

## Электромагнитные волны в вакууме

В отсутствии зарядов  $\left( \rho = 0, \mathbf{j} = 0 \right)$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$



rot( ... )



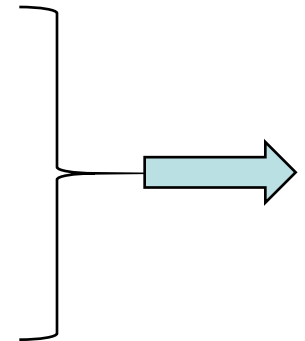
$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \mathbf{B}$$



rot( ... )



$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{B} = -\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \mathbf{E}$$



$$\left( \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{E} - \Delta \mathbf{E} \right)$$

## Электромагнитные волны в вакууме

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - c^2 \Delta \mathbf{E} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} - c^2 \Delta \mathbf{B} = 0$$

– волновые уравнения  
для электромагнитного поля

$$\left( \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad \text{– лапласиан} \right)$$

Частное решение – *плоские бегущие волны*

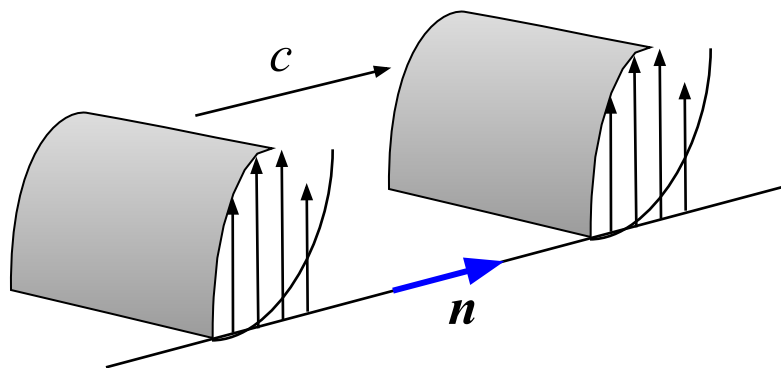
$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(t - \mathbf{n}r/c), \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}(t - \mathbf{n}r/c)$$

$\mathbf{n}$  – единичный вектор (направление распространения бегущей волны)

## Электромагнитные волны в вакууме

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(t - \mathbf{n}r/c), \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}(t - \mathbf{n}r/c)$$

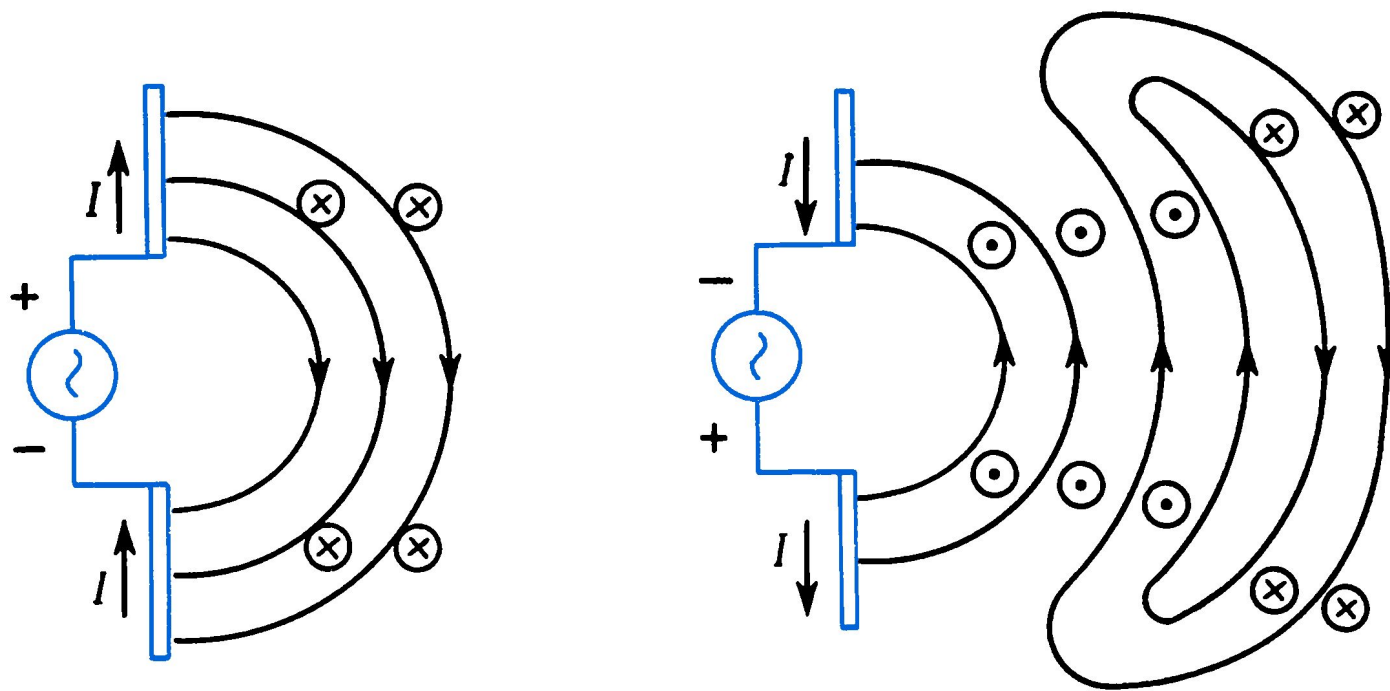
– волна, движущаяся в направлении вектора  $\mathbf{n}$  со скоростью  $c$ .



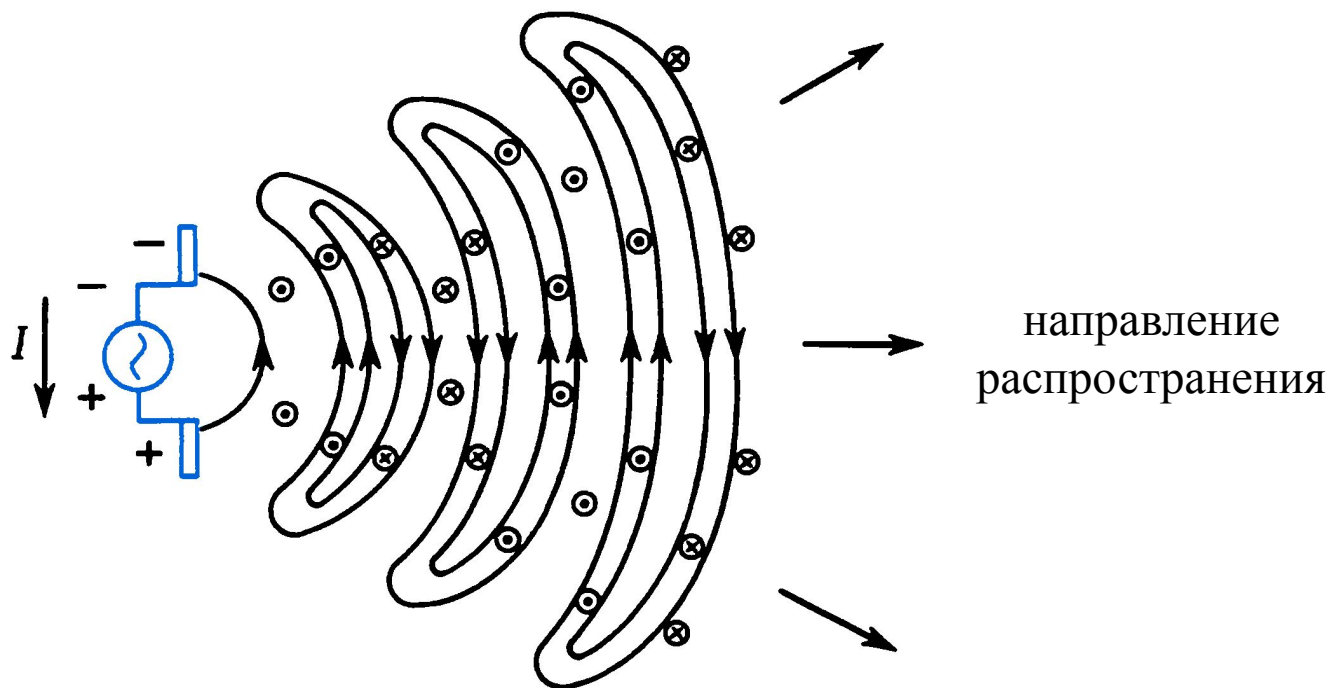
Профиль  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  перемещается вдоль  $\mathbf{n}$  со скоростью  $c$

## Электромагнитные волны в вакууме

Последовательные картины электрического и магнитного полей, распространяющихся от вибратора (антенны), соединенного с источником переменного тока.



Электромагнитные волны в вакууме

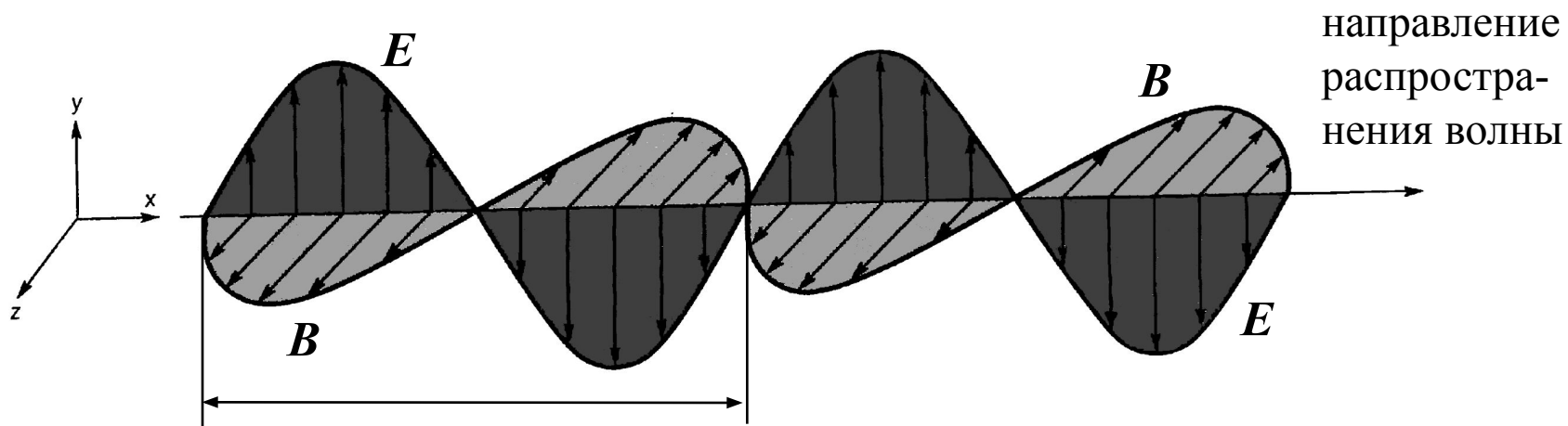


## Электромагнитные волны в вакууме

Гармоническая (монохроматическая) волна

$$E = E_0 \sin(\omega t - kr), \quad B = B_0 \sin(\omega t - kr)$$

$k$  – волновой вектор,  $k = \frac{\omega}{c}$



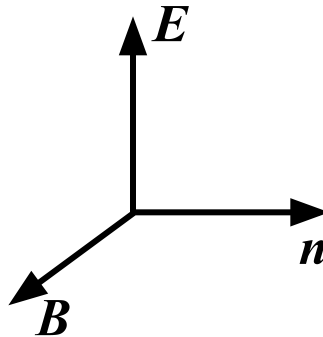
$$\lambda = cT = 2\pi/k \quad \text{– длина волны}$$

## Электромагнитные волны в вакууме

### Свойства гармонических волн

$$\mathbf{nE} = \mathbf{nB} = 0$$

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E} = c\mathbf{B}$$



$E$ ,  $B$ ,  $n$  – правая тройка векторов

$$E = cB$$

### Поток энергии

$w$  – объемная плотность электромагнитной энергии

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \mathbf{nEH} = \mathbf{nc} \underbrace{\frac{1}{2}(\epsilon_0 E^2 + B^2/\mu_0)}_w$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{ncw}$$

скорость переноса энергии плоской гармонической волной в вакууме равна скорости света

## Электромагнитные волны в диэлектриках

Среда  $\varepsilon = \text{const}$ ,  $\mu = \text{const}$ ,  $\sigma = 0$ .

В отсутствии сторонних зарядов и токов проводимости

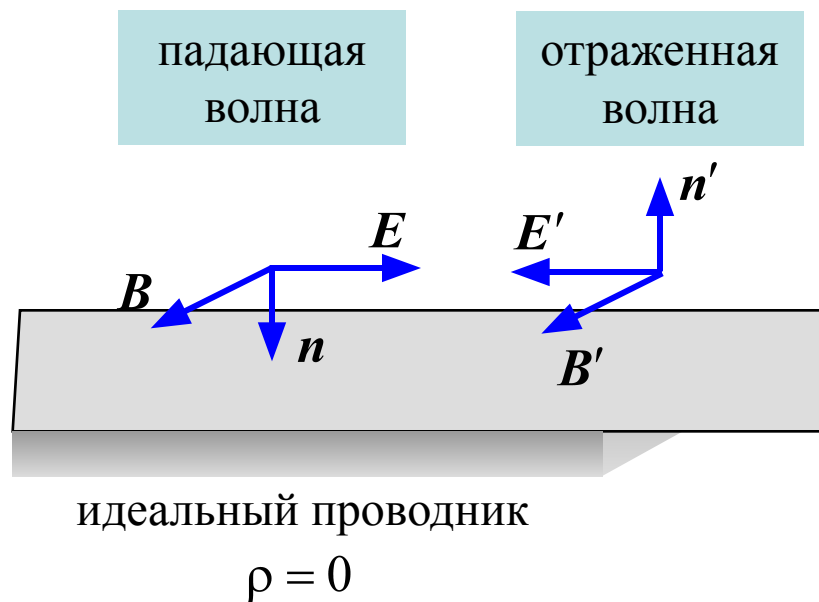
$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{E} &= 0 \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0 \\ \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \frac{1}{v^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - v^2 \Delta \mathbf{E} &= 0 \\ \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} - v^2 \Delta \mathbf{B} &= 0 \end{aligned}$$

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} < c$$

– скорость распространения  
электромагнитной волны в диэлектрике



## Давление и импульс электромагнитных волн



Внутри проводника  
электрическое поле отсутствует

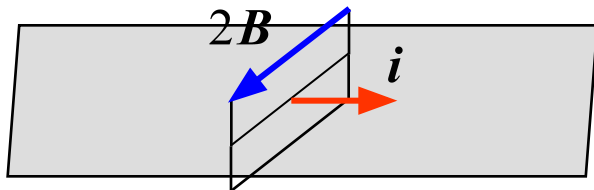


( на границе )

$$E + E' = 0$$

$$B' = B$$

## Давление и импульс электромагнитных волн



Давление оказывает магнитное поле

$$P = \frac{(2B)^2}{2\mu_0} \stackrel{(E=cB)}{=} \frac{B^2}{\mu_0} + \epsilon_0 E^2 = 2w$$

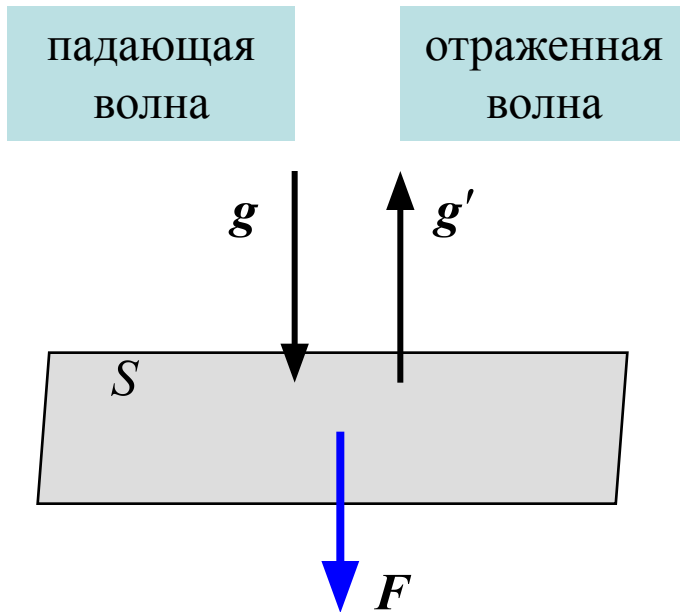
$P = 2w$  ,  $w$  – объемная плотность энергии падающей волны



электромагнитная волна обладает импульсом

$g$  – объемная плотность импульса

## Давление и импульс электромагнитных волн



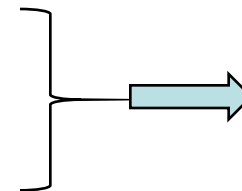
$$\Delta p = gSc\Delta t - g'Sc\Delta t$$

$\Delta p$  – импульс, переданный проводнику за  $\Delta t$

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = 2gcS$$

$$P = \frac{F}{S} = 2gc$$

$$P = 2w$$

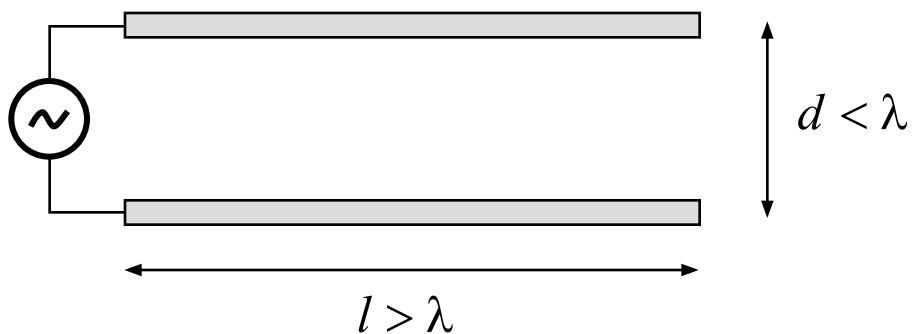


$$g = \frac{w}{c}$$

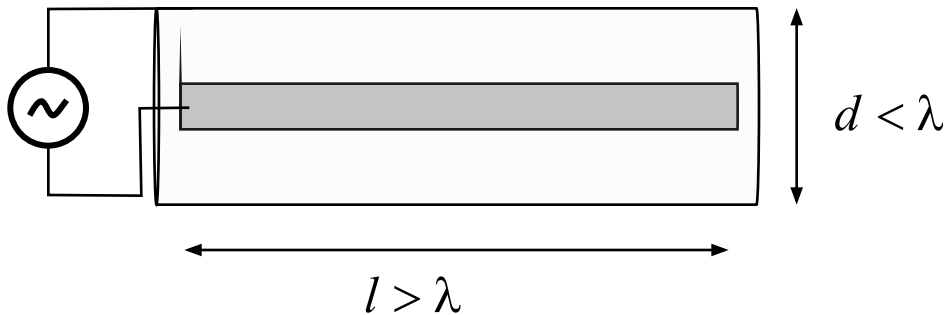
$$g = \frac{w}{c} \mathbf{n} = \frac{\mathbf{S}}{c^2}$$

## Волны вдоль линии

**Двухпроводная линия**

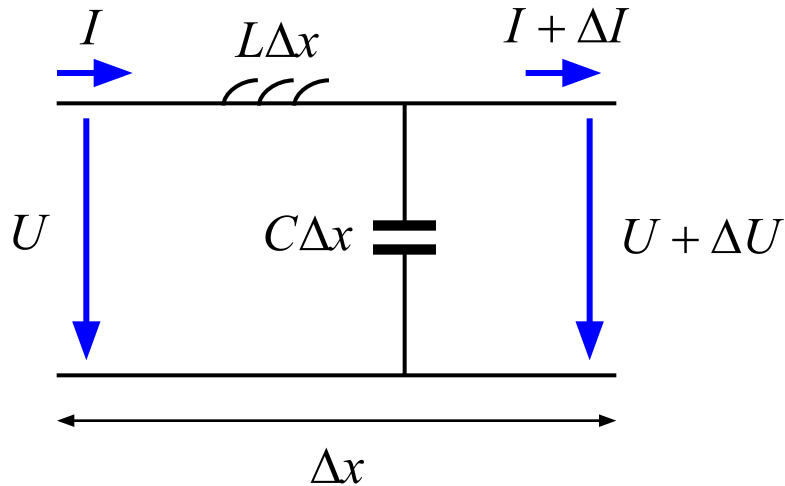


**Коаксиальный кабель**



## Волны вдоль линии

### Эквивалентная схема линии

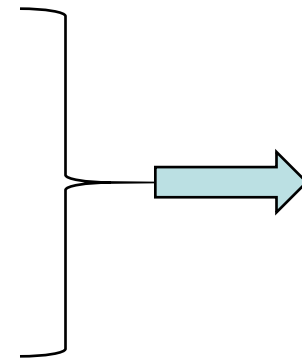


$L$  – индуктивность на ед. длины,  
 $C$  – емкость на ед. длины

$$L: \quad L\Delta x \frac{\partial I}{\partial t} = U - (U + \Delta U) = -\Delta U \quad | : \Delta x \rightarrow 0$$

$$C: \quad q = C\Delta x U, \quad \frac{\partial q}{\partial t} = I_c = -\Delta I$$

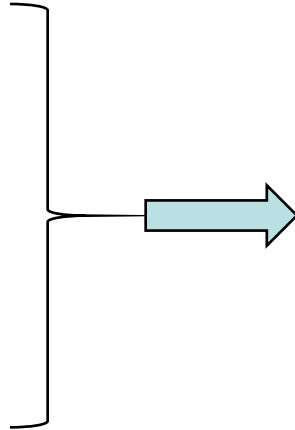
$$-\Delta I = C\Delta x \frac{\partial U}{\partial t} \quad | : \Delta x \rightarrow 0$$



## Волны вдоль линии

$$L \frac{\partial I}{\partial t} = - \frac{\partial U}{\partial x}$$

$$\frac{\partial I}{\partial x} = -C \frac{\partial U}{\partial t}$$



$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0$$


$$\frac{\partial^2 I}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} = 0$$


– волновые  
уравнения

$$v = 1/\sqrt{LC}$$

## Общее решение уравнений

$$U = U_1(t - x/v) + U_2(t + x/v), \quad I = I_1(t - x/v) + I_2(t + x/v)$$

  
правая  
бегущая волна

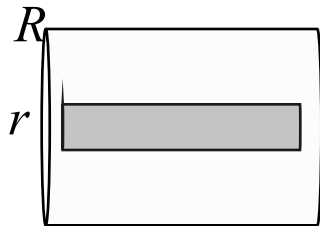
  
левая  
бегущая волна

## Волны вдоль линии

В бегущей волне  $U = \pm ZI$   $\left( \begin{array}{l} \text{“+” – правая волна} \\ \text{“–” – левая волна} \end{array} \right)$

$Z = \sqrt{L/C}$  – волновой импеданс (волновое сопротивление) линии

## Коаксиальный кабель



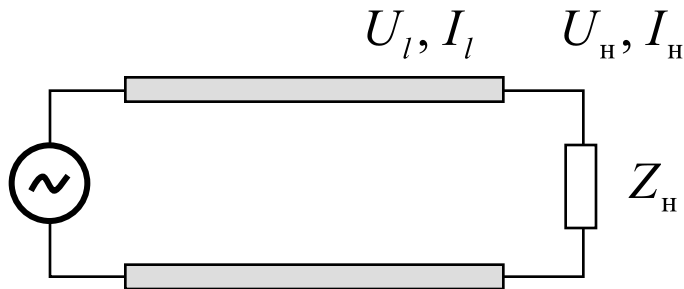
$$C = \frac{2\pi\epsilon\epsilon_0}{\ln(R/r)}, \quad L = \frac{\mu\mu_0}{2\pi} \ln(R/r)$$

$$Z = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\mu\mu_0/\epsilon\epsilon_0} \ln(R/r) = 60\sqrt{\mu/\epsilon} \ln(R/r)$$

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}$$

## Волны вдоль линии

### Согласование линии и нагрузки



#### Граничные условия:

$$U_n = U_l$$

$$I_n = I_l$$

$$U_n = Z_n I_n$$

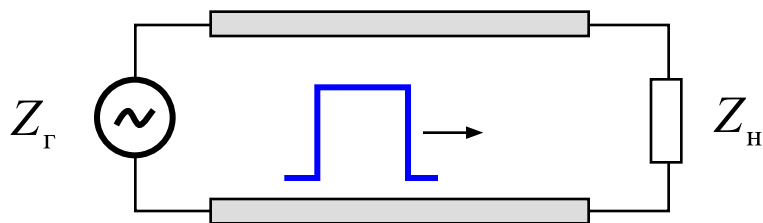
$$U_l^+ = Z_l I_l^+$$

$$U_l^- = -Z_l I_l^-$$

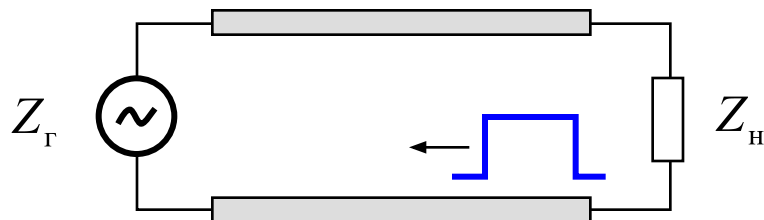
- 1)  $Z_n = Z_l$  – нагрузка и линия согласованы между собой, отражение = 0.  
Вся энергия поглощается  $Z_n$ .
- 2)  $Z_n \neq Z_l$  – нагрузка и линия не согласованы между собой, возникает отражение.



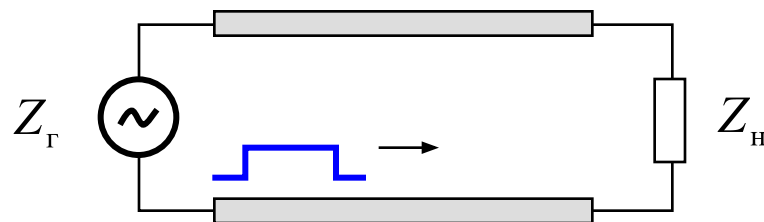
## Волны вдоль линии



Распространение сигнала



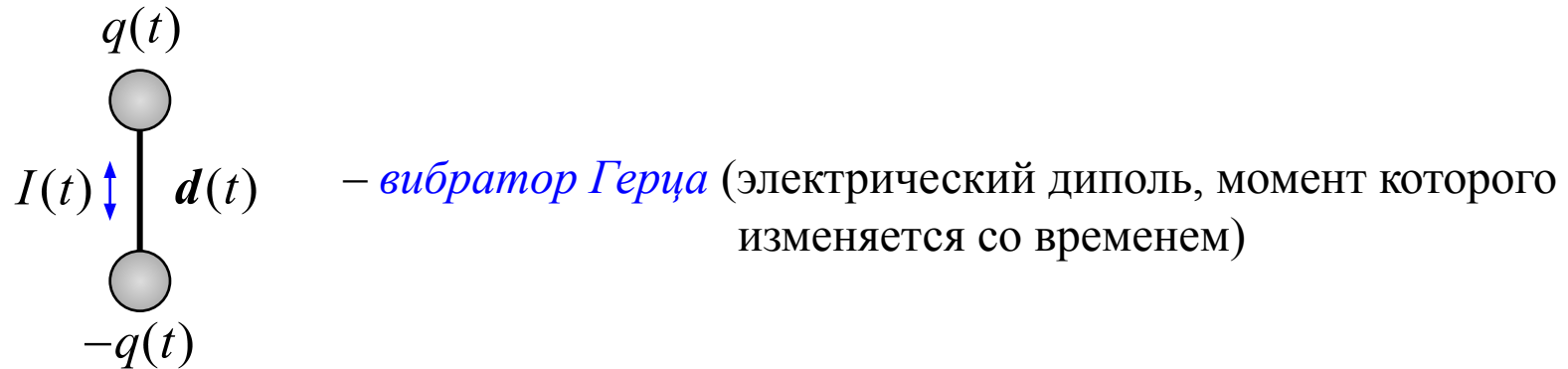
Отражение сигнала  
от нагрузки (при  $Z_{\text{H}} \neq Z_{\Gamma}$ )



Отражение сигнала от генератора  
(при  $Z_{\Gamma} \neq Z_{\Gamma}$ )

Результат многократных отражений – сильное искажение сигнала.

## Излучение электромагнитных волн. Вибратор Герца



### Поле, создаваемое вибратором:

- 1)  $r < \lambda = cT$  – поле, совпадающее с полем статического диполя (электрического и магнитного)
- 2)  $r > \lambda = cT$  – волновая зона,  
 $\mathbf{B}$  лежит в широтных плоскостях,  $\mathbf{E}$  – в меридиальных

## Излучение электромагнитных волн. Вибратор Герца

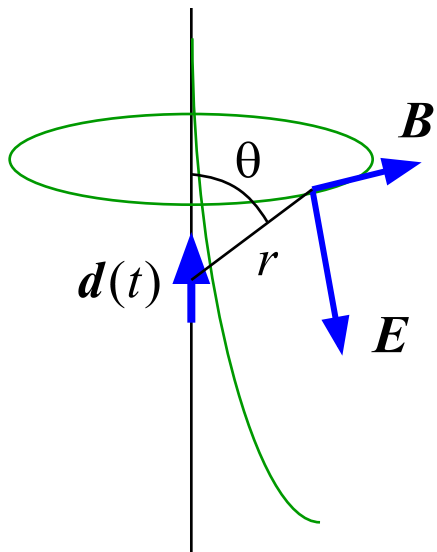
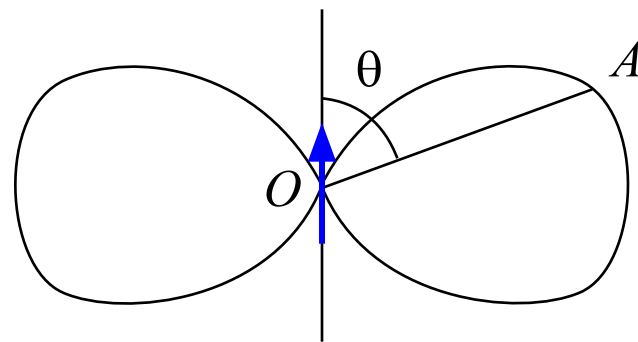


Диаграмма направленности излучения диполя



$$E, B \propto \frac{\sin \theta}{r}$$

$$S \propto \frac{\sin^2 \theta}{r^2}$$

$$S \propto OA$$