

**Семинар 17. Определенный
интеграл. Основные свойства
и теоремы. Формула Ньютона
Лейбница**

Предел S интегральной суммы $S_n = \sum_{k=1}^n f(x'_k) \Delta x_k$ для функции $y=f(x)$

на отрезке $[a,b]$, когда число n отрезков неограниченно возрастает, а наибольшая длина отрезка $\Delta x_k \rightarrow 0$ называют определенным интегралом от функции $y=f(x)$ на отрезке $[a,b]$.

Обозначение $\int_a^b f(x) dx = \lim_{\Delta x_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x'_k) \Delta x_k$

a – нижний предел интегрирования;

b – верхний предел интегрирования;

$[a,b]$ – отрезок интегрирования;

$f(x)$ – подынтегральная функция;

x – переменная интегрирования.

Формула Ньютона-Лейбница

Вычисление интеграла основано на применении формулы Ньютона-Лейбница

Пусть $f(x)$ – интегрируема на отрезке $[a,b]$ и $F(x)$ – одна из первообразных функции $f(x)$, то есть $f(x)=F'(x)$. Тогда приращение первообразной на отрезке $[a,b]$, то есть $F(b)-F(a)$ равно значению определенного интеграла

$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$ Другая форма $\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b$ – двойная подстановка от a до b

Основные свойства определенного интеграла

При выводе основных свойств определенного интеграла исходим из формулы Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \quad (1), \text{ где } f(x) \text{ – непрерывна на отрезке } [a,b], f(x)=F'(x).$$

I. Величина определенного интеграла не зависит от обозначения переменной интегрирования, то есть

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(y)dy = \dots = \int_a^b f(u)du$$

II. Определенный интеграл с одинаковыми пределами интегрирования равен 0, то есть

$$\int_a^a f(x)dx = F(a) - F(a) = 0$$

III. При перестановке пределов интегрирования определенный интеграл меняет свой знак на обратный.

Действительно, переставляя пределы интегрирования, в силу формулы (1), получим $\int_b^a f(x)dx = F(a) - F(b) = -[F(b) - F(a)] = -\int_a^b f(x)dx \quad (2)$

IV. Если отрезок интегрирования $[a,b]$ разбить на конечное число частичных отрезков, то определенный интеграл, взятый по отрезку $[a,b]$ равен сумме определенных интегралов, взятых по всем частичным отрезкам.

Пусть $[a,b] = [a,c] \cup [c,b]$, где $a \leq c \leq b$. Полагая $F'(x)=f(x)$

$$\int_b^a f(x)dx = F(a) - F(b) = [F(c) - F(a)] + [F(b) - F(c)] = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \quad (3)$$

V. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла

$$\int_b^a Af(x)dx = AF(x) \Big|_a^b = AF(b) - AF(a) = A[F(b) - F(a)] = A \int_a^b f(x)dx$$

VI. Определенный интеграл от алгебраической суммы конечного числа непрерывных функций равен такой же алгебраической сумме определенных интегралов от этих функций.

$$\int_a^b [f(x) + g(x) - h(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx - \int_a^b h(x)dx$$

VII. Если подынтегральная функция определенного интеграла непрерывна и неотрицательна, а верхний предел интегрирования больше нижнего или равен ему, то определенный интеграл также неотрицателен.

Пусть $f(x) \geq 0$ при $a \leq x \leq b$. Так как $F'(x) = f(x) \geq 0$, то $F(x)$ – неубывающая функция. В таком случае при $b \geq a$ имеем $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \geq 0$

VIII. Неравенство между непрерывными функциями можно интегрировать поэлементно при условии, что верхний предел интегрирования больше нижнего.

Пусть $f(x) \leq g(x)$ при $a \leq x \leq b$, $f(x), g(x)$ – непрерывные функции на отрезке $[a, b]$.

Так как $g(x) - f(x) \geq 0$, то в силу свойств **VI** и **VIII** имеем

$$\int_a^b [g(x) - f(x)] dx = \int_a^b g(x) dx - \int_a^b f(x) dx \geq 0, \text{ отсюда } \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

Примеры с решениями

1) Вычислить интеграл $\int_0^1 x^2 dx$ как предел интегральной суммы.

Решение

Здесь $f(x) = x^2$, $a = 0, b = 1$; Разделим отрезок $[0; 1]$ на n конгруэнтных частей, тогда $\Delta x_k = (b - a) / n = 1 / n$, и выберем $\gamma_k = x_k$

Имеем $x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{n}, x_2 = \frac{2}{n}, \dots, x_n = \frac{n}{n} = 1;$

$f(\gamma_1) = \left(\frac{1}{n}\right)^2; f(\gamma_2) = \left(\frac{2}{n}\right)^2; \dots, f(\gamma_n) = \left(\frac{n}{n}\right)^2; f(\gamma_k)\Delta x_k = \left(\frac{k}{n}\right)^2 \frac{1}{n}$, следовательно,

$$\int_0^1 x^2 dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2}{n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1+1/n)(2+1/n)}{6} = \frac{1}{3}$$

(Здесь использована формула суммы квадратов натуральных чисел)

2) Вычислить $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}$ по формуле Ньютона-Лейбница

Решение. Имеем $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x \Big|_{\pi/6}^{\pi/4} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$

3) Оценить интеграл $\int_{10}^{18} \frac{\cos x dx}{\sqrt{1+x^4}}$

Решение. Так как $|\cos x| \leq 1$, то при $x > 10$ получим неравенство $\left| \frac{\cos x}{\sqrt{1+x^4}} \right| < 10^{-2}$

Следовательно, $\left| \int_{10}^{18} \frac{\cos x dx}{\sqrt{1+x^4}} \right| < 8 \cdot 10^{-2} < 10^{-1} = 0,1.$

Примеры для самостоятельного решения

1. Вычислить интеграл $\int_0^1 x dx$ как предел интегральной суммы.

2. Вычислить интеграл $\int_0^1 e^x dx$ как предел интегральной суммы.

3. Оценить интеграл $\int_0^1 x(1-x)^2 dx$

4. Оценить интеграл $\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin x}{x}$

5. Вычислить интегралы

1) $\int_0^1 \frac{x dx}{1+x^4}$; ... 2) $\int_1^2 \frac{e^{1/x}}{x^2}$; ... 3) $\int_1^3 x^3 \sqrt{x^2-1} dx$; ... 4) $\int_0^{\pi/3} \cos^3 x \sin 2x dx$; .. $\int_0^{\pi/4} \frac{x + \sin x}{1 + \cos x} dx$