КИХ-фильтры с линейной ФЧХ

КИХ фильтры с линейной ФЧХ

В классе КИХ-фильтров можно синтезировать фильтры, обладающие заданной АЧХ и строго линейной ФЧХ $\varphi(\omega) = \arg H(e^{j\omega T}) = -\omega n_0 T$,

а потому и постоянным групповым временем задержки (ГВЗ):

$$\tau_{\text{гвз}} = -\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega} = n_0 T$$

т.е. начальные фазы всех частотных составляющих сигнала получают пропорциональный частоте сдвиг, поэтому не нарушаются их фазовые соотношения.

Пример

Найти фазочастотную характеристику КИХ-фильтра, описываемого передаточной функцией $H(z)=0{,}5+z^{-1}+0{,}5z^{-2}$.

Получим из передаточной функции комплексную частотную характеристику, для чего подставим $z=e^{j\omega T}$

$$H(e^{j\omega T})=0{,}5+\cos(\omega T)-j\sin(\omega T)+0{,}5\cos(2\omega T)-j0{,}5\sin(2\omega T)$$

Отсюда вещественная и мнимая часть

$$\mathrm{Re}\left\{H(e^{j\omega T})\right\}=0{,}5+\cos(\omega T)+0{,}5\cos(2\omega T)=0{,}5[1+2\cos(\omega T)+\cos(2\omega T)]$$

$$\mathrm{Im}\left\{H(e^{j\omega T})\right\}=-[\sin(\omega T)+0{,}5\sin(2\omega T)]=-0{,}5[2\sin(\omega T)+\sin(2\omega T)].$$

Пример

По определению ФЧХ, имеем

$$\varphi(\omega) = arg\{H(e^{j\omega T})\} = arctg\frac{Im\{H(e^{j\omega T})\}}{Re\{H(e^{j\omega T})\}}$$

$$= -arctg\frac{2\sin(\omega T) + \sin(2\omega T)}{1 + 2\cos(\omega T) + \cos(2\omega T)}$$

Рассмотрим аргумент арктангенса.

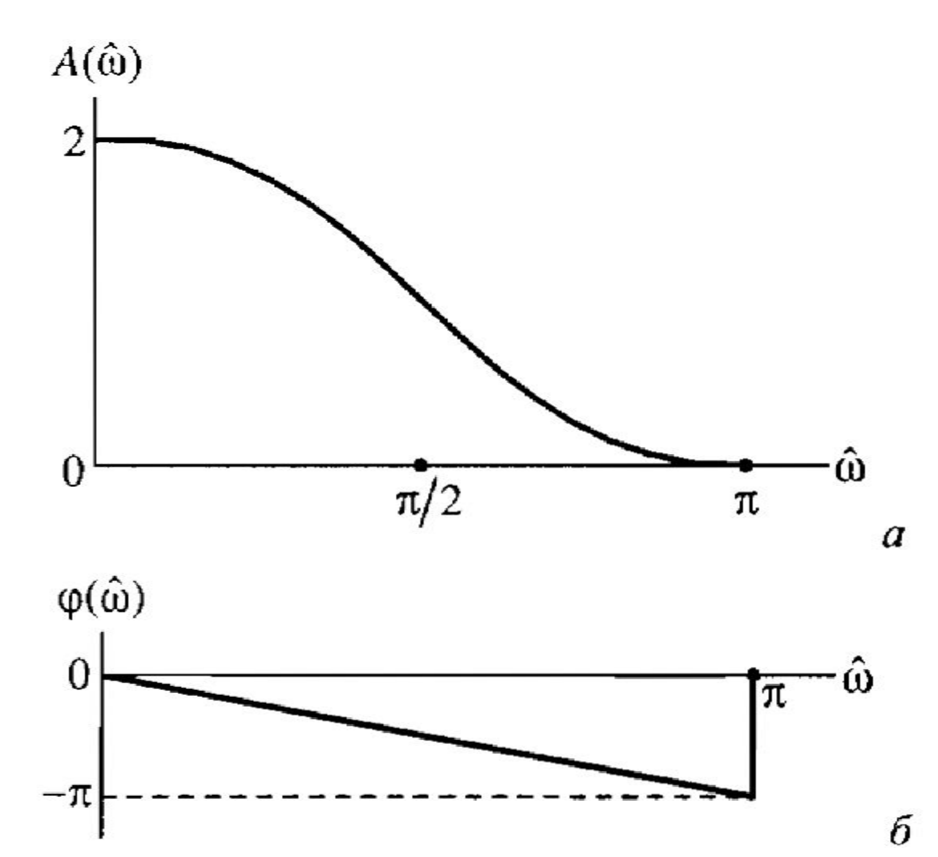
$$\frac{2\sin(\omega T)+\sin(2\omega T)}{1+2\cos(\omega T)+\cos(2\omega T)} = \frac{2\sin(\omega T)+2\sin(\omega T)\cos(\omega T)}{2\cos(\omega T)+(1+\cos(2\omega T))} =$$

$$= \frac{2\sin(\omega T)[1+\cos(\omega T)]}{2\cos(\omega T)+2\cos^2(\omega T)} = \frac{2\sin(\omega T)[1+\cos(\omega T)]}{2\cos(\omega T)[1+\cos(\omega T)]} = \mathrm{tg}(\omega T),$$

Отсюда следует $\varphi(\omega) = -\mathrm{arctg}[\mathrm{tg}(\omega T)] = -\omega T,$ $\quad \varphi(\hat{\omega}) = -\hat{\omega}$

Пример

АЧХ и ФЧХ рассмотренного КИХ-фильтра второго порядка показаны на рисунке, а и б соответственно.



Рассмотренная передаточная функция фильтра, имеющего строго линейную ФЧХ, обладает особой структурой: ее *коэффициенты симметричны:* $b_0 = b_2 = 0{,}5$.

Теорема о КИХ-фильтрах с линейной ФЧХ

Пусть имеются два многочлена

$$D(z) = \sum_{i=0}^{N_D-1} d_i z^{-i} \quad \text{и} \quad D(z^{-1}) = \sum_{i=0}^{N_D-1} d_i z^{i},$$

где: *di* — вещественные коэффициенты;

D(z) — минимально-фазовый многочлен, т. е. его нули лежат в пределах единичного круга z-плоскости.

Тогда цифровой фильтр с передаточной функцией

$$H(z) = \sum_{i=0}^{N-1} b_i z^{-i} = D(z) \pm z^{-R} D(z^{-1})$$

Теорема о КИХ-фильтрах с линейной ФЧХ

При условии, что $R \geq N_D - 1,$

имеет строго линейную ФЧХ вида

$$\varphi(\omega) = -\frac{\omega TR}{2} + (-1)^k \pi + m\frac{\pi}{2}, \quad k = 1, 2, \ldots, \quad m = \{0, 1\}$$

во всем диапазоне частот $0 \leq \omega \leq \omega_д / 2$ с точностью до скачков фазы π на радиан на тех частотах ω_k, где АЧХ принимает нулевое значение.

Следствие 1

Соотношение $\varphi(\omega) = -\frac{\omega TR}{2} + (-1)^k \pi + m\frac{\pi}{2}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad m = \{0, 1\}$

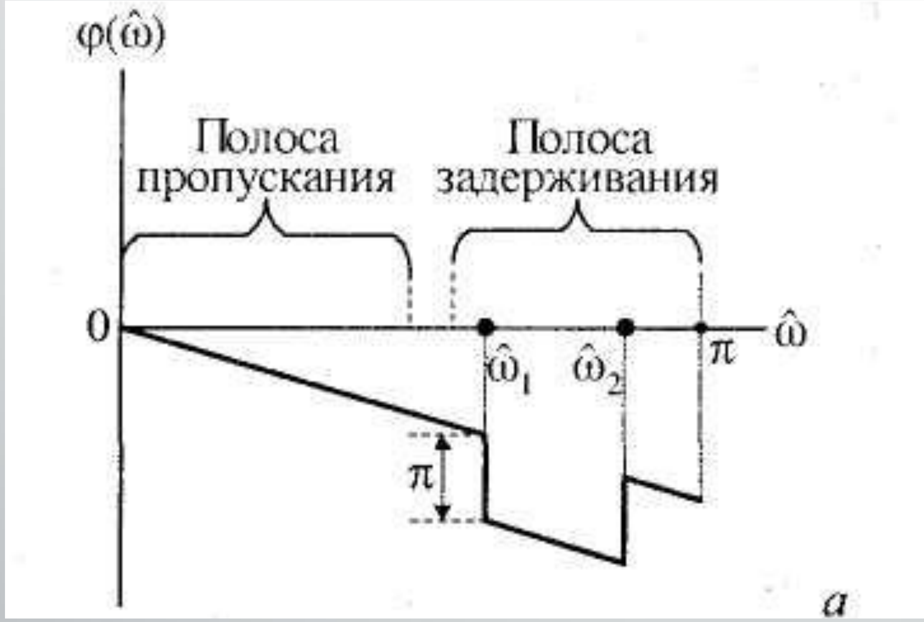
порождает два типа качественно различных ФЧХ:

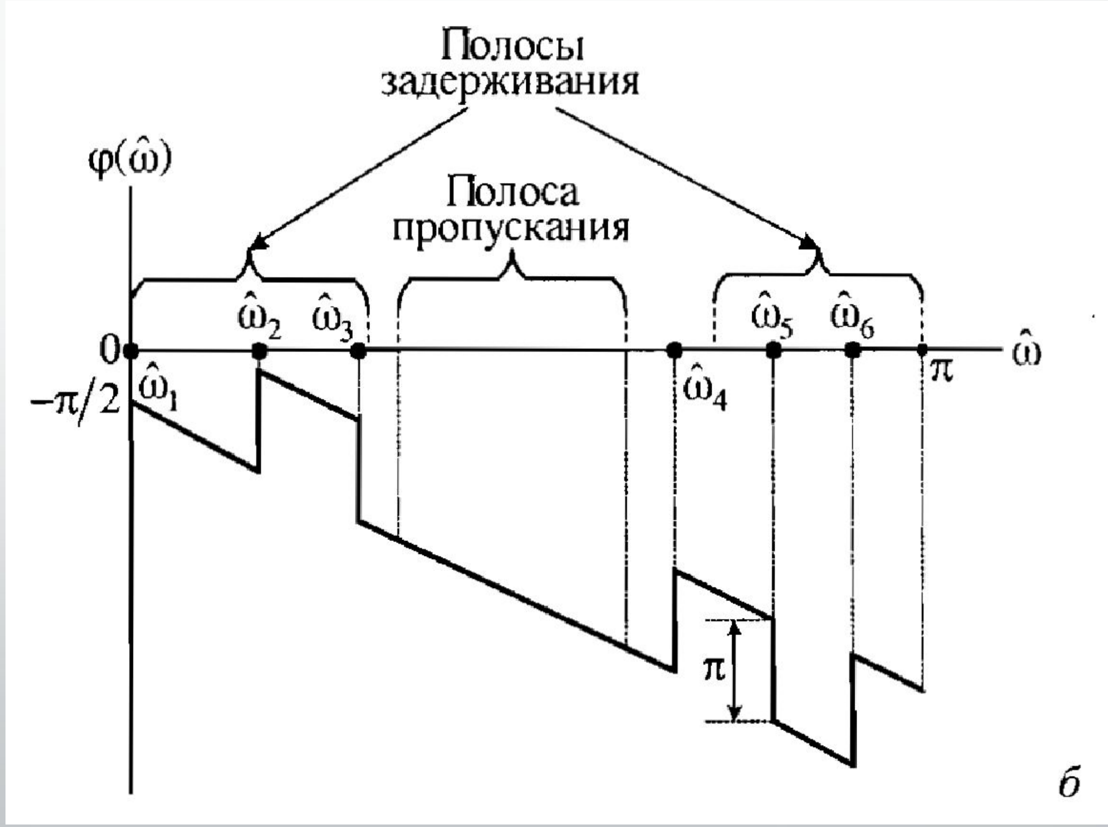
$$1. \quad \varphi_+(\omega T) = -\frac{\omega TR}{2} + (-1)^k \pi;$$

$$2. \quad \varphi_-(\omega T) = -\frac{\omega T}{2} R + (-1)^k \pi + \frac{\pi}{2}.$$

Следствие 2

Скачки ФЧХ на π радиан возможны только в полосах задерживания и переходных, где АЧХ может принимать нулевые значения.





Следствие 3

Групповое время задержки фильтра с линейной ФЧХ постоянно и равно

$$\tau_{\text{гвз}}(\omega) = -\varphi'(\omega) = \frac{N-1}{2}T = \text{const},$$

причем в зависимости от значения N (нечетное или четное) выделяются две группы фильтров: одна из них обладает задержкой на целое число периодов дискретизации T (N нечетно), другая — на целое число периодов дискретизации T плюс полпериода дискретизации (N четно).

Следствие 4

Цифровой КИХ-фильтр обладает линейной ФЧХ с точностью до скачков на π рад на частотах, где АЧХ равна нулю, если его импульсная характеристика симметрична

$$h_k = -h_{N-1-k}$$

или антисимметрична

$$h_k = h_{N-1-k}$$

где N- длина импульсной характеристики КИХ фильтра.

Следствие 5

Типы КИХ-фильтров с линейной ФЧХ

Длина импульсной характеристики (число коэффициентов) N	Порядок фильтра $R = N - 1$	Импульсная характеристика	
		Симметричная	Антисимметричная
Нечетная	Четный	Тип 1, $m = 0$	Тип 3, $m = 1$
Четная	Нечетный	Тип 2, $m = 0$	Тип 4, $m = 1$

Структурные схемы КИХ-фильтров с линейной ФЧХ

Построим структурную схему фильтра при N = 9 (R = 8) с симметричной импульсной характеристикой (симметричными коэффициентами)

$$h_i = h_{8-i}, \quad \text{или} \quad b_i = b_{8-i}.$$

Таким условиям соответствует фильтр типа 1, передаточная функция которого имеет вид

$$H(z) = b_0 + b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3} - b_4 z^{-4} + b_3 z^{-5} - b_2 z^{-6} + b_1 z^{-7} + b_0 z^{-8}.$$

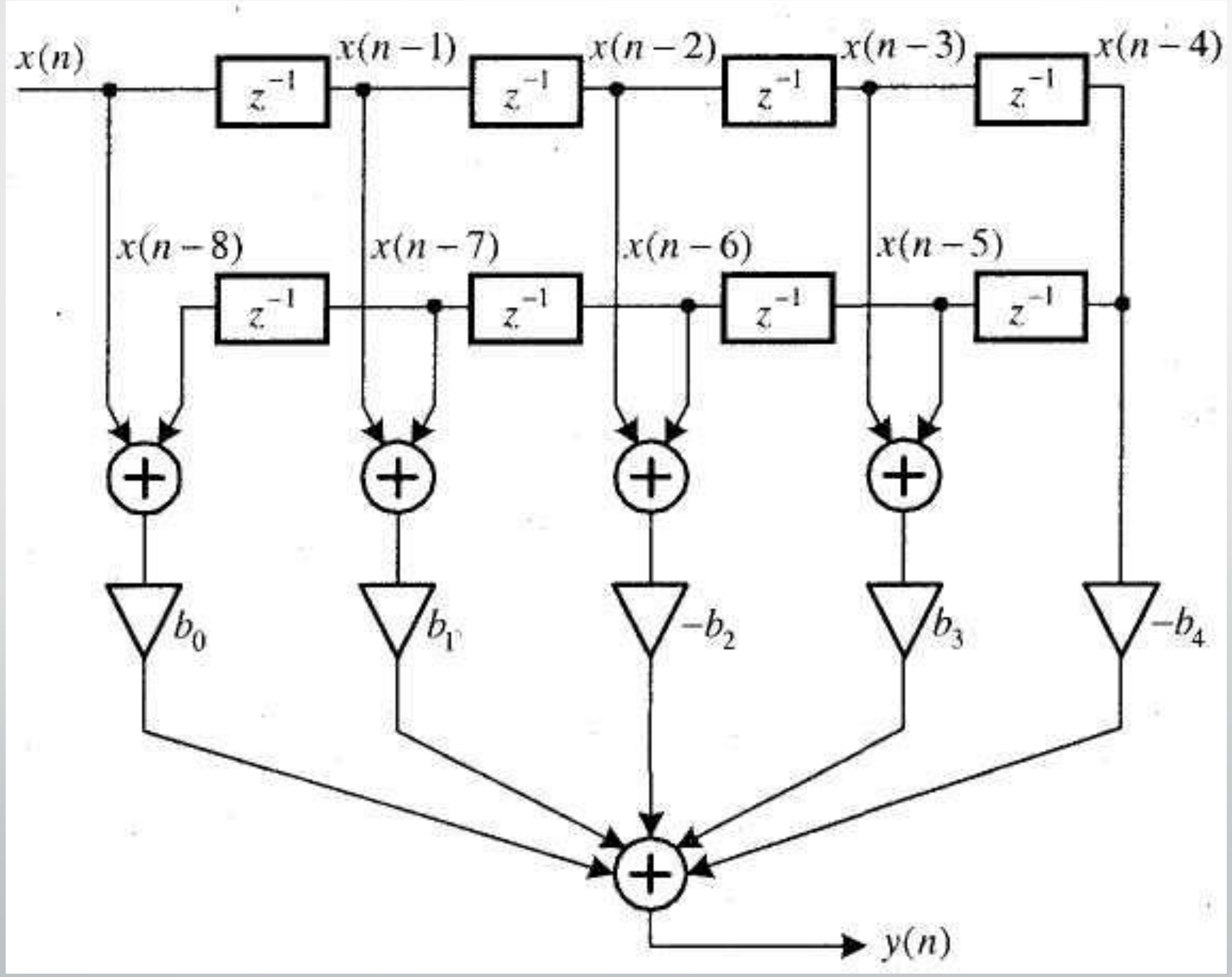
Структурные схемы КИХ-фильтров с линейной ФЧХ

Объединим члены передаточной функции, имеющие одинаковые коэффициенты:

$$H(z) = b_0(1 + z^{-8}) + b_1(z^{-1} + z^{-7}) - b_2(z^{-2} + z^{-6}) + b_3(z^{-3} + z^{-5}) - b_4 z^{-4}.$$

Полученную передаточную функцию и соответствующую ей схему будем называть приведенными.

Структурные схемы КИХ-фильтров с линейной ФЧХ



КИХ-фильтры типа 1.

Частотная характеристика (ЧХ):

$$H_1\left(e^{j\widehat{\omega}}\right) = e^{-j\frac{R}{2}\widehat{\omega}} \sum_{k=0}^{\frac{R}{2}} a_k \cos\left[\left(\frac{R}{2} - k\right)\widehat{\omega}\right]$$

где R - порядок фильтра;

$a_k = 2b_k = 2h_k$ – коэффициенты фильтра

АЧХ:

$$A_1(\widehat{\omega}) = |B_1(\widehat{\omega})| = \left|\sum_{k=0}^{\frac{R}{2}} a_k \cos\left[\left(\frac{R}{2} - k\right)\widehat{\omega}\right]\right|$$

где $B_1(\widehat{\omega})$ - амплитудная функция

КИХ-фильтры типа 1.

ФЧХ: $\varphi_1(\widehat{\omega}) = -\frac{R}{2}\widehat{\omega}$

Групповое время задержки, равное целому числу периодов дискретизации:

$$\tau_{1\text{ГВЗ}} = \frac{d\varphi_1(\omega T)}{d\omega} = \frac{R}{2}T = \frac{N-1}{2}T$$

КИХ-фильтры типа 3.

Частотная характеристика (ЧХ):

$$H_3\left(e^{j\hat{\omega}}\right) = e^{-j\left(\frac{\pi}{2}-\frac{R}{2}\right)\hat{\omega}} \sum_{k=0}^{\frac{R}{2}-1} a_k \sin\left[\left(\frac{R}{2}-k\right)\hat{\omega}\right], a_k = 2b_k$$

где R - порядок фильтра;

АЧХ:

$$A_3(\hat{\omega}) = |B_3(\hat{\omega})| = \left|\sum_{k=0}^{\frac{R}{2}-1} a_k \sin\left[\left(\frac{R}{2}-k\right)\hat{\omega}\right]\right|$$

где $B_1(\hat{\omega})$ - амплитудная функция

КИХ-фильтры типа 3.

ФЧХ: $\varphi_3(\widehat{\omega}) = -\frac{R}{2}\widehat{\omega} + \frac{\pi}{2}$

Групповое время задержки, равное целому числу периодов дискретизации:

$$\tau_{3\text{ГВЗ}} = \frac{d\varphi_3(\omega T)}{d\omega} = \frac{R}{2}T$$

КИХ-фильтры типа 2.

Частотная характеристика (ЧХ):

$$H_2\left(e^{j\widehat{\omega}}\right) = e^{-j\left(\frac{R}{2}\right)\widehat{\omega}} \sum_{k=0}^{\frac{R-1}{2}} a_k \cos\left[\left(\frac{R}{2} - k\right)\widehat{\omega}\right], a_k = 2b_k$$

где R - порядок фильтра;

АЧХ:

$$A_2(\widehat{\omega}) = |B_2(\widehat{\omega})| = \left|\sum_{k=0}^{\frac{R-1}{2}} a_k \cos\left[\left(\frac{R}{2} - k\right)\widehat{\omega}\right]\right|$$

где $B_1(\widehat{\omega})$ - амплитудная функция

КИХ-фильтры типа 2.

ФЧХ:

$$\varphi_2(\widehat{\omega}) = -\frac{R}{2}\widehat{\omega}$$

Групповое время задержки, равное целому числу периодов дискретизации плюс половина периода:

$$\tau_{2\text{ГВЗ}} = \frac{d\varphi_2(\omega T)}{d\omega} = \frac{R}{2}T = \frac{N-1}{2}T = \frac{N}{2}T - \frac{T}{2}$$

КИХ-фильтры типа 4.

Частотная характеристика (ЧХ):

$$H_4(e^{j\hat{\omega}}) = e^{-j\left(\frac{\pi}{2}-\frac{R}{2}\right)\hat{\omega}} \sum_{k=0}^{\frac{R-1}{2}} a_k \, sin\left[\left(\frac{R}{2}-k\right)\hat{\omega}\right], a_k = 2b_k$$

где R - порядок фильтра;

АЧХ:

$$A_4(\hat{\omega}) = |B_4(\hat{\omega})| = \left|\sum_{k=0}^{\frac{R-1}{2}} a_k \, sin\left[\left(\frac{R}{2}-k\right)\hat{\omega}\right]\right|$$

где $B_1(\hat{\omega})$ - амплитудная функция

КИХ-фильтры типа 4.

ФЧХ: $\varphi_4(\widehat{\omega}) = -\frac{R}{2}\widehat{\omega} + \frac{\pi}{2}$

Групповое время задержки, равное целому числу периодов дискретизации:

$$\tau_{\text{згвз}} = \frac{d\varphi_3(\omega T)}{d\omega} = \frac{R}{2}T = \frac{N-1}{2}T = \frac{N}{2}T - \frac{T}{2}$$

Параметры КИХ-фильтров

ИХ	Тип	Длина N	Порядок R	Амплитудная функция $B(\hat{\omega})$	ФЧХ $\varphi(\hat{\omega})$	Применение
Симметричная	1	Нечетная	Четный	$\sum_{k=0}^{R/2} a_k \cos\left[\left(\frac{R}{2}-k\right)\hat{\omega}\right]$ $a_k=2b_k\ \left(k\neq\frac{R}{2}\right)$ $a_{R/2}=b_{R/2}$	$-\frac{R}{2}\hat{\omega}$	Без ограничений, кроме ЦПГ и ЦД
	2	Четная	Нечетный	$\sum_{k=0}^{(R-1)/2} a_k \cos\left[\left(\frac{R}{2}-k\right)\hat{\omega}\right]$ $a_k=2b_k$	$-\left(\frac{R-1}{2}+\frac{1}{2}\right)\hat{\omega}$	ФНЧ, ПФ

Параметры КИХ-фильтров

ИХ	Тип	Длина N	Порядок R	Амплитудная функция $B(\hat{\omega})$	ФЧХ $\varphi(\hat{\omega})$	Применение
Антисимметричная	3	Нечетная	Четный	$\sum_{k=0}^{\frac{R}{2}-1} a_k \sin\left[\left(\frac{R}{2}-k\right)\hat{\omega}\right]$ $a_k = 2b_k$	$\frac{\pi}{2}-\frac{R}{2}\hat{\omega}$	ЦПГ, ЦД
	4	Четная	Нечетный	$\sum_{k=0}^{(R-1)/2} a_k \sin\left[\left(\frac{R}{2}-k\right)\hat{\omega}\right]$ $a_k = 2b_k$	$\frac{\pi}{2}-\left(\frac{R-1}{2}+\frac{1}{2}\right)\hat{\omega}$	ЦД, ЦПГ