МАТРИЧНАЯ АЛГЕБРА

ОПРЕДЕЛЕНИЕ:

МАТРИЦА размера $m \times n$ – ТАБЛИЦА из m строк, n столбцов.

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

a_{ij} – *элемент матрицы*,

i – *номер строки*,

j – *номер столбца*,

a_{ii} – *диагональный элемент*.

Виды матриц

Квадратная матрица $(m = n)$ $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

Диагональная матрица $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -15 & 0 \\ 0 & 0 & 24 \end{pmatrix}$

Единичная матрица $\underset{3\times 3}{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Операции над матрицами

Умножение матрицы на число

$$\lambda \cdot \underset{m\times n}{A} = \underset{m\times n}{B} \quad \Rightarrow \quad b_{ij} = \lambda \cdot a_{ij}$$

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \\ 8 & 12 \end{pmatrix}$$

Сложение матриц

$$\underset{m\times n}{A}+\underset{m\times n}{B}=\underset{m\times n}{C} \quad\Rightarrow\quad c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \\ 8 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 12 \\ 12 & 18 \end{pmatrix}$$

Транспонирование матрицы

$$\left(\underset{m\times n}{A}\right)^T = \left(\underset{n\times m}{B}\right) \quad \Rightarrow \quad b_{ij} = a_{ji}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Умножение матриц

$$\underset{m\times k}{A}\cdot\underset{k\times n}{B}=\underset{m\times n}{C}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ 4 & 6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & 0 & -1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}(1\cdot 1+2\cdot 2)=5 & (1\cdot(-2)+2\cdot 0)=-2 & (1\cdot 3+2\cdot(-1))=1\\ (3\cdot 1+4\cdot 2)=11 & -6 & 5\\ 16 & -8 & 6\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}5 & -2 & 1\\ 11 & -6 & 5\\ 16 & -8 & 6\end{pmatrix}$$

ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ – число, характеризующее квадратную матрицу .

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \det A$$

ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ 1-го ПОРЯДКА

$$\boxed{\text{Если } A = (a_{11}), \text{ то } \det(A) = a_{11}}$$

ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ 2-го ПОРЯДКА

$$\boxed{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}}$$

Пример:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - (-1) \cdot 3 = 11$$

ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ 3-го ПОРЯДКА
(правило треугольника)

$$+ \qquad\qquad\qquad\qquad -$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = (1\cdot 5\cdot 9 + 4\cdot 8\cdot 3 + 2\cdot 6\cdot 7) - (7\cdot 5\cdot 3 + 1\cdot 8\cdot 6 + 2\cdot 4\cdot 9) = 0$$

ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ n-ГО ПОРЯДКА

Минор Mij – определитель матрицы, которая получается из исходной матрицы вычеркиванием строки с номером i и столбца с номером j.

$$M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Алгебраическое дополнение

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$$

Определитель равен сумме произведений элементов любой строки или любого столбца на алгебраические дополнения этих элементов.

ОБРАТНАЯ МАТРИЦА

A^{-1} называется обратной к матрице A, если

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E.$$

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}^T}$$

$$A=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 3 & 4\end{pmatrix}. \quad \text{Найти} \quad A^{-1}.$$

Решение:

$$\begin{vmatrix}2 & 5\\ 3 & 4\end{vmatrix}=-7,$$

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\,|4|=4,$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\,|3|=-3,$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\,|5|=-5,$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\,|2|=2.$$

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}^{T}==\frac{1}{-7}\cdot\begin{pmatrix}4 & -3\\ -5 & 2\end{pmatrix}^{T}=$$

$$=\frac{1}{-7}\cdot\begin{pmatrix}4 & -5\\ -3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{4}{7} & \frac{5}{7}\\ \frac{3}{7} & -\frac{2}{7}\end{pmatrix}$$

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Система из m уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Система называется совместной, если имеет решение.

Система называется несовместной, если не имеет решения.

Совместная система называется определенной, если имеет единственное решение.

Совместная система называется неопределенной, если имеет более одного решения.

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

I.Метод обратной матрицы

$$\boxed{X = A^{-1}B}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} - \text{ основная матрица системы}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} - \text{ столбец неизвестных}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} - \text{ столбец свободных коэффициентов}$$

$$\textit{Решить методом обратной матрицы} \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = -1 \\ 3x_1 + 4x_2 = 2 \end{cases}$$

Решение :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{7} & \frac{5}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}B \Rightarrow X = \begin{pmatrix} -\frac{4}{7} & \frac{5}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

II. Формулы Крамера

$$\boxed{x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad i = 1, \ldots, n}$$

где Δ *– определитель основной матрицы системы,*

Δ_i *– определитель матрицы, полученной из основной матрицы системы заменой* i *– того столбца столбцом свободных коэффициентов.*

Если $\Delta = \Delta_i = 0$ *для любого* $i \Rightarrow$ *система неопределенная.*

Если $\Delta = 0$ *и хотя бы один* $\Delta_i \neq 0 \Rightarrow$ *система несовместная.*

Решить систему методом Крамера

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -2$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -3 \Rightarrow x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 1{,}5$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 0$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \Rightarrow x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = -0{,}5$$

I.Метод Гаусса.

1 шаг (прямой ход): приведение расширенной матрицы системы с помощью тождественных преобразований к треугольному виду.

2 шаг (обратный ход): последовательное нахождение неизвестных.

ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ РАСШИРЕННОЙ МАТРИЦЫ СИСТЕМЫ

✔Изменение порядка строк.

✔Прибавление к элементам одной строки элементов другой строки, умноженных на число.

Пример

Решить систему методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \times(-2) \quad \times(-1) \\ + \\ + \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \times(-3) \\ + \end{array} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 & \Rightarrow x_1 = 1{,}5 \\ 0x_1 - x_2 + 0x_3 = 0 & \Rightarrow x_2 = 0 \\ 0x_1 + 0x_2 + 2x_3 = -1 & \Rightarrow x_3 = -0{,}5 \end{cases}$$

Если в процессе преобразований получилась строка, в которой последний элемент отличен от нуля, а все остальные – нулевые, то система несовместна, т.е. нет решений.

Решение неопределенной системы (на примере)

Решить систему $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 5; \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 20; \\ 2x_1 - 4x_2 - 2x_3 + 6x_4 = 10. \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 20 \\ 2 & -4 & -2 & 6 & 10 \end{pmatrix} \begin{matrix} (-2) \quad (-2) \\ + \\ + \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 5 & 2 & -5 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Если количество ненулевых строк меньше количества неизвестных, то система неопределенная.

Количество неизвестных = 4, количество ненулевых строк = 2, следовательно, система имеет бесконечно много решений.

***Общим решением** неопределенной системы линейных уравнений называется выражение базисных переменных через свободные.*

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 5 & 2 & -5 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 5; \\ 5x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 10 \end{cases}$$

Количество базисных переменных равно количеству ненулевых строк после преобразований.

За базисные переменные принимаем переменные соответствующие ненулевым диагональным элементам.

В данном случае, базисные: x_1 и x_2 .
Остальные переменные - свободные.

Выразим базисные переменные x_1 и x_2 через свободные x_3 и x_4:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 5; \\ 5x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 10 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 5 + 2\cdot\left(2 - \frac{2}{5}x_3 + x_4\right) + x_3 - 3x_4; \\ x_2 = 2 - \frac{2}{5}x_3 + x_4. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 9 + \frac{1}{5}x_3 - x_4; \\ x_2 = 2 - \frac{2}{5}x_3 + x_4. \end{cases}$$

Присваивая свободным переменным различные значения, получим **частные** решения.

Найдем одно из частных решений

$$x_3 = 0;\ x_4 = 0;\ x_1 = 9;\ x_2 = 2.$$

Таким образом, метод Гаусса может использоваться для доказательства несовместности и неопределенности системы линейных уравнений.