Знаходження оберненої матриці

Квадратна матриця А називається невиродженою, якщо визначник $\det A \neq 0$ В протилежному випадку матриця А називається виродженою.

Обернено́ю матрицею по відношенню до даної <u>*невиродженої квадратної*</u> матриці *А n - ного* порядку, називається матриця, яка, помножена ліворуч, і праворуч на дану матрицю, дає одиничну матрицю.

Обернена матриця позначається символом A^{-1}. Таким чином, відповідно визначення: $AA^{-1}=A^{-1}A=E$.

$$A \to \det A \neq 0 \to A^{T} \to A^{+} \to \quad A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^{+}$$

Приєднана матриця отримується шляхом заміни кожного елементу матриці A^T на його алгебраїчне доповнення

Якщо визначник матриці дорівнює нулю, то обернена матриця не існує

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^{+}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

Приклад. Знайти матрицю обернену до матриці:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

.

Знаходимо матрицю A^{-1} Визначник матриці ***A***:

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -14$$

Оскільки $\det A \neq 0$, матриця A має обернену матрицю A^{-1}

.

Обчислюємо алгебраїчні доповнення елементів матриці A:

,

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 \qquad A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -9 \qquad A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 10$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -8 \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = 0 \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -20$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -2$$

Бажано зробити перевірку . $A \cdot A^{-1} = E$

,

Одержуємо обернену матрицю A^{-1}

$$A^{-1} = \frac{1}{-14}\begin{pmatrix} 4 & -9 & 10 \\ -8 & 11 & -20 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}3&2&-5\\4&2&0\\1&1&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-4/14&9/14&-10/14\\8/14&-11/14&20/14\\-2/14&1/14&2/14\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-\frac{12}{14}+\frac{16}{14}+\frac{10}{14}&\frac{27}{14}-\frac{22}{14}-\frac{5}{14}&-\frac{30}{14}+\frac{40}{14}-\frac{5}{14}\\-\frac{16}{14}+\frac{16}{14}+0&\frac{36}{14}-\frac{22}{14}+0&-\frac{40}{14}+\frac{40}{14}+0\\-\frac{4}{14}+\frac{8}{14}-\frac{4}{14}&\frac{9}{14}-\frac{11}{14}+\frac{2}{14}&-\frac{10}{14}+\frac{20}{14}+\frac{4}{14}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=E$$

Обернена матриця знайдена вірно