

Лекция 30. Скалярное поле. Поверхности и линии уровня. Градиент скалярного поля, Производная по направлению. Векторное поле. Векторные линии. Поток векторного поля через поверхности, его физический смысл. Вычисление потока. Формула Остроградского. Дивергенция векторного поля.

§ 1. Скалярные и векторные поля.

Определение. (скалярного поля). Если в трехмерном пространстве определена функция $u(x,y,z)$, то говорят, что задано скалярное поле $u(x,y,z)$.

Замечание. Другими словами говоря, задание скалярного поля означает, что каждой точке $M(x,y,z)$ поставлено в соответствие число, которое является значением функции u в точке M .

Пример. (скалярного поля). Если в начало координат поместить заряд Q , то в каждой точке пространства определена функция

$$\varphi(x, y, z) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r},$$

где: $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ - расстояние от точки до начала координат; φ - потенциал,

ε_0 – диэлектрическая постоянная вакуума.

Задание функции φ задает скалярное поле потенциала.

Определение. (векторного поля). Говорят, что в трехмерном пространстве задано векторное поле

$$V = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$$

Замечание. В этом случае каждой точке пространства $M(x, y, z)$ ставится в соответствие вектор V в точке $M(x, y, z)$.

Для скалярных и векторных полей вводится понятие поверхностей уровня.

Определение. (поверхностей уровня). Пусть задано скалярное поле $u(x, y, z)$. Поверхностью уровня данного скалярного поля, называется поверхность, задаваемая уравнением

$$u(x, y, z) = \text{const.}$$

Пример. (поверхности уровня). Если в начало координат поместить заряд Q , то имеем скалярное поле потенциала

$$\varphi(x, y, z) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

Поверхностью уровня является поверхность:

$$\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = c,$$

где: $c = const.$

$$x^2 + y^2 + z^2 = \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 c} \right)^2 - \text{сфера}$$

Такие поверхности называются *эквипотенциальными*.

Определение. (векторной линии). Пусть в трехмерном пространстве задано векторное поле $V = P(x, y, z)i + Q(x, y, z)j + R(x, y, z)k$. Векторной линией заданного векторного поля называется линия, в каждой точке которой вектор касательной совпадает по направлению с вектором V .

Замечание. Уравнение векторных линий можно находить по формуле:

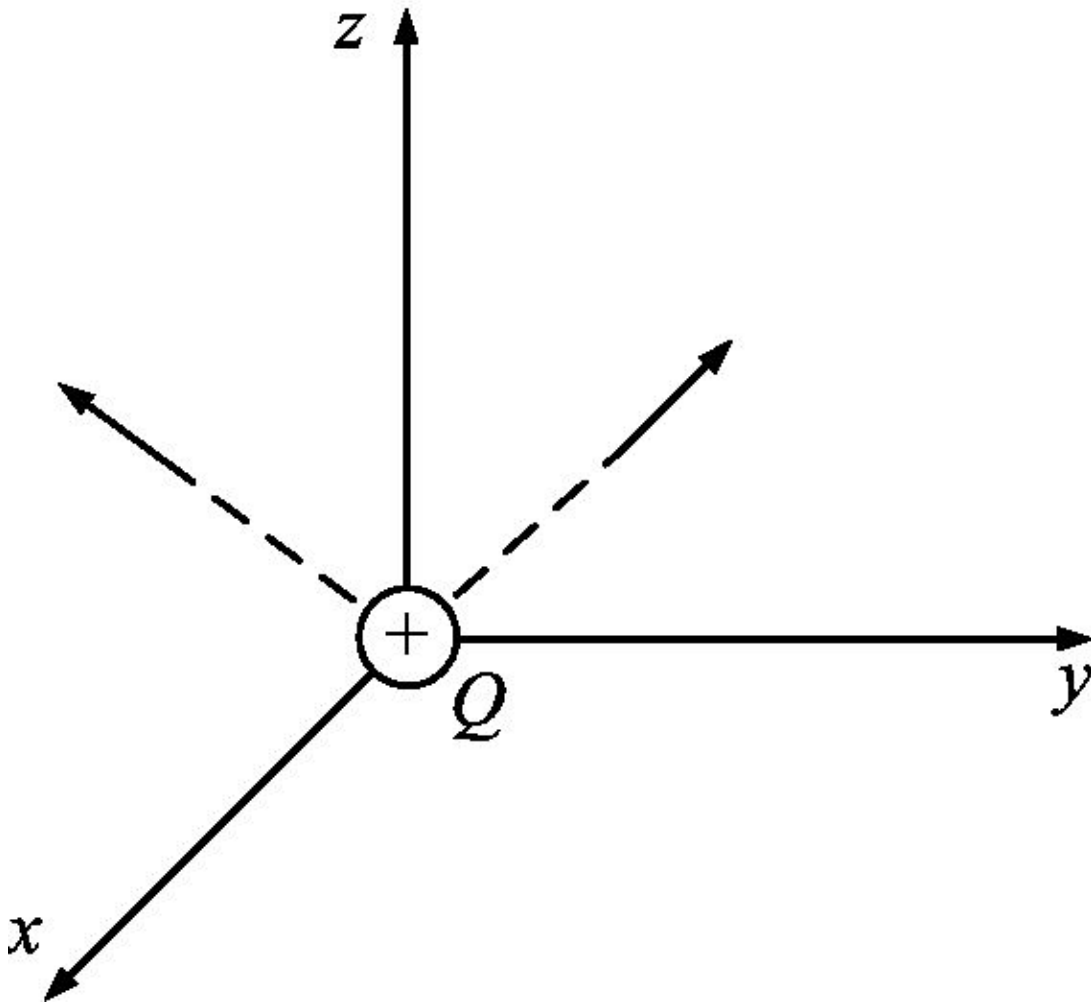
$$\frac{dx}{P(x, y, z)} = \frac{dy}{Q(x, y, z)} = \frac{dz}{R(x, y, z)}$$

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q}; \quad \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$$

Пример.

Напряженность поля можно определить путем внесения пробного электрического заряда в любую точку поля.

Векторные и скалярные поля связаны между собой.

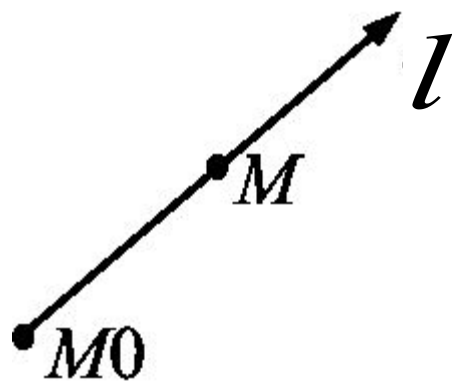


$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \cdot \vec{r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left(\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \vec{i} + \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \vec{j} + \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \vec{k} \right)$$

§ 2. Производная по направлению.

Ее вычисление.

Пусть задано скалярное поле u , где u — дифференцируемая функция. Возьмем в трехмерном пространстве вектор l , расположенный в этом скалярном поле. Пусть



начало вектора l характеризует точку M_0 . Возьмем на векторе l соседнюю точку M . Точка M как и M_0 находится в скалярном

поле u . Поэтому имеет смысл приращение скалярного поля u в точке M_0 , выраженное формулой: $\Delta u(M_0) = u(M) - u(M_0)$

Df. (производной по направлению): если существует конечный предел отношения приращения скалярного поля

$$\Delta u(M_0) = u(M) - u(M_0)$$

к длине вектора, M_0M т.е. к $\left| \overrightarrow{M_0M} \right|$, то этот предел называется производной скалярного поля u по направлению l и обозначается:

$$\frac{\partial u}{\partial e}(M_0) = \lim_{|M_0M| \rightarrow 0} \frac{u(M) - u(M_0)}{\left| \overrightarrow{M_0M} \right|} = \lim_{|M_0M| \rightarrow 0} \frac{\Delta u(M_0)}{\left| \overrightarrow{M_0M} \right|}$$

Чтобы вычислить производную по направлению, пользуются теоремой:

Th.: (о вычислении производной по направлению).

Если скалярное поле $u(x,y,z)$ дифференцируемо в каждой точке некоторой области V , то производная по направлению в каждой точке V существует и она выражается формулой:

$$\frac{\partial u}{\partial l}(M_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(M_0) \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y}(M_0) \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z}(M_0) \cos \gamma$$

где α, β, γ – углы определенные в любой точке области V , которые составляет вектор l с координатными осями.

Док-во: т.к. скалярное поле u дифференцируется в области V , значит, в любой окрестности точки $M_0 \in V$ существует приращение скалярного поля, находимого по формуле:

$$\Delta u(M_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(M_0)\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}(M_0)\Delta y + \\ + \frac{\partial u}{\partial z}(M_0)\Delta z + \alpha_1\Delta x + \alpha_2\Delta y + \alpha_3\Delta z$$

здесь $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ – бесконечно малые функции в точке M_0 , которые стремятся к 0, когда

$$\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2} \rightarrow 0$$

$\Delta x, \Delta y, \Delta z$ - это проекции вектора $\left| \overrightarrow{M_0 M} \right|$, совпадающего по направлению с вектором \vec{z} на координатные оси.

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \quad - \text{частные производные.}$$

Разделим левую и правую части на длину вектора $\left| \overrightarrow{M_0 M} \right| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$

После чего получаем:

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta u(M_0)}{|\overrightarrow{M_0M}|} &= \frac{\partial u}{\partial x}(M_0) \cdot \frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}} + \frac{\partial u}{\partial y}(M_0) \cdot \frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}} + \\
&+ \frac{\partial u}{\partial z}(M_0) \cdot \frac{\Delta z}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}} + \alpha_1 \cdot \frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}} + \\
&+ \alpha_2 \cdot \frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}} + \alpha_3 \cdot \frac{\Delta z}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}} \quad (2)
\end{aligned}$$

Перейдем к пределу в выражении (2) при $|\overrightarrow{M_0M}| \rightarrow 0$

Заметим, что $\lim_{|\overrightarrow{M_0M}| \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}} = \cos \alpha$

Если заменить Δx на Δy и Δx на Δz , то в пределе получим $\cos \beta$ и $\cos \gamma$.

Значит, в пределе, учитывая, что

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \rightarrow 0$ при $|\overrightarrow{M_0M}| \rightarrow 0$ имеем:

$$\lim_{|\overrightarrow{M_0M}| \rightarrow 0} \frac{\Delta u(M_0)}{|\overrightarrow{M_0M}|} = \frac{\partial u}{\partial x}(M_0) \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y}(M_0) \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z}(M_0) \cos \gamma + 0 \cdot \cos \alpha + 0 \cdot \cos \beta + 0 \cdot \cos \gamma \quad (3)$$

Так как предел правой части (2) существует и выражается правой частью формулы (3), то и предел левой части формулы (3) существует. Он равен производной скалярного поля по направлению. Значит, производная скалярного поля u по направлению l выражается формулой:

$$\frac{\partial u}{\partial l}(M_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(M_0)\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}(M_0)\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}(M_0)\cos\gamma \quad (4)$$

Что и требовалось доказать.

Замечание: Производная скалярного поля по направлению вектора \vec{l} выражает скорость возрастания или убывания скалярного поля по направлению вектора \vec{l} , если:

$\frac{\partial u}{\partial l}(M_0) > 0$ - поле возрастает

$\frac{\partial u}{\partial l}(M_0) < 0$ - поле убывает.

Вычисление скалярного поля производится по формуле (4).

Пример: на практике.

§ 3. Градиент скалярного поля. Связь скалярных и векторных полей. Свойства градиента.

Определение. (градиента). Градиентом дифференцируемого скалярного поля называется вектор

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{k}$$

Замечание. На практике встречаются равносильные обозначения градиента:

$$\operatorname{grad} u \Leftrightarrow \nabla u,$$

где: ∇ - оператор «Набла».

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

Определение градиента привязано к декартовой системе координат. Покажем связь скалярных и векторных полей.

Пусть задано скалярное поле $u(x,y,z)$, дифференцируемое в некотором V .

\vec{l} -произвольный вектор $\in V$. По определению:

$$\text{grad}u = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k}$$

Но эта запись означает, что скалярному полю u с помощью grad поставлено в соответствие векторное поле $\text{grad}u$. Что и говорит о том, что скалярное и векторное поле связаны между собой.

Вспомним, что скалярное произведение 2-х векторов вычисляется по формуле:

$$(\vec{a} \cdot \vec{b}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

Найдем скалярное произведение градиента поля u и вектора \vec{l}_0 получим:

$$(\text{gradu} \cdot \vec{l}_0) = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma$$

\vec{l}_0 - произвольный единичный вектор $\in V$.

В правой части производная по направлению:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = (\text{gradu} \cdot \vec{l}_0)$$

По этой формуле можно вычислять производную по направлению, зная градиент.

Учитывая, что:

$$\begin{aligned}(\operatorname{grad} u \cdot \vec{l}_0) &= |\operatorname{grad} u| \cdot |\vec{l}_0| \cos |\operatorname{grad} u \cdot \vec{l}_0| = \\ &= |\operatorname{grad} u| \cos |\operatorname{grad} u \cdot \vec{l}_0| = \text{проекция}_l \operatorname{grad} u = \\ &= \frac{\partial u}{\partial l} = \text{д}_l \operatorname{grad} u\end{aligned}$$

Df. (инвариантное определение градиента, не зависящего от системы координат).

Градиентом скалярного поля u называется вектор, обозначенный $\operatorname{grad} u$, проекция которого

на произвольное направление вектора \vec{l} равна производной скалярного поля по направлению этого вектора \vec{l} .

Свойства градиента:

1. Градиент дифференцируемого скалярного поля $u(x,y,z)$ перпендикулярен к поверхности уровня этого скалярного поля (совпадает с нормалью) и направлен в сторону возрастания скалярного поля.

$$2. \text{grad}(c_1 u_1 + c_2 u_2) = c_1 \text{grad} u_1 + c_2 \text{grad} u_2,$$

$$c_1, c_2 = \text{const};$$

u_1, u_2 – скалярные поля.

$$3. \text{grad}(u_1 \cdot u_2) = u_2 \text{grad} u_1 + u_1 \text{grad} u_2.$$

$$4. \operatorname{grad} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \frac{u_2 \operatorname{grad} u_1 - u_1 \operatorname{grad} u_2}{u_2^2}$$

5. Если задано скалярное поле $F(u(x,y,z))$, то градиент:

$$\operatorname{grad} F(u(x,y,z)) = F'_u \cdot \operatorname{grad} u.$$

§ 4. Применение градиента для вычисления нормали к поверхности.

Для поля $u(x,y,z)$ введем понятие градиента:

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k}$$

Если имеется уравнение поверхности $u(x,y,z) = 0$, это означает, что задана поверхность уровня скалярного поля $u(x,y,z)$.

Так как градиент скалярного поля направлен по нормали к поверхности уровня, то единичный вектор нормали к поверхности можно найти по формуле:

$$\vec{n}_{\pm} = \pm \frac{\text{gradu}}{|\text{gradu}|}$$

Пример. На практике

Поток.

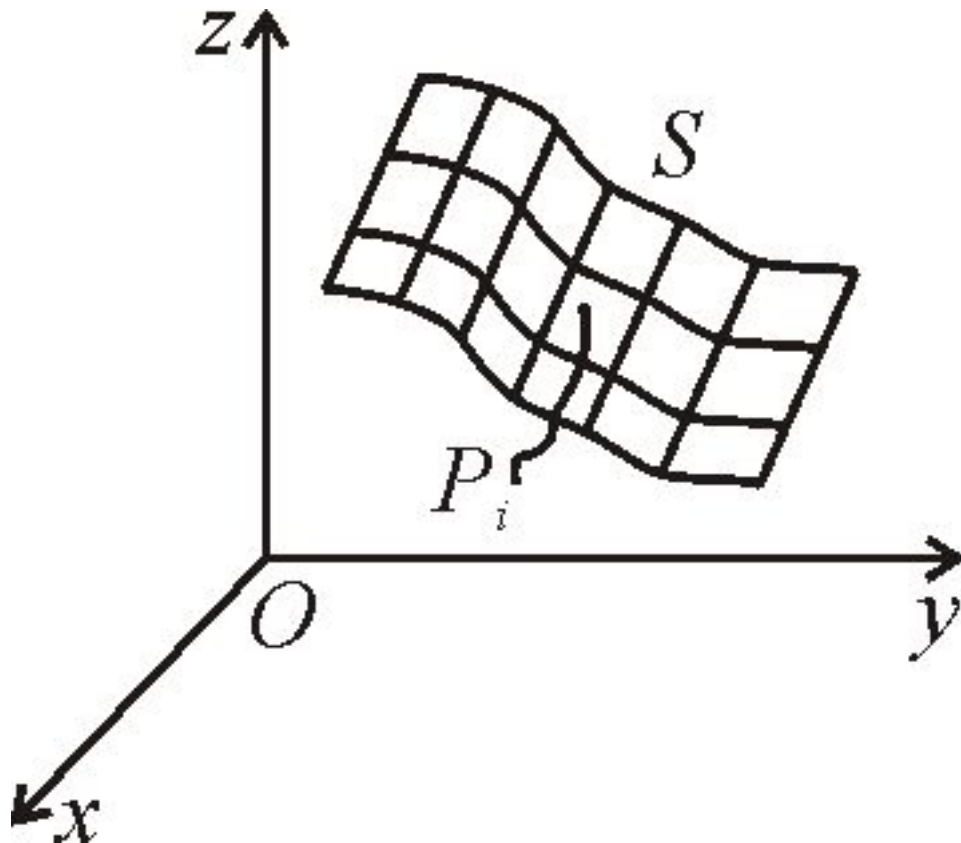
§ 5. Задача, приводящая к понятию потока векторного поля.

Пусть в трехмерном пространстве имеется ориентируемая поверхность S и векторное поле, задаваемое формулой:

$$\vec{V} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$$

Считаем, что векторное поле \vec{V} в каждой точке векторного пространства задает поле скоростей жидкости. Попробуем найти количество жидкости, которое протекает через поверхность S в направлении нормали.

Для этого возьмем в трехмерном пространстве поверхность S и разобьем ее на маленькие кусочки S_1, S_2, \dots, S_n с площадями $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n$. В каждом из кусочков выберем точки P_1, P_2, \dots, P_n , в которых найдем значение

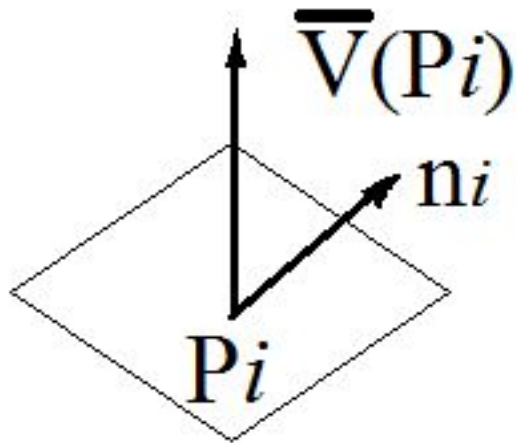


скорости жидкости:
 $\vec{V}(P_1), \vec{V}(P_2), \dots, \vec{V}(P_n)$

и нормали к
 поверхности S :

$\vec{n}_1, \vec{n}_2, \dots, \vec{n}_n$

Найдем количество жидкости, которое протекает через участок S_i в единицу времени в направлении нормали.



$$(\overline{V}(P_i) \cdot \mathbf{n}_i) \cdot \Delta S_i$$

Численно это значение равно объему параллелепипеда, построенного на S_i как на основании с высотой

$$|\overline{V}_i| \cdot \cos(\overline{V}_i, \mathbf{n}_i)$$

Если сложить объемы всех маленьких параллелепипедов, то количество жидкости, протекающее через поверхность S , обозначаемое Q равно:

$$Q \approx \sum_{i=1}^n (V(P_i) \cdot n_i) \cdot \Delta S_i$$

При таком приближенном вычислении количество жидкости зависит от способа разбиения и выбора точек P_i .

В физике величина не зависит. Считаем, если существует конечный предел

$$\lim_{\max d_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (V(P_i) \cdot n_i) \cdot \Delta S_i$$

то он и будет выражать значение количества жидкости, протекающей через поверхность S . Вспоминая, если предел существует, то он называется поверхностным интегралом 1-го рода.

$$Q = \iint_S (\vec{V} \cdot \vec{n}) dS$$

Количество жидкости, протекающей через поверхность S равно поверхностному интегралу 1-го рода от скалярного произведения скорости на единичный вектор нормали к поверхности.

Для того, чтобы количественно описать векторы, электростатического, электромагнитного поля вводится понятие потока.

Определение (потока).

Потоком векторного поля $\vec{a} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ называется число, обозначаемое буквой Π и вычисляемое как:

$$\Pi = \iint_S (\vec{a} \cdot \vec{n}) dS$$

Примечание: в случае жидкости поток равен количеству жидкости, протекающей через поверхность.

§ 6. Вычисление потока.

Если задано векторное поле \vec{a} ,
 $\vec{a} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ и задана поверхность S ,
нормаль к которой может быть вычислена:

$$\vec{n} = \pm \frac{\text{grad}U}{|\text{grad}U|}$$

то поток через эту поверхность S может быть вычислен по определению

$$\Pi = \iint_S (\vec{a} \cdot \vec{n}) dS$$

При этом поверхность S должна быть однозначно проектируемой на одну из координатных плоскостей. В этом случае поверхностный интеграл по поверхности S сводится к интегралу по области проектирования поверхности S

Второй способ вычисления потока называется методом проектирования на координатной плоскости. Чтобы получить формулы, заметим, что нормаль к поверхности может быть представлена:

$$\vec{n} = \cos \alpha \vec{i} + \cos \beta \vec{j} + \cos \gamma \vec{k}$$

где α, β, γ - углы которые составляет нормаль с координатными осями.

Тогда, в силу определения скалярного произведения, имеем:

$$(\vec{a} \cdot \vec{n}) = P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma$$

Поток через поверхность S равен

$$\Pi = \iint_S [P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma] dS$$

Пользуясь аддитивностью интеграла

$$\Pi = \iint_S P \cos \alpha dS + \iint_S Q \cos \beta dS + \iint_S R \cos \gamma dS$$

Предполагая, что поверхность S однозначно проектируется на координатные оси имеем:

$$\Pi = \iint_S P dydz + \iint_S Q dzdx + \iint_S R dx dy$$

Поверхностные интегралы 2 рода вычисляются с учетом области проектирования на координатную плоскость. Для вычисления потока методом проектирования на координатные плоскости имеем

$$\begin{aligned} \Pi = & \pm \iint_{D_1} P(x(y, z), y, z) dydz \pm \\ & \pm \iint_{D_2} Q(x, y(x, z), z) dx dz \pm \iint_{D_3} R(x, y, z(x, y)) dx dy \end{aligned}$$

Знаки \pm берутся с учетом того, какой угол составляет нормаль к поверхности для 1-го интеграла с осью x , для 2-го с осью y , для 3-го с осью z .

Замечание: В том случае если поток через замкнутую поверхность > 0 , то внутри замкнутой поверхности есть источник. Если поток < 0 , то внутри поверхности находится сток.

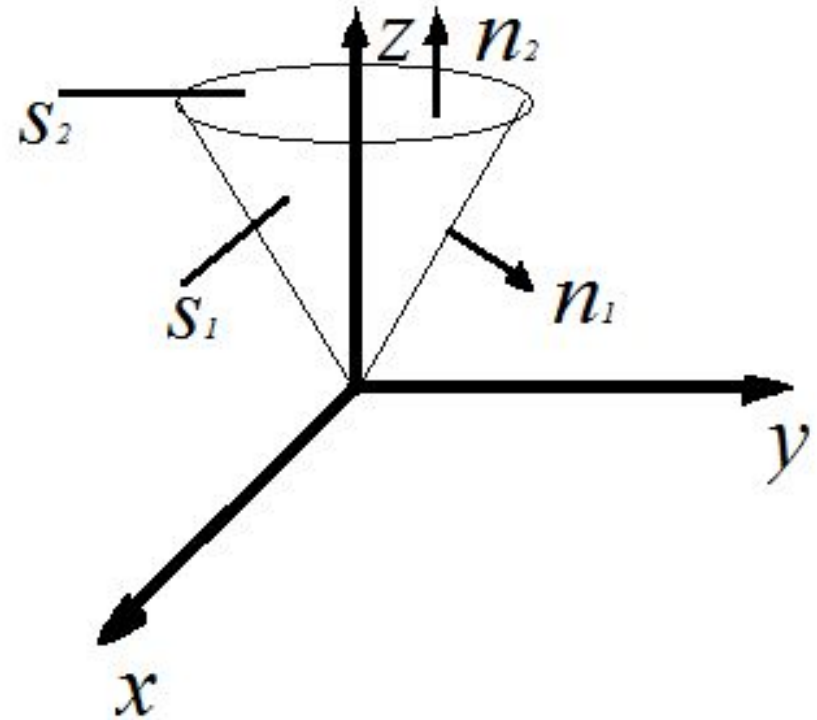
Если поток $= 0$, то говорят, что количество вещества втекающего в поверхность $=$ количеству вещества вытекающего из нее.

Пример: пусть дано векторное поле
найти поток через внешнюю
поверхность конуса

$$S: \begin{cases} z = \sqrt{x^2 + y^2} \\ z = 2 \end{cases}$$

$$\vec{n}_2 \parallel z$$

\vec{n}_1 составляет тупой угол с осью z .



Поток через всю поверхность $S: \ddot{I}_S = \ddot{I}_{S_1} + \ddot{I}_{S_2}$

$$\Pi_{S_2} = \iint_{S_2} (\overset{\boxtimes}{a} \cdot \overset{\boxtimes}{n}_2) dS = \left\{ \begin{array}{l} \overset{\boxtimes}{a} = x\overset{\boxtimes}{i} + y\overset{\boxtimes}{j} \\ \overset{\boxtimes}{n}_2 = 1\overset{\boxtimes}{k} \end{array} \right\} = 0$$

§ 7. Формула Остроградского.

Пусть в трехмерном пространстве задана область V , такая что:

- 1) Ориентированная внешней нормалью.
- 2) Имеющая кусочно-гладкую поверхность S .
- 3) В области V и на её границе S функции $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ непрерывны вместе со своими частными производными

$$\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Тогда справедлива формула Остроградского:

$$\begin{aligned} \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \\ = \iint_S P dy dz + Q dz dx + R dx dy \end{aligned}$$

Поверхность S замкнутая.

Доказательство. *Самостоятельно.*

Формула Остроградского применима только в случае замкнутых поверхностей.

Если поверхность S ориентирована внешней нормалью, в формуле берется знак «+», если внутренней «-» перед поверхностным интегралом.

§ 8. Векторная запись теоремы Остроградского.

Пусть в 3-х мерном пространстве задано
векторное поле

$$\vec{a} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$$

где P, Q, R интегрируемы вместе со своими
производными.

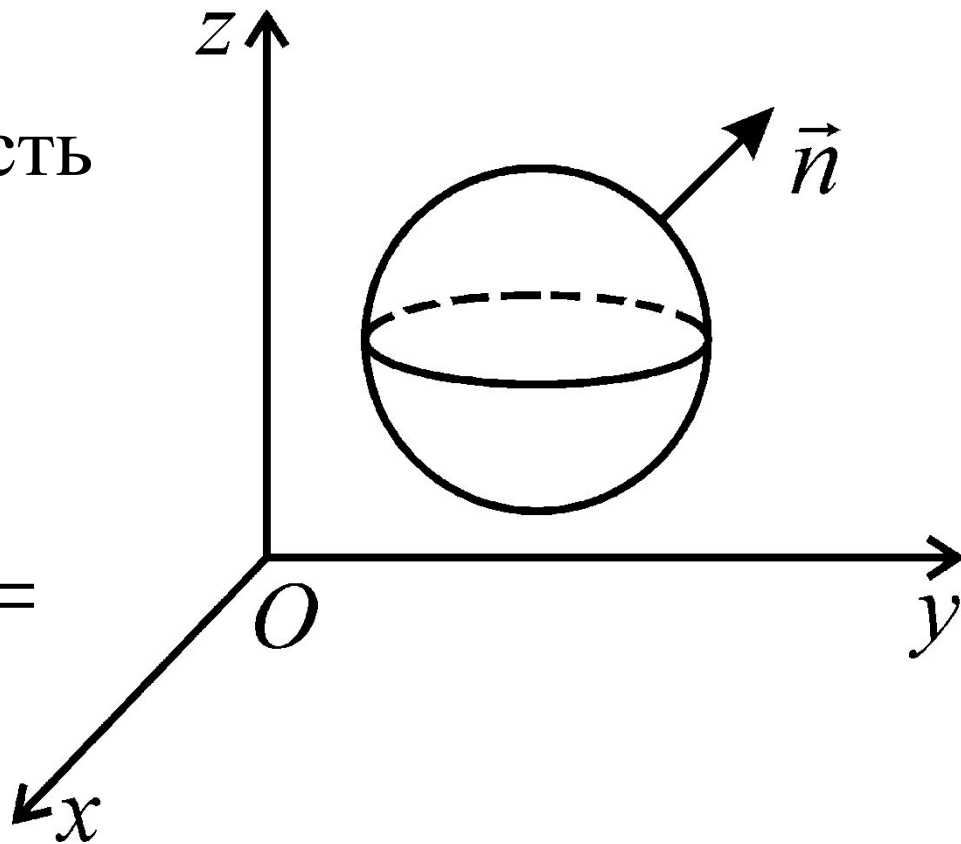
Пусть в пространстве задана замкнутая
гладкая поверхность, ориентируемая
внешней нормалью \vec{n} .

Поток через поверхность S можно вычислить по формуле:

$$\Pi = \iint_S (\vec{a} \cdot \vec{n}) ds =$$

$$= \iint_S P dydz + Q dzdx + R dx dy \quad (1)$$

Так как S - замкнутая, гладкая, ориентированная, а функции P, Q, R удовлетворяют условиям теоремы Остроградского, имеем:



$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dV = \iint_S P dydz + Q dzdx + R dx dy \quad (2)$$

Сравнивая правые части формул (1) и (2) и

вспомогая что
$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \operatorname{div} \vec{a}$$

имеем:
$$\iint_S (\vec{a} \cdot \vec{n}) ds = \iiint_V \operatorname{div} \vec{a} dV$$

- векторная запись теоремы Остроградского.

Поток векторного поля через замкнутую поверхность = \iiint_V по объему от этой поверхности, от дивергенции векторного поля.

Пример: $\vec{a} = xi + yj$

Поток векторного поля через поверхность неизвестен.

$$S: \begin{cases} z = \sqrt{x^2 + y^2} \\ z = 2 \end{cases}$$

нормаль внешняя

S - замкнутая поверхность – это боковые поверхности конуса и плоскость $z = 2$.

Найдем заранее: $\operatorname{div} \vec{a} = 1 + 1 + 0 = 2$

$$\Pi_S = \iint_S (\vec{a} \cdot \vec{s}) ds = \iiint_V \operatorname{div} \vec{a} dV = 2 \iiint_V dV = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 4 \cdot 2 = \frac{16\pi}{3}$$

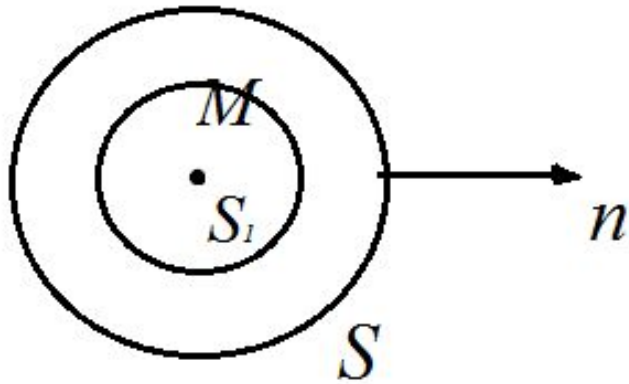
Замечание: из материала, приведенного выше ясно, что скалярным полям можно поставить в соответствие векторные поля, а векторным- скалярные. Если дано скалярное поле $U(x,y,z)$ то с помощью операций $gradU$ скалярному полю можно ставить в соответствие векторное поле. Если есть векторное поле \vec{a} , то с помощью $div \vec{a}$ можно поставить в соответствие векторному полю скалярное поле.

§ 9. Дивергенция векторного поля, ее вычисление.

В векторном поле \vec{a} возьмем замкнутую поверхность S с внешней нормалью \vec{n} . Можем получить характеристику поля, называемую потоком, воспользовавшись формулой:

$$\Pi = \iint_S (\vec{a} \cdot \vec{n}) dS$$

Если взять поверхность S_1 , то поток будет другим, чем через поверхность S , и понятие потока отражает количественную характеристику векторного поля при наличии некоторой поверхности, и зависит не только от векторного поля но и от поверхности.



В некоторых задачах необходимо знать характеристики векторного поля в каждой точке, независимо от выбора поверхности S . Если разделить поток на объем поверхности:

$$\frac{\Pi_S}{V_S} = \frac{\iint_S (\vec{a} \cdot \vec{n}) dS}{V_S} -$$

средняя плотность потока через поверхность S .

Если поверхность S стягивать в точку и предполагать что существует предел такого отношения, то получим плотность потока в точке.

Эту характеристику по определению называют дивергенцией векторного поля.

Определение. (дивергенции)

Если существует конечный предел отношения потока векторного поля через замкнутую поверхность S к V ,

содержащемся внутри этой поверхности, при стягивании поверхности S в точку, этот предел называется дивергенцией векторного поля в точке и обозначается:

$$\operatorname{div} \vec{a}(M) = \lim_{S \rightarrow M} \frac{\iint_S (\vec{a} \cdot \vec{n}) dS}{V_S}$$

Физический смысл дивергенции - плотность потока векторного поля.

Если $\operatorname{div} > 0$, то в точке - источник,

если < 0 , то сток,

если $= 0$, то ничего не находится

Теорема. (о вычислении дивергенции)

Если в 3-х мерном пространстве задано

векторное поле

$$\vec{a} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$$

где P, Q, R непрерывны вместе со своими производными

$$\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial z}$$

в некоторой области V , то в каждой точке этой области дивергенция может быть вычислена по формуле

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

Доказательство:

$$\text{По определению: } \operatorname{div} \vec{a} = \lim_{S \rightarrow M} \frac{\iint_S (\vec{a} \cdot \vec{n}) dS}{V_S}$$

$$\iint_S (\vec{a} \cdot \vec{n}) dS = \iint_S P dydz + Q dzdx + R dx dy$$

Так как поверхность S замкнутая, то применяя формулу Остроградского имеем:

$$\iint_S P dydz + Q dzdx + R dx dy = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dV$$

Значит, дивергенция поля может быть записана

$$\operatorname{div} a \boxtimes = \lim_{S \rightarrow M} \frac{\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dV}{V_S}$$

Частные производные непрерывны, значит к тройному интегралу применима теорема о среднем.

$$\operatorname{div} a \boxtimes = \lim_{S \rightarrow M} \frac{\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right)_{M^*} \cdot V_S}{V_S}$$

Частные производные непрерывны, необходимо учитывать, что поверхность S стягивается в точку M , можно записать, что $M^* \rightarrow M$ и перейти к пределу под знаком непрерывной функции, после чего получим:

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{\partial P}{\partial x}(M) + \frac{\partial Q}{\partial y}(M) + \frac{\partial R}{\partial z}(M)$$