Лекция 31. Линейный интеграл в векторном поле, его свойства. Работа силового поля. Циркуляция векторного поля, ее гидродинамический смысл и вычисление. Формула Стокса. Ротор векторного поля, его физический смысл. Плотность циркуляции. Безвихревое поле, потенциальное поле. Оператор Гамильтона, его свойства. Оператор Лапласа.

§ 1. Линейный интеграл в векторном поле. Циркуляция векторного поля.

Пусть в 3-х мерном пространстве задано векторное поле,

$$\vec{a} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$$

где P,Q,R интегрируемы вместе со своими производными. Пусть в пространстве задана гладкая ориентированная кривая AB.

В силу гладкости в каждой точке *AB* существует единственный вектор касательной, $\vec{\tau}$ который может быть записан следующим образом:

$$\vec{\tau} = \cos\alpha \vec{i} + \cos\beta \vec{j} + \cos\gamma \vec{k}$$

α, β, γ - углы которые составляет вектор $\vec{\tau}$ с осями координат.

Считаем, что дуга AB задана параметрически:

$$AB: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

$$a \le t \le b$$

Тогда для координат единичного вектора касательной имеем:

$$\cos\alpha = \pm\frac{x'_t}{\sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2 + (z'_t)^2}}$$

$$\cos\beta = \pm\frac{y'_t}{\sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2 + (z'_t)^2}}$$

$$\cos\gamma = \pm\frac{z'_t}{\sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2 + (z'_t)^2}}$$

где $\pm$ соответствуют ориентации вектора $\vec{\tau}$ совпадающего с ориентацией дуги *AB*, и не совпадающей с ориентацией дуги соответственно.

Длина элемента дуги может быть найдена по формуле $dl = \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2}\,dt$

Рассмотрим в каждой точке дуги AB скалярное произведение $(\vec{a} \cdot \vec{\tau})$

$$(\vec{a} \cdot \vec{\tau}) = P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma$$

Скалярное произведение представляет собой непрерывную по координатам x,y,z функцию. Из непрерывности скалярного произведения следует что существует:

$$\int\limits_{AB} (\vec{a} \cdot \vec{\tau})\,dl$$

Этот интеграл называется **линейным интегралом** в векторном поле.

Смысл интеграла:

Пусть по дуге *AB* от действия вектора силы $\vec{a}$ движется материальная точка единичной массы. Скалярное произведение $\left(\vec{a}\cdot\vec{\tau}\right)=\text{ïð}_{\tau}\vec{a}$

есть проекция вектора $\vec{a}$ на единичный вектор касательной.

Если проекция $np_{\tau}\vec{a}\cdot dl=dA$ получим элементарную работу, совершенную силой $\vec{a}$ на перемещении *dl* в направлении вектора $\vec{\tau}$.

Чтобы найти полную работу, необходимо проинтегрировать по всей длине дуги AB:

$$A = \int_{AB} np_{\vec{\tau}}\vec{a}\,dl = \int_{AB} (\vec{a}\cdot\vec{\tau})\,dl$$ - полная работа.

Смысл линейного интеграла - работа, совершенная эти полем.

<u>Определение.</u> (циркуляции векторного поля). Если существует в векторном поле $\vec{a}$ линейный интеграл по ориентированному замкнутому контуру вида: $\oint_{\vec{}} (\vec{a}\cdot\vec{\tau})\,dl$

то значение этого интеграла называется циркуляцией векторного поля и обозначается буквой *Ц*.

$$Ц = \oint_l (\vec{a} \cdot \vec{\tau}) dl$$

Таким образом, циркуляция векторного поля есть работа векторного поля при движении по замкнутому контуру.

§ 2. Теорема Стокса.

Если в 3-х мерном пространстве функции $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$, таковы, что:

1) Непрерывны вместе со своими производными

$$\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial z}$$

2) В пространстве задан гладкий, ориентированный, замкнутый, ограниченный контур

3) Задана гладкая ориентированная поверхность S, натянутая на контур такая что, нормаль к поверхности и обход контура □ совмещены по правилу Буравчика.

Тогда

$$\oint\limits_{□} Pdx + Qdy + Rdz = \iint\limits_{S} \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right] dxdy +$$

$$+ \left[\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right] dydz + \left[\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right] dzdx$$

Формула, связывающая криволинейный интеграл по замкнутому контуру натянутая на поверхность S называется формулой Стокса.

В частном случае, если поле плоское, $R = 0$, $z = \text{const}$, формула Стокса переходит в формулу Грина.

§ 3. Ротор векторного поля. Векторная запись теоремы Стокса.

Пусть имеется векторное поле вида: $\vec{a} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ где P,Q,R непрерывны со своими производными. Рассмотрим в векторном поле замкнутый, гладкий, ориентированный контур ℓ, который является краем гладкой ориентируемой поверхности S. Нормаль к поверхности S и обход контура связаны по правилу Буравчика.

Найдем работу, которую совершает векторное поле $\vec{a}$ при движении по замкнутому контуру ℓ.

$$A = \oint_{\ell} (\vec{a} \cdot \vec{\tau})\, dl =$$

$$= \oint_{\ell} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\, dl = \oint_{\ell} Pdx + Qdy + Rdz$$

Так как на контур ℓ натянута ориентируемая поверхность S, то

$$\oint_{\ell} Pdx + Qdy + Rdz =$$

$$= \iint_{S} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dzdx =$$

Учитывая связь между поверхностными интегралами 2-го и 1-го рода имеем:

$$\iint_S \left\{ \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right] \cos(\vec{n}\vec{k}) + \left[\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right] \cos(\vec{n}\vec{i}) + \left[\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right] \cos(\vec{n}\vec{j}) \right\} ds$$

Выражение, стоящее под знаком поверхностного интеграла 1-го рода можно записать как скалярное произведение:

$$\vec{M}\left\{\underbrace{\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)}_{z};\underbrace{\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)}_{x};\underbrace{\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)}_{y}\right\}$$

и единичного вектора нормали к поверхности

$$\vec{n}=\left\{\cos(\vec{n}\vec{i}\,),\cos(\vec{n}\vec{j}\,),\cos(\vec{n}\vec{k}\,)\right\}$$

Таким образом, работа по замкнутому контуру может быть записана:

$$A=\oint(\vec{a}\cdot\vec{\tau})dl=\iint_{S}(\vec{M}\cdot\vec{n})ds$$

Вектор $\vec{M}$ характеризует вращательную способность поля. Если он равен 0, то поле не совершает работу при движении по замкнутому контуру.

Вектор $\vec{M}$ называется ротором векторного поля (вихрем векторного поля) и обозначается: $\vec{M} = rot\vec{a}$

$$rot\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \vec{i}\left[\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right] + \vec{j}\left[\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right] + \vec{k}\left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right]$$

Векторная запись теоремы Стокса

Теорема Стокса связывает:

$$\oint_{\ell} Pdx + Qdy + Rdz = \iint_S \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right]dxdy + \left[\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right]dzdy +$$

$$+\left[\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right]dxdz$$

Слева в формуле стоит циркуляция векторного поля $\vec{a}$ по замкнутому контуру ℓ.

$$\oint_{\ell}(\vec{a}\cdot\vec{\tau})dl=\iint_{S}(rot\vec{a}\cdot\vec{n})dS$$

Это векторная запись теоремы Стокса.

Смысл:

Циркуляция векторного поля равна потоку ротора этого векторного поля через поверхность *S*, натянутую на контур ℓ.

§ 4. Плотность циркуляции, связь её с ротором.

Пусть в векторном поле

$$\vec{a} = P\vec{i} + Q\vec{j} + P\vec{k}$$

В произвольной точке пространства M задан вектор $\vec{n}$.

Найдем циркуляцию векторного поля $\vec{a}$ по замкнутому контуру ℓ, описываемому около точки M и лежащему в плоскости, перпендикулярной вектору $\vec{a}$.

$$Ц = \oint\limits_{l} (\vec{a} \cdot \vec{\tau})dl$$

Если циркуляцию разделим на площадь контура ℓ, то получим число, характеризующее среднюю плотность циркуляции в контуре ℓ.

$$\frac{Ц}{S_{\ell}} = \frac{\oint\limits_{\ell} (\vec{a} \cdot \vec{\tau})dl}{S_{\ell}}$$

<u>Определение.</u> (плотности циркуляции)

Плотностью циркуляции в точке M по направлению вектора $\vec{n}$ называется число, обозначаемое $\Gamma_{\vec{n}}(M)$ и вычисляемое по формуле:

$$\Gamma_{\vec{n}}(M) = \lim_{l \to M} \frac{\oint (\vec{a} \cdot \vec{\tau})\, dl}{S_{l}}$$

Когда контур ℓ стягивается в точку M.

Можно показать, что плотность циркуляции в точке M по направлению вектора $\vec{n}$ равна проекции ротора векторного поля на направление $\vec{n}$.

$$\Gamma_{\vec{n}} = np_{\vec{n}}\, rot\, \vec{a}$$

§ 5. Вычисление циркуляции.

Ее можно вычислить 2 способами:

1) По определению, путем сведения к криволинейному интегралу 2-го рода.

2) С помощью теоремы Стокса.

<u>Пример:</u> На практике.

Виды векторных полей.

§ 6. Потенциальное поле.

Определение. Векторное поле $\vec{a}$ называется потенциальным, в некоторой односвязанной области V, если существует такая функция φ, что $\vec{a} = grad\varphi$.

Замечание. Функцию φ называют потенциалом векторного поля $\vec{a}$.

<u>Пример:</u> На практике.

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\xi\xi_0} \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$grad\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k} =$$

$$= \frac{q}{4\pi\xi_0}\left(\frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}(\bullet)\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}(\bullet)\vec{k}\right) =$$

$$= \frac{q}{4\pi\xi_0}\left[-\frac{1}{2}\frac{2x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\vec{i} + \left(-\frac{2y}{2(\bullet)^{3/2}}\right)\vec{j} - \frac{2z}{2(\bullet)^{3/2}}\vec{k}\right] =$$

$$= \frac{q}{4\pi\xi_0(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = -\frac{q}{4\pi\xi_0|\vec{r}|^3} \cdot \vec{r} =$$

$$= \vec{E}$$

<u>Теорема.</u> (необходимое и достаточное условие потенциальности). Для того, чтобы векторное поле $\vec{a}$ было потенциальным в некоторой односвязанной области V, необходимо и достаточно, чтобы циркуляция этого векторного поля по любому замкнутому контуру, лежащему в области V была равна нулю.

Доказательство.

Самостоятельно.

Замечание. Потенциал векторного поля определен с точностью до константы.

Если ϕ - потенциал векторного поля $\vec{a}$, то есть $\vec{a}$ = gradϕ, то ϕ + c – так же потенциал векторного поля $\vec{a}$.

0

grad(ϕ + c) = gradϕ + grad$c$ = $\vec{a}$.

Для отыскания потенциала поля берут и фиксируют определенную точку в поле, в которой потенциал известен (бесконечно удаленную точку, в которой ϕ = 0) и применяют формулу:

$$\varphi(M) - \varphi(M_0) = \int_{M_0}^{M} d\varphi = \int_{M_0}^{M} Pdx + Qdy + Rdz$$

Точка M_0 - фиксированная точка, в которой потенциал известен.

Точка M - точка, в которой потенциал неизвестен.

P, Q, R - координаты векторного поля, для которого находим потенциалы.

$\overset{\frown}{MM_0}$ - произвольная дуга, соединяющая две точки M_0 и M.

Дуга берется произвольной в силу того, что интеграл 2-го рода не зависит от способа движения от точки M_0 к точке M, а зависит только от расположения этих точек в случае потенциального поля.

§ 7. Безвихревые поля.

<u>Определение:</u> Векторное поле $\vec{a}$ называется безвихревым в односвязанной области V, если ротор этого векторного поля равен 0.

$$\operatorname{rot} \vec{a} = 0.$$

<u>Теорема.</u> (необходимое и достаточное условие безвихревого поля):

Для того, чтобы векторное поле было безвихревым необходимо и достаточно, чтобы оно было потенциальным в каждой точке некоторой области V.

Доказательство

Необходимость:

Пусть векторное поле $\overline{a}$ - безвихревое, то есть

. $rot\overline{a} = 0$

Циркуляция векторного поля $\overline{a}$, по произвольному замкнутому контуру l вычисляется по формуле, которая с учетом теоремы Стокса дает интеграл по поверхности S

$$\ddot{O} = \oint\limits_{l} \left(\overline{a} \cdot \overline{\tau}\right) dl = \iint\limits_{S} \left(rot\overline{a} \cdot \overline{n}\right) dS \Rightarrow$$

$\Rightarrow \ddot{O} = 0$ (по произвольному замкнутому контуру).

В силу предыдущей теоремы это означает что $\overline{a}$ - потенциальное поле.

Достаточность:

$\overline{a}$ - потенциальное поле $\Rightarrow \overline{a} = grad\,\varphi \Rightarrow rot\,\overline{a} =$
$= rot\,grad\,\varphi = 0 \Rightarrow$ поле $\overline{a}$ – безвихревое.

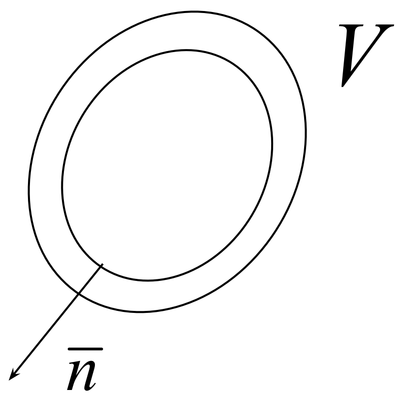
§ 8. Соленоидальные поля.

Определение: Векторное поле $\overline{a}$ называется соленоидальным в односвязанной области V, если: $div\overline{a} = 0$

Теорема. (о соленоидальности векторного поля). Для того, чтобы векторное поле $\overline{a}$ было соленоидальным в односвязанной области V необходимо и достаточно, чтобы поток векторного поля через произвольную замкнутую поверхность, лежащую в области V, был равен нулю.

Необходимость:

Пусть $\overline{a}$ - соленоидальное поле $\Rightarrow div\overline{a} = 0$.
Рассмотрим в области V произвольную замкнутую поверхность V, ориентированную внешней нормалью



$$\Pi_s = \iint\limits_S (\overline{a} \cdot \overline{n}) dS \overset{\text{теор.Остарогр.}}{=} \iiint\limits_V div\overline{a}\, dV = 0$$

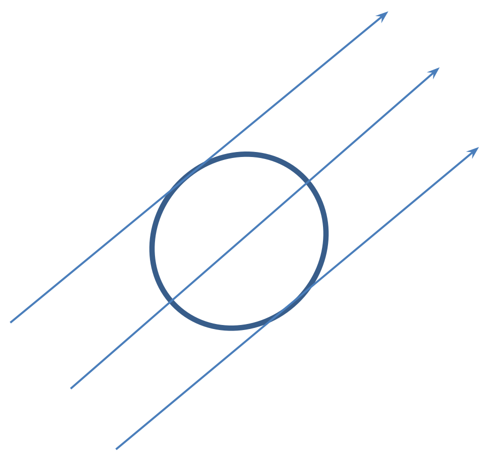
Достаточность:

Предположим что поток через поверхность $= 0$.

$$div\overline{a} = \lim_{S \to M} \frac{\iint\limits_S (\overline{a} \cdot \overline{n}) dS}{V_S} = 0$$

Свойства соленоидальных полей

Пусть дано векторное поле $\overline{a}$. Считаем, что в поле построены векторные линии.



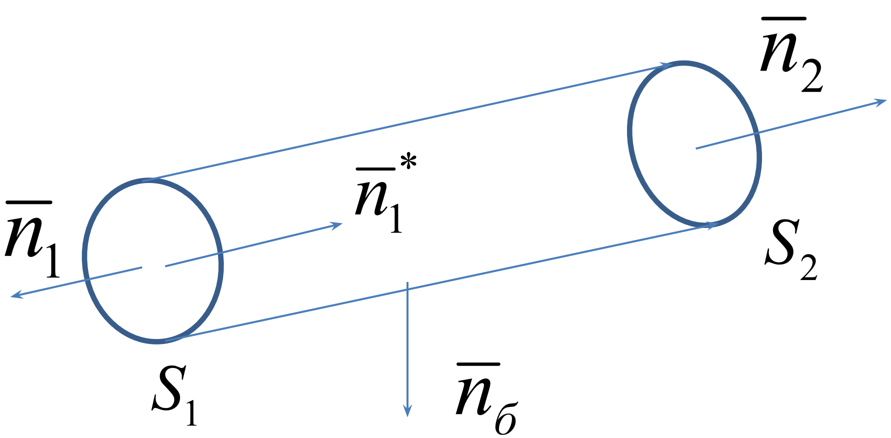
Возьмем в поле замкнутый контур и через него проведем множество векторных линий. Это множество линий образует векторную трубку.

<u>Теорема.</u> (о постоянстве потока соленоидального поля).

Поток соленоидального поля через любое сечение векторной трубки является постоянной величиной.

<u>Доказательство.</u>

Рассмотрим векторную трубку в векторном поле и возьмем пространство, заключенное в трубке, ограниченное сечениями S_1 и S_2.



Объем векторной трубки, заключенный между сечениями S_1 и S_2 – замкнутый.

Поверхность, ограничивающая объем состоит из 3-х поверхностей S_1 , S_2 и $S_{\acute{a}}$, которые имеют единичные нормали $\overline{n}_1$ $\overline{n}_2$ $\overline{n}_б$ направленные как указано на рисунке.

Поток векторного поля $\overline{a}$ через поверхность *S*:

$$S = S_1 + S_2 + S_б$$

можно вычислить по теореме Остроградского:

$$\iint\limits_S (\overline{a} \cdot \overline{n}) dS = \iiint\limits_V div\overline{a} dV$$

Векторное поле соленоидально $\Rightarrow \; div\overline{a} = 0$

Откуда следует, что

$$\iint\limits_S (\overline{a} \cdot \overline{n}) dS = 0 \Rightarrow \iint\limits_{S_1} (\overline{a} \cdot \overline{n}_1) dS + \iint\limits_{S_2} (\overline{a} \cdot \overline{n}_2) dS + \iint\limits_{S_б} (\overline{a} \cdot \overline{n}_б) dS = 0$$

В силу определения векторной трубки $\overline{a} \perp \overline{n}_б \Rightarrow \left(\overline{a} \cdot \overline{n}_б\right) = 0$, а следовательно, интеграл = 0.

$$\iint\limits_{S_1} (\overline{a} \cdot \overline{n}_1) dS + \iint\limits_{S_2} (\overline{a} \cdot \overline{n}_2) dS = 0$$

При вычислении потока через поверхность смотрят за направлением нормали к этой поверхности. При вычислении потока через S_1 считаем, что нормаль направлена в сторону потока. При вычислении потока S_2 берем нормаль, направленную в сторону потока.

$$\overline{n}_1^* = -\overline{n}_1 \Rightarrow \iint\limits_{S_1} (\overline{a} \cdot \overline{n}_1) dS = -\iint\limits_{S_1} \left(\overline{a} \cdot \overline{n}_1^*\right) dS$$

Заменим поток в направлении $\overline{n}_1$ на поток в направлении $\overline{n}_1^{\,*}$ имеем:

$$-\iint_{S_1}\left(\overline{a}\cdot\overline{n}_1^{\,*}\right)dS+\iint_{S_2}\left(\overline{a}\cdot\overline{n}_2\right)dS=0$$

$$-\ddot{I}_{\;S_1}+\ddot{I}_{\;S_2}=0\Rightarrow\ddot{I}_{\;S_2}=\ddot{I}_{\;S_1}$$

Поток в трубке постоянен по сечению в случае соленоидального поля.

§ 9. Операции 1 и 2 порядка над скалярными и векторными полями.

Пусть есть скалярное поле $\varphi(x, y, z)$ и векторное поле $\overline{a}(x, y, z)$.

Каждому скалярному полю с помощью градиента можно поставить векторное поле градиента.

Любому дифференциальному векторному полю с помощью div можно поставить скалярное поле.

Любому векторному полю с помощью $rot\overline{a}$ можно поставить векторное поле.

$grad\varphi, div\overline{a}, rot\overline{a}$ - операции 1-го порядка. Они показывают, что операции связаны между собой.

Операции 1-го порядка порождают 5 операций 2-го порядка.

1. $div\ grad\varphi$
2. $div\ rot\overline{a}$
3. $grad\ div\overline{a}$
4. $rot\ grad\varphi$
5. $rot\ rot\overline{a}$

Дивергенция берется от векторного поля.

Две из операций 2-го порядка равны 0.

$$grad\, div\bar{a} = \frac{\partial}{\partial x}\left(div\bar{a}\right)\bar{i} + \frac{\partial}{\partial y}\left(div\bar{a}\right)\bar{j} + \frac{\partial}{\partial z}\left(div\bar{a}\right)\bar{k} =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial z}\right)\bar{i} + \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial y \partial z}\right)\bar{j} + \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 R}{\partial z^2}\right)\bar{k}$$

Раскрытие всех операций производится слева направо. Все они приводятся к вычислению частных производных 2-го порядка.

$$rot\, grad\varphi = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{vmatrix} = 0$$

Это первая из операций 2-го порядка, которая = 0.

Рассмотрим:

$$div\, rot a = \frac{\partial}{\partial x}\left(rot_x a\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(rot_y a\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(rot_z a\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) =$$

$$= \cancelto{0}{\frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y}} - \cancelto{0}{\frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial z}} - \cancelto{0}{\frac{\partial^2 P}{\partial y \partial z}} - \cancelto{0}{\frac{\partial^2 R}{\partial y \partial x}} - \cancelto{0}{\frac{\partial^2 Q}{\partial z \partial x}} - \cancelto{0}{\frac{\partial^2 P}{\partial z \partial y}} = 0$$

Это вторая операция 2-го порядка, которая равно нулю.

$$\boxed{\begin{aligned} &rot\, grad \varphi = 0 \\ &div\, rot a = 0 \end{aligned}}$$

Операцию 2-го порядка $div\, grad\varphi$ называют оператор Лапласа и обозначают:

Δ - оператор Лапласа (Лапласиан)

$$div\, grad\varphi = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) =$$

$$= \boxed{\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}} = \boxed{\Delta\varphi}$$

Сравнивая обведённые выражения можем записать:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \Delta$$

Для электростатического поля, в случае стационарного поля.

$\mathrm{div}\,\overline{E} = \rho$ - объемная плотность заряда

$\overline{E} = \mathrm{grad}\phi$

Электростатическое поле $\overline{E}$ является потенциальным

$$div\; grad\varphi = \boxed{\Delta\varphi = \rho}$$ - уравнение Лапласа.

В случае электростатического поля функция потенциала подчиняется уравнению $\Delta\varphi = \rho$, где ϕ - неизвестная заранее функция.

§ 10. Символика Гамильтона.

Для того, чтобы удобно работать с операциями 1-го и 2-го порядка, Гамильтон ввел следующее понятия:

$$grad\,\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\bar{k}$$

Обозначить символом ∇ и назвать его оператором «Набла».

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial}{\partial z}\bar{k}$$

Операции 1-го порядка записываются в виде:

$$grad\,\varphi = \nabla\varphi$$

$$div\,\overline{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = \left(\nabla \cdot \overline{a}\right)$$ - скалярное произведение

$$rot\,\overline{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \left[\nabla \times \overline{a}\right]$$ - векторное произведение

Запись операций 2-го порядка с помощью оператора Набла:

1) $div\,grad\varphi = \left(\nabla \cdot grad\varphi\right) = \left(\nabla \cdot \nabla\varphi\right) = \nabla^2\varphi$

$\Delta = \nabla^2$ - оператор Лапласа равен оператору Набла в квадрате.

Тогда: $div\, grad\, \varphi = \nabla\varphi$

2) $div\, rot\, \overline{a} = \left(\nabla \cdot rot\overline{a}\right) = \left(\nabla \cdot \left[\nabla \times \overline{a}\right]\right) = 0$

3) $grad\, div\overline{a} = \left(\nabla\left(\nabla \cdot \overline{a}\right)\right)$

4) $rot\, grad\varphi = \left[\nabla \times grad\varphi\right] = \left[\nabla \times \nabla\varphi\right] = 0$

5) $rot\, rota = \left[\nabla \times \left[\nabla \times \overline{a}\right]\right]$