системе.

Основные определения и обозначения

Позиция p в СП **N** называется *ограниченной*, если существует целое число k, такое, что $\mu(p) <= k$ для любой разметки из множества **R(N):**

$$\forall \mu \in R(N):\ \mu(p) \le k\ .$$

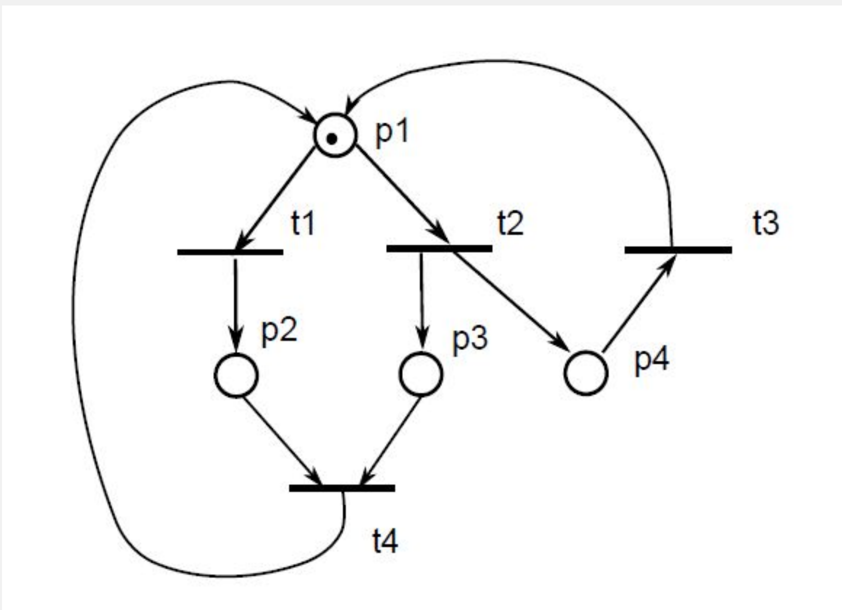
СП является ограниченной, если ограничены все позиции сети:

$$\forall p \forall \mu\ (\ p \in P\ \&\ \mu \in R(N):\ \mu(p) \le k\ .$$

Если k=1 , то СП называется *безопасной*.

Теория сетей Петри и моделирование систем

Пример сети Петри



I

	t1	t4	t2	t3
1	1		1	
2		1		
3		1		
4				1

O

	t1	t4	t2	t3
1		1		1
2	1			
3			1	
4			1	

	1	2	3	4
μ_0	1			

P = {p1, p2, p3, p4} ; **T** = {t1, t2, t3, t4}

Модификации сетей Петри (*иерархические сети*)

Иерархические сети (ИСП) являются обобщением СП и служат для моделирования иерархических систем, которые наряду с неделимыми, атомарными компонентами содержат составные компоненты, представляющие собой отдельные подсистемы. Для определения ИСП множество переходов разбивается на подмножества простых и иерархических переходов (ИПР). Простым переходам соответствуют элементарные сети. ИПР представляет собой некоторый фрагмент СП.

Сравнительный анализ выразительных свойств ИСП и СП показывает, что введение иерархии в сетевые модели существенно улучшает моделирующие способности СП-моделей.

Модификации сетей Петри (*ингибиторные сети*)

В рассмотренных СП недостатком является то, что нельзя отметить срабатыванием перехода факт изменения разметки с ненулевого значения на нулевое. Таким образом из двух альтернатив
$\mu(p) \neq 0$ и $\mu(p) = 0$, содержащихся в операторе условного вычитания единицы, в СП можно представить только одну, первую, но нельзя отразить проверку на ноль, так как сеть не может реагировать непосредственно на отсутствие метки в позиции. В результате было показано, что СП не могут моделировать *машины Минского и Тьюринга*.

Флинн и Аджервала модифицировали СП, введя в них специальные ингибиторные дуги, осуществляющие проверку на нулевую разметку, и показали, что получаемое обобщение дает класс сетей равномощных машине Тьюринга.

Модификации сетей Петри (*ингибиторные сети*)

Ингибиторная сеть представляет собой СП, дополненную специальной функцией инцидентности **FI:P×T→{**0,1**},** которая вводит ингибиторные дуги для тех пар ***(****p*,*t***),*** для которых **FI(***p*,*t***)** = 1.

Ингибиторные дуги связывают только позиции с переходами и на рисунках изображаются заканчивающимися не стрелками, а маленькими кружочками. Правило срабатывания перехода в ингибиторной сети модифицируется следующим образом:

$\forall\ p_i \in pre(t_j):\ \mu(p_i) \geq I(p_i, t_j)\ \&\ \mu(p_i) * FI(p,t) = 0$.

Модификации сетей Петри (*приоритетные сети*)

При описании функционирования СП отмечалась недетерминируемость следующего рода: если может сработать несколько переходов, то срабатывает любой из них. В реальных дискретных системах имеют место ситуации, когда из двух готовых сработать устройств требуется запустить вначале одно, а затем другое. Иными словами, одно из устройств имеет приоритет на запуск перед другим. Эти ситуации не моделируются в СП.

Модифицируем определение СП следующим образом. Введем множество **PR**, элементы которого частично упорядочены отношением "≤" (меньше или равно). С каждым переходом *t* СП свяжем его приоритет ***pr(****t****),*** принадлежащий множеству **PR**.

Модификации сетей Петри (*приоритетные сети*)

Правило срабатывания перехода дополним следующим условием: переход *t* может сработать при разметке ***μ*** , если для любого другого перехода ***t'*** этой сети, который также может сработать при разметке ***μ***, ***pr(t')≤pr(t).***

Другими словами, если несколько переходов готовы сработать, то срабатывает такой переход, приоритет которого не меньше приоритетов остальных готовых к срабатыванию переходов. Такую модификацию СП называют приоритетными сетями.

Показано, что класс приоритетных СП является строго мощнее СП и равномощен классам машин Тьюринга и Минского.

Модификации сетей Петри (*временные сети*)

При построении моделей очень важным является учет временных характеристик моделируемых событий. Предлагаемое расширение СП позволяет отразить в модели временные параметры системы. При этом фактор времени учитывается путем введения задержки между моментом изъятия меток из входных позиций сработавшего перехода и моментом помещения меток в выходные позиции данного перехода.

Очевидно, что определенные таким образом временные СП могут использоваться в тех случаях, когда возможно предположение о постоянном времени протекания каждого процесса в модели.

Модификации сетей Петри

Наряду с описанными расширениями СП в современной литературе встречается ряд других расширений СП, которые учитывают специфику той предметной области, в которой используется аппарат СП.

Среди данных расширений можно выделить стохастические СП, раскрашенные СП, Е-сети, СП для описания процедур принятия решений (нейронные, нечеткие, числовые, абстрактные) и другие.

Спасибо за внимание!