Теория игр

Лекция 6.
Игры с природой: принятие решений в условиях риска

16.10.2014

План лекции

6.1. Критерии оптимальности в условиях риска

6.2. Критерий Ходжа-Лемана

6.3. Критерий Гермейера-Гурвица

Критерии оптимальности в условиях риска:

- критерий Байеса;
- критерий Лапласа;
- критерий максимальной вероятности;
- критерий Гермейера.

1.1 Критерий Байеса относительно выигрышей

Предположим, что игроку *A* известны не только состояния $П_1, П_2, \ldots П_n$ в которых случайным образом может находиться природа, но и вероятности $(q_1, q_2, \ldots q_n)$ наступления этих состояний, при этом $\sum q_j = 1$.

Матрицу выигрышей игрока *А* и вероятности состояний природы *П* можно представить в виде общей матрицы:

$$A = \left| \begin{array}{ccccc} \Pi_j & \Pi_1 & \Pi_2 & \dots & \Pi_n \\ A_i & & & & \\ A_1 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ A_2 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_m & a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \\ \boldsymbol{q_j} & \boldsymbol{q_1} & \boldsymbol{q_2} & \boldsymbol{\dots} & \boldsymbol{q_n} \end{array} \right.$$

Чистую стратегию A_i можно определить как случайную величину со следующим законом распределения

A_i	a_{i1}	a_{i2}	...	a_{in}
q	q_1	q_2	...	q_n

Математическое ожидание данной случайной величины

$$B_i = \sum_{j=1}^{n} q_j a_{ij}, i = 1,2,...,m$$

Или средне взвешенное выигрышей *i*-ой строки матрицы *A* с весами $(q_1, q_2, \ldots q_n)$.

Критерий Байеса относительно выигрышей

позволяет выбрать максимальный из ожидаемых элементов матрицы доходности при известной вероятности возможных состояний природы:

$$B = \max_i \left\{ \sum_{j=1}^{n} q_j a_{ij} \right\}$$

1.2 Критерий Байеса относительно рисков

Матрицу рисков игрока *А* и вероятности состояний природы *П* можно представить матрицей:

$$R = \begin{vmatrix} A_i \backslash \Pi_j & \Pi_1 & \Pi_2 & \dots & \Pi_n \\ A_1 & r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ A_2 & r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_m & r_{m1} & r_{m2} & \dots & r_{mn} \\ \boldsymbol{q_j} & \boldsymbol{q_1} & \boldsymbol{q_2} & \boldsymbol{\dots} & \boldsymbol{q_n} \end{vmatrix}$$

Показателем эффективности стратегии A_i по *критерию Байеса относительно рисков* является математическое ожидание рисков, расположенных в *i*-ой строке матрицы *R*.

$$B_i^r = \sum_{j=1}^{n} q_j r_{ij}, i = 1,2,\ldots,m$$

Критерий Байеса относительно рисков **позволяет выбрать минимальное значение из средних рисков при известной вероятности возможных состояний природы:**

$$B^r = \min_i \left\{ \sum_{j=1}^{n} q_j r_{ij} \right\}$$

Критерии Байеса относительно выигрышей и относительно рисков эквивалентны, то есть по обоим критериям оптимальной будет одна и та же стратегия.

2.1 Критерий Лапласа относительно выигрышей

Вероятность состояний природы оценивается субъективно как равнозначные.

$$q_j = n^{-1}$$

$$\sum q_j = \sum n^{-1} = 1$$

Этот принцип называется – принцип недостаточного основания Лапласа.

Имеется игра с природой, в которой игрок А обладает m чистыми стратегиями A_i, природа П может случайным образом находиться в одном из n своих состояний $П_j$, а матрица выигрышей игрока А задается следующим образом:

$$A = \left| \begin{array}{ccccc} \Pi_j & \Pi_1 & \Pi_2 & \dots & \Pi_n \\ A_i & & & & \\ A_1 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ A_2 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_m & a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \\ \boldsymbol{q_j} & \boldsymbol{q_1 = n^{-1}} & \boldsymbol{q_2 = n^{-1}} & \boldsymbol{\dots} & \boldsymbol{q_n = n^{-1}} \end{array} \right.$$

Показателем эффективности чистой стратегии A_i по *критерию Лапласа относительно выигрышей* является среднеарифметическое выигрышей при этой стратегии.

$$L_i = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}, i = 1,2,\ldots,m$$

Критерий Лапласа относительно выигрышей **предполагает выбор варианта стратегии с максимальной ожидаемой доходностью при равной вероятности наступления возможных стратегий природы.**

$$L = \max\left\{ \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \right\}, i = 1,2,\ldots,m$$

2.2 Критерий Лапласа относительно рисков

Матрицу рисков игрока *А* и вероятности состояний природы *П* при критерии Лапласа относительно рисков можно представить матрицей:

$$R = \begin{array}{|cccccc|} \hline A_i / \Pi_j & \Pi_1 & \Pi_2 & \dots & \Pi_n \\ A_1 & r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ A_2 & r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_m & r_{m1} & r_{m2} & \dots & r_{mn} \\ q_j & q_1=n^{-1} & q_2=n^{-1} & \dots & q_n=n^{-1} \\ \hline \end{array}$$

Показателем неэффективности чистой стратегии A_i по критерию *Лапласа относительно рисков* является среднеарифметическое рисков при этой стратегии.

$$L_i^r = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} r_{ij}, i = 1,2,\ldots,m$$

Критерий Лапласа относительно рисков

предполагает выбор варианта стратегии с минимальным риском при равной вероятности наступления возможных состояний природы.

$$L^r = \min\left\{ \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} r_{ij} \right\}, i = 1,2,\ldots,m$$

3. Критерий максимальной вероятности

Рассмотрим игру с природой размера *m* x *n*, где *m* ≥ 2 и *n* ≥ 2.

Известны вероятности q_j состояний природы $П_j$.

Максимальная вероятность обозначается следующим образом:

$$q^{\max} = \max_{1 \le j \le 1} q_j$$

Максимальную вероятность может иметь не одно состояние природы. А также максимальное значение может быть у всех состояний природы при равных вероятностях $q_j = n^{-1}$.

Предположим, что состояния природы $П_{jк}$, $к = 1,2,\ldots\sigma$,
где σ – это номер состояний природы (столбцы), имеющих максимальную вероятность.

Показателем эффективности чистой стратегии A_i по *критерию максимальной вероятности относительно выигрышей*, является наибольший выигрыш из выигрышей при этой стратегии и при состояниях природы $П_{jк}$ $к = 1,2,\ldots\sigma$, имеющих максимальную вероятность q^{max}.

$$Q_i^p = \max_{1 \le к \le \sigma} a_{ij_к}, i = 1,2,\ldots m$$

В связи с этим рассматривается матрица *m* x *σ*, которая получается путем исключения тех столбцов, у которых вероятности ниже максимального значения.

$$
A = \begin{array}{cccccc}
 & \Pi_j & & & & \\
A_i & & \Pi_{j1} & \Pi_{j2} & \dots & \Pi_{j\sigma} \\
A_1 & & a_{1j1} & a_{1j2} & \dots & a_{1j\sigma} & Q_1^p \\
A_2 & & a_{2j1} & a_{2j2} & \dots & a_{2j\sigma} & Q_2^p \\
\dots & & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
A_m & & a_{mj1} & a_{mj2} & \dots & a_{mj\sigma} & Q_i^p \\
 & q_{j\kappa} & q_{j1} = q^{max} & q_{j2} = q^{max} & \dots & q_{j\sigma} = q^{max} & Q_m^p
\end{array}
$$

Ценой игры (Q^p) по критерию *максимальной вероятности относительно выигрышей* будет наибольший элемент из показателей эффективности Q_i

$$Q^p = \max_{1 \le i \le m} Q_i^p$$

Пример:

Тип товара	Спрос		
	$П_1$	$П_2$	$П_3$
A_1	20	15	10
A_2	16	12	14
A_3	13	18	15

Найти оптимальную стратегию по критерию максимальной вероятности относительно выигрышей при вероятностях состояний природы
$q_1 = 0{,}2$; $q_2 = 0{,}3$; $q_3 = 0{,}5$.

Решение:

Находим максимальную вероятность $q^{\max} = \max\limits_{1 \le j \le 1} q_j$

$$q^{\max} = (0{,}2;0{,}3;0{,}5) = 0{,}5$$

Максимальной вероятности соответствует состояние природы $П_3$, следовательно матрица примет следующий вид

Тип товара	$П_3$	Q_i^p
A_1	10	10
A_2	14	14
A_3	15	15
q_j	0,5	$Q^p = 15$

Ответ: **оптимальной стратегией по критерию максимальной вероятности относительно выигрышей является стратегия A_3**

4. Критерий Гермейера относительно выигрышей

Рассмотрим игру с природой размера ($m \geq 2$) и ($n \geq 2$) с матрицей выигрышей A

$$A = \begin{array}{c|cccc} A_i \backslash \Pi_j & \Pi_1 & \Pi_2 & \dots & \Pi_n \\ A_1 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ A_2 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_m & a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \\ \hline \mathbf{q_j} & \mathbf{q_1} & \mathbf{q_2} & \mathbf{\dots} & \mathbf{q_n} \end{array}$$

По критерию Гермейера (A^G) эффективность чистых стратегий определяется следующим образом:

Выбрав чистую стратегию A_i, игрок A может получить выигрыш a_{ij}, если природа окажется в состоянии $П_j$. Но при этом природа может оказаться в этом состоянии с вероятностью $q_j = p(П_j)$. Поэтому игрок А может получить свой выигрыш (a_{ij}) только с вероятностью q_j.

В связи с этим рассматривается так называемый элемент Гермейера для этого выигрыша – $a_{ij} q_j$.

Матрица Гермейера состоит из элементов Гермейера и выглядит следующим образом:

$$A^G = \begin{array}{c|cccc} A_i \backslash \Pi_j & \Pi_1 & \Pi_2 & \dots & \Pi_n \\ A_1 & a_{11}\,q_1 & a_{12}\,q_2 & \dots & a_{1n}\,q_n \\ A_2 & a_{21}\,q_1 & a_{22}\,q_2 & \dots & a_{2n}\,q_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_m & a_m\,q_1 & a_{m2}\,q_2 & \dots & a_{mn}\,q_n \\ \hline q_j & q_1 & q_2 & \dots & q_n \end{array}$$

При выборе стратегии игрок *А* предполагает, что природа будет находиться *в самом неблагоприятном для него состоянии,* при котором элемент Гермейера будет являться самым минимальным среди всех элементов матрицы Гермейера соответствующие выбранной стратегии.

Этот элемент называется *показателем эффективности чистой стратегии A_i по критерию Гермейера* относительно выигрышей:

$$G_i = \min_{1 \le j \le n} (a_{ij} q_j), i = 1,2,...m$$

Ценой игры в чистых стратегиях по *критерию Гермейера* относительно выигрышей является максимальное значение среди показателей эффективности чистой стратегии A_i по критерию Гермейера относительно выигрышей:

$$G = \max_{1 \le i \le m} G_i$$

Так же ценой игры в чистых стратегиях по критерию Гермейера относительно выигрышей можно назвать максимином матрицы Гермейера относительно выигрышей:

$$G = \max_{1 \le i \le m} \min_{1 \le j \le n} (a_{ij} q_j)$$

Пример:

Тип товара	Спрос		
	$П_1$	$П_2$	$П_3$
A_1	20	15	10
A_2	16	12	14
A_3	13	18	15

Найти оптимальную стратегию по критерию Гермейера относительно выигрышей при вероятностях состояний природы
$q_1 = 0{,}2$; $q_2 = 0{,}3$; $q_3 = 0{,}5$.

Решение:

Строим матрицу Гермейера с элементами a_{ij} q_j

Тип товара	Спрос $П_1$	$П_2$	$П_3$
A_1	4	4,5	5
A_2	3,2	3,6	7
A_3	2,6	5,4	7,5

Находим минимальный выигрыш игрока А по всем стратегиям по формуле

$$G_i = \min_{1 \le j \le n} (a_{ij} q_j)$$

G_1 = min (4; 4,5; 5) = 4;
G_2 = min (3,2; 3,6; 7) = 3,2;
G_3 = min (2,6; 5,4; 7,5) = 2,6.

$$G = \max_{1 \le i \le m} \min_{1 \le j \le n} (a_{ij} q_j) = \max(4;3,2;2,6) = 4$$

Ответ: **оптимальной стратегией по критерию Гермейера относительно выигрышей является стратегия A_3**

Критерий Ходжа-Лемана относительно выигрышей

$$A = \begin{array}{c|cccc} A_i / \Pi_j & \Pi_1 & \Pi_2 & \dots & \Pi_n \\ A_1 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ A_2 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_m & a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \\ \hline & q_j & q_1 & q_2 & \dots \quad q_n \end{array}$$

Критерий Ходжа-Лемана относительно выигрышей опирается одновременно на критерий Вальда и критерий Байеса.

6.2. Критерий Ходжа-Лемана

При определении оптимальной стратегии по этому критерию вводится параметр (λ) достоверности информации о распределении вероятностей состояний природы $q = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$, значение, которого находится в интервале [0, 1].

Если степень достоверности велика, то доминирует критерий Байеса, в противном случае критерий Вальда.

Показателем эффективности чистой стратегии A_i по критерию *Ходжа-Лемана* относительно выигрышей (*HL*) является:

$$HL_i = \lambda B_i(q) + (1 - \lambda)W_i,\ i = 1,2,\ldots,m$$

где

$B_i(q)$ – показатель эффективности стратегии A_i по критерию Байеса относительно выигрышей с вектором $q = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$ распределения вероятностей состояний природы, который определяется по формуле:

$$B_i = \sum_{j=1}^{n} q_j a_{ij}, i = 1,2,\ldots,m$$

W_i – показатель эффективности стратегии A_i по критерию Вальда, который определяется по формуле:

$$W_i = \min_j a_{ij}$$

6.2. Критерий Ходжа-Лемана

При любом показателе доверия игрока $\lambda \in [0,1]$ *A* распределению вероятностей $q = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$ состояний природы показатель эффективности стратегии A_i по критерию Ходжа-Лемана (*HLi*):

$$HL_i \geq Wi$$

$$HL_i \leq Bi$$

6.2. Критерий Ходжа-Лемана

Ценой игры в чистых стратегиях по критерию Ходжа-Лемана относительно выигрышей является максимальное значение среди показателей эффективности чистой стратегии A_i по критерию Ходжа-Лемана относительно выигрышей:

$$HL = \max_{1 \le i \le m}(HL_i) = \max(\lambda B_i(q) + (1 - \lambda) W_i)$$

Критерий Ходжа-Лемана применим в следующих случаях:

- имеется информация о вероятностях состояний окружающей среды, однако эта информация получена на основе относительно небольшого числа наблюдений и может измениться;
- принятое решение теоретически допускает бесконечно много реализаций;
- при малом числе реализации допускается некоторый риск.

Пример:

Тип товара	Спрос		
	$П_1$	$П_2$	$П_3$
A_1	20	15	10
A_2	16	12	14
A_3	13	18	15

Найти оптимальную стратегию по критерию Ходжа-Лемана относительно выигрышей при λ = 0,6 и при вероятностях состояний природы
q_1 = 0,2; q_2 = 0,3; q_3 = 0,5.

Решение:

Вычислим средние выигрыши по критерию Байеса

$$B_1 = (20 \cdot 0{,}2) + (15 \cdot 0{,}3) + (10 \cdot 0{,}5) = 13{,}5 \qquad B_3 = (13 \cdot 0{,}2) + (18 \cdot 0{,}3) + (15 \cdot 0{,}5) = 15{,}5$$

$$B_2 = (16 \cdot 0{,}2) + (12 \cdot 0{,}3) + (14 \cdot 0{,}5) = 13{,}8$$

По критерию Вальда (W_i)

$W_1 = 10$; $W_2 = 12$; $W_3 = 13$

Найдем оптимальную стратегию по критерию Ходжа-Лемана по формуле

$HL_i = \lambda B_i(q) + (1 - \lambda)W_i$, i = 1,2,…,m

$HL_1 = (0{,}6 \cdot 13{,}5) + (1 - 0{,}6) \cdot 10 = 8{,}1 + 4 = 12{,}1$

$HL_2 = (0{,}6 \cdot 13{,}8) + (1 - 0{,}6) \cdot 12 = 8{,}28 + 4{,}8 = 13{,}08$

$HL_3 = (0{,}6 \cdot 15{,}5) + (1 - 0{,}6) \cdot 13 = 9{,}3 + 5{,}2 = 14{,}5$

$HL = \max(\lambda B_i(q) + (1 - \lambda)W_i) = \max(12{,}1; 13{,}08; 14{,}5) = 14{,}5$

Ответ: **оптимальной стратегией по критерию Ходжа-Лемана относительно выигрышей является стратегия A_3**

Критерий Ходжа-Лемана относительно рисков

$$R\,(HL) = \begin{array}{c|cccc} A_i \backslash \Pi_j & \Pi_1 & \Pi_2 & \dots & \Pi_n \\ A_1 & r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ A_2 & r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_m & r_m & r_{m2} & \dots & r_{mn} \\ \boldsymbol{q_j} & \boldsymbol{q_1} & \boldsymbol{q_2} & \boldsymbol{\dots} & \boldsymbol{q_n} \end{array}$$

Критерий Ходжа-Лемана относительно рисков опирается одновременно на критерий Байеса и критерий Сэвиджа.

Показателем неэффективности чистой стратегии A_i по критерию Ходжа-Лемана относительно рисков (HL^r) является:

$$HL_i^r = \lambda B_i^r(q) + (1-\lambda)S_i, i = 1,2,\ldots,m$$

6.2. Критерий Ходжа-Лемана

где

$B_i(q)$ – показатель неэффективности стратегии A_i по критерию Байеса относительно рисков с вектором $q = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$ распределения вероятностей состояний природы, который определяется по формуле:

$$B_i^r = \sum_{j=1}^{n} q_j r_{ij}$$

S_i – показатель неэффективности стратегии A_i по критерию Сэвиджа с вектором $q = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$ распределения вероятностей состояний природы, который определяется по формуле:

$$S_i = \max_j r_{ij}$$

6.2. Критерий Ходжа-Лемана

Ценой игры в чистых стратегиях по критерию Ходжа-Лемана относительно рисков является минимальное значение среди показателей неэффективности чистой стратегии A_i по критерию Ходжа-Лемана относительно рисков:

$$HL^r = \min(HL_i^r) = \min(\lambda B_i^r(q) + (1-\lambda)S_i)$$

Критерии оптимальности чистых стратегий по критерию Ходжа-Лемана относительно выигрышей и относительно рисков не эквивалентны.

Пример:

Тип товара	Спрос		
	$П_1$	$П_2$	$П_3$
A_1	20	15	10
A_2	16	12	14
A_3	13	18	15

Найти оптимальную стратегию по критерию Ходжа-Лемана относительно рисков при λ = 0,6 и при вероятностях состояний природы
q_1 = 0,2; q_2 = 0,3; q_3 = 0,5.

6.2. Критерий Ходжа-Лемана

Решение:

Построим матрицу рисков.

Тип товара	Спрос $П_1$	$П_2$	$П_3$
A_1	0	3	5
A_2	4	6	1
A_3	7	0	0

Найдем критерий Байеса относительно рисков

$$B_1^r = (0 \cdot 0{,}2) + (3 \cdot 0{,}3) + (5 \cdot 0{,}5) = 3{,}4 \qquad B_3^r = (7 \cdot 0{,}2) + (0 \cdot 0{,}3) + (0 \cdot 0{,}5) = 1{,}4$$

$$B_2^r = (4 \cdot 0{,}2) + (6 \cdot 0{,}3) + (1 \cdot 0{,}5) = 3{,}1$$

Найдем критерий Сэвиджа $S_1 = 5;\ S_2 = 6;\ S_3 = 7$

Найдем оптимальную стратегию по критерию Ходжа-Лемана относительно рисков:

$$HL^r_1 = (0{,}6 \cdot 3{,}4) + (1 - 0{,}6) \cdot 5 = 2{,}04 + 2 = 4{,}04$$
$$HL^r_2 = (0{,}6 \cdot 3{,}1) + (1 - 0{,}6) \cdot 6 = 1{,}86 + 2{,}4 = 4{,}26$$
$$HL^r_3 = (0{,}6 \cdot 1{,}4) + (1 - 0{,}6) \cdot 7 = 0{,}84 + 2{,}8 = 3{,}64$$

$$HL^r = \min(4{,}04;\ 4{,}26;\ 3{,}64) = 3{,}64$$

Ответ: **оптимальной стратегией по критерию Ходжа-Лемана относительно рисков является стратегия A_3**

Критерий Гермейера-Гурвица относительно выигрышей

Данный критерий представляет собой критерий Гурвица относительно матрицы Гермейера.

$$A^G = \begin{array}{c|cccc} A_i \backslash \Pi_j & \Pi_1 & \Pi_2 & \dots & \Pi_n \\ A_1 & a_{11}\,q_1 & a_{12}\,q_2 & \dots & a_{1n}\,q_n \\ A_2 & a_{21}\,q_1 & a_{22}\,q_2 & \dots & a_{2n}\,q_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_m & a_m\,q_1 & a_{m2}\,q_2 & \dots & a_{mn}\,q_n \\ \boldsymbol{q_j} & \boldsymbol{q_1} & \boldsymbol{q_2} & \boldsymbol{\dots} & \boldsymbol{q_n} \end{array}$$

При этом если $0 \le \lambda \le 1$, то λ это показатель оптимизма игрока А, тогда показателем пессимизма игрока будет $0 \le (1 - \lambda) \le 1$.

6.3. Критерий Гермейера-Гурвица

Показателем эффективности чистой стратегии A_i по критерию Гермейера-Гурвица относительно выигрышей (*GH*) является:

$$GH_i = (1-\lambda)\cdot G_i + \lambda \cdot M_i,\ i = 1,2,\ldots,m$$

6.3. Критерий Гермейера-Гурвица

где

G_i – показатель эффективности стратегии A_i по критерию Гермейера относительно выигрышей с вектором $q = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$ распределения вероятностей состояний природы, который определяется по формуле:

$$G_i = \min_{1 \le j \le n} (a_{ij} q_j)$$

M_i – показатель эффективности стратегии A_i по критерию Гурвица, относительно матрицы Гермейера, который определяется по формуле:

$$M_i = \max_{1 \le j \le n} (a_{ij} q_j)$$

Ценой игры в чистых стратегиях по критерию Гермейера-Гурвица относительно выигрышей является максимальное значение среди показателей эффективности чистой стратегии A_i по критерию Гермейера-Гурвица относительно выигрышей:

$$GH = max\left((1-\lambda)\cdot G_i + \lambda \cdot M_i\right),\ i = 1,2,\ldots,m$$

Пример:

Тип товара	Спрос		
	$П_1$	$П_2$	$П_3$
A_1	20	15	10
A_2	16	12	14
A_3	13	18	15

Найти оптимальную стратегию по критерию Гермейера-Гурвица относительно выигрышей при λ = 0,6 и при вероятностях состояний природы $q_1 = 0,2$; $q_2 = 0,3$; $q_3 = 0,5$.

Решение:

Строим матрицу Гермейера с элементами a_{ij} q_j

Тип товара	Спрос $П_1$	$П_2$	$П_3$
A_1	4	4,5	5
A_2	3,2	3,6	7
A_3	2,6	5,4	7,5

Находим минимальный выигрыш игрока А по всем стратегиям по формуле

$$G_i = \min_{1 \le j \le n}(a_{ij} q_j)$$

G_1 = min (4; 4,5; 5) = 4;
G_2 = min (3,2; 3,6; 7) = 3,2;
G_3 = min (2,6; 5,4; 7,5) = 2,6.

Находим максимальный выигрыш игрока А по всем стратегиям по формуле

$$M_i = \max_{1 \le j \le n}(a_{ij} q_j)$$

M_1 = max (4; 4,5; 5) = 5
M_2 = max (3,2; 3,6; 7) = 7
M_3 = max (2,6; 5,4; 7,5) = 7,5

6.3. Критерий Гермейера-Гурвица

Найдем критерии Гермейера-Гурвица относительно выигрышей по каждой стратегии по формуле:

$GH_i = (1 - \lambda) \cdot G_i + \lambda \cdot M_i$

$GH_1 = (1 - 0{,}6) \cdot 4 + 0{,}6 \cdot 5 = 1{,}6 + 3 = 4{,}6$

$GH_2 = (1 - 0{,}6) \cdot 3{,}2 + 0{,}6 \cdot 7 = 1{,}28 + 4{,}2 = 5{,}48$

$GH_3 = (1 - 0{,}6) \cdot 2{,}6 + 0{,}6 \cdot 7{,}5 = 5{,}54$

Найдем критерий Гермейера-Гурвица для данной задачи

$GH = max ((1 - \lambda) \cdot G_i + \lambda \cdot M_i)$

$GH = max (4{,}6; 5{,}48; 5{,}54) = 5{,}54$

Ответ: **оптимальной стратегией по критерию Гермейера-Гурвица относительно выигрышей является стратегия A_3**

Критерий Байеса

$$B = \max_i \left\{ \sum_{j=1}^{n} q_j a_{ij} \right\}$$

Критерий Лапласа

$$L = max\left\{ \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \right\}$$

$$q^{\max} = \max_{1 \le j \le 1} q_j$$