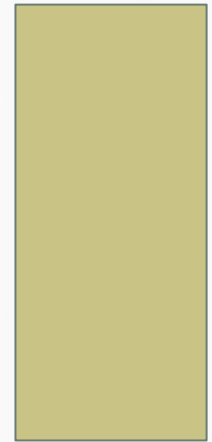


**"РАЗЛИЧНЫЕ СПОСОБЫ  
РЕШЕНИЯ ЗАДАНИЙ №13  
ЕГЭ"**



- **Анализируя результаты ЕГЭ по математике, нужно отметить, что многие учащиеся не приступают к выполнению заданий из группы С, а если выполняют, то часто допускают ошибки. Причин здесь много. Одна из них недостаточное количество самостоятельно прорешенных заданий, не анализируются допущенные ошибки, и как правило полученные знания поверхностные, так как в основном рассматриваются только однотипные задания, и методы решений только стандартные.**

- **В задании 13 ЕГЭ по математике профильного уровня требуется решить уравнение и осуществить отбор его корней, удовлетворяющих некоторому условию.**
- **Отбор корней является дополнительным пунктом условия задачи или логически вытекают из структуры самого уравнения. И опыт показывает, что данные ограничения как раз и представляют собой главную трудность для учащихся.**

# РЕШЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Для тригонометрических уравнений применимы общие методы решения (разложение на множители, замена переменной, функционально-графические) и равносильные преобразования общего характера.

# 1. КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ

$$\boxed{1.} \quad 2 \sin^2 \left( \frac{x}{3} \right) - 9 \cos \left( \frac{x}{3} \right) + 3 = 0$$

$$\boxed{2.} \quad (\operatorname{tg}^2 x + 5 \operatorname{tg} x - 6) \cdot \sqrt{-\cos x} = 0$$

## 2. ОДНОРОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

$$1. \quad \sin x - \sqrt{3} \cos x = 0$$

$$2. \quad 3 \sin^2 x + 4 \cos^2 x = 13 \sin x \cdot \cos x$$

$$3. \quad 10 \cos^2 x - 5 \sin 2x = 4$$

### 3. РАЗЛОЖЕНИЕ НА МНОЖИТЕЛИ

**1.**  $6 \sin x \cdot \cos x + \sin 2x \cdot \sin \frac{2}{x} = 0$

**2.** a)  $2 \sin 2x - 4 \cos x - \sin x + 1 = 0$

## 4. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПЕРИОДИЧНОСТИ ФУНКЦИЙ

$$\sin \alpha = \sin \beta \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \beta + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ \alpha = \pi - \beta + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\cos \alpha = \cos \beta \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \beta + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ \alpha = -\beta + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \beta + \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$



**1.** a)  $\cos 6x = \cos 3x$ ;      б)  $x \in [0; \pi]$

**2.** a)  $\sin x = \cos 7x$ ;      б)  $x \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$ .

**3.**  $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} 3x$

**4.** a)  $\cos 2x + \sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = 0$       б)  $x \in \left[0; \frac{5\pi}{2}\right]$

# СПОСОБЫ ОТБОРА КОРНЕЙ

- Арифметический способ
- Алгебраический способ
- Геометрический способ
- Функционально-графический способ

# 1. АРИФМЕТИЧЕСКИЙ СПОСОБ

- Непосредственная подстановка корней в уравнение и имеющиеся ограничения
- Перебор значений целочисленного параметра и вычисление корней

## ПОДСТАНОВКА КОРНЕЙ В ИМЕЮЩИЕСЯ

**Пример 10.** Найти корни уравнения  $\cos x = 0,5$ , удовлетворяющие неравенству  $\sin x \leq 0$ .

**Решение.** Из уравнения  $\cos x = 0,5$  получаем  $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n$ , или  $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ .

Проверим для полученных значений  $x$  выполнение условия  $\sin x \leq 0$ . Для первой серии получаем

$$\sin\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi n\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} > 0.$$

Следовательно, первая серия является «посторонней». Для второй серии получаем

$$\sin\left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi n\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} < 0.$$

**Ответ:**  $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$ .

# ПЕРЕБОР ЗНАЧЕНИЙ ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ПАРАМЕТРА И ВЫЧИСЛЕНИЕ КОРНЕЙ

а) Решите уравнение  $\cos x + \sin x = 0$ .

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$ .

**Решение.**

а)  $\cos x + \sin x = 0 \quad | : \cos x$ ,

$$\operatorname{tg} x = -1, \quad x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

б) Отберем корни уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$ .

Перебирая, подряд значения переменной, обозначающей целые числа, мы должны добиться того, чтобы найти все точки внутри промежутка и по одной точке слева и справа от данного промежутка.

$$n = 0, \quad x = \frac{\pi}{4} \notin \left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$$

$$n = 1, \quad x = \frac{3\pi}{4} \in \left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$$

$$n = 2, \quad x = \frac{7\pi}{4} \in \left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$$

$$n = 3, \quad x = \frac{11\pi}{4} \notin \left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$$

Ответ: а)  $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$ ; б)  $\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ .

## 2. АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ СПОСОБ

- Решение неравенства относительно неизвестного целочисленного параметра и вычисление корней
- Исследование уравнения с двумя целочисленными параметрами (применяется при решении системы уравнений)

# РЕШЕНИЕ НЕРАВЕНСТВА ОТНОСИТЕЛЬНО ПАРАМЕТРА И ВЫЧИСЛЕНИЕ КОРНЕЙ

а) Решите уравнение  $6\cos^2 x - 7\cos x - 5 = 0$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $[-\pi; 2\pi]$ .

**Решение.**

а) Пусть  $y = \cos x$ , то  $6y^2 - 7y - 5 = 0$ .

$$y_1 = -\frac{1}{2}, y_2 = \frac{5}{3} \Rightarrow \cos x = -\frac{1}{2}, \cos x = \frac{5}{3}.$$

$$\cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z},$$

$$\cos x = \frac{5}{3} \Rightarrow \text{корней нет.}$$

б) Отберем корни уравнения, принадлежащие отрезку  $[-\pi; 2\pi]$

$$-\pi \leq -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n \leq 2\pi, n \in \mathbb{Z}$$

$$-\frac{1}{6} \leq n \leq \frac{4}{3} \Rightarrow \text{при } n = 0, x = -\frac{2\pi}{3} \text{ и при } n = 1, x = \frac{4\pi}{3}.$$

$$-\pi \leq \frac{2\pi}{3} + 2\pi k \leq 2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$-\frac{5}{6} \leq k \leq \frac{2}{3} \Rightarrow \text{при } k = 0, x = \frac{2\pi}{3}.$$

Ответ: а)  $x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ , б)  $-\frac{2\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}$ .



# ИССЛЕДОВАНИЕ УРАВНЕНИЯ С ДВУМЯ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Решить систему уравнений 
$$\begin{cases} \cos 2x = 1, \\ \sin \frac{5x}{2} = 1, \end{cases}$$

**Решение.** При решении систем тригонометрических уравнений необходимо использовать разные обозначения целочисленных переменных при решении разных уравнений системы.

$$\begin{cases} \cos 2x = 1, & \begin{cases} x = \pi n, \\ \sin \frac{5x}{2} = 1, & \begin{cases} x = \frac{\pi}{5} + \frac{4\pi m}{5}, m, n \in Z \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

Найдем такие целые значения  $m$  и  $n$ , при которых решения в полученных сериях совпадают. Приравнявая выражения для  $x$  в обеих сериях, получим  $\pi n = \frac{\pi}{5} + \frac{4\pi m}{5}$ ,

$$5n = 1 + 4m.$$

$$4m = 5n - 1, \quad m = \frac{5n - 1}{4} = n + \frac{n - 1}{4}.$$

Для существования целых решений число  $\frac{n-1}{4}$  должно быть целым. Обозначим его

буквой  $k$ , тогда  $\frac{n-1}{4} = k, n = 4k + 1, k \in Z$ .

$$m = \frac{5n - 1}{4} = \frac{20k + 4}{4} = 5k + 1, k \in Z$$

Подставляя в систему значения  $m$  и  $n$ , получим общее решение  $x = \pi(4k + 1), k \in Z$

Ответ:  $x = \pi(4k + 1), k \in Z$ .



### 3. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СПОСОБ

- Отбор корней тригонометрического уравнения на числовой окружности
- Отбор корней тригонометрического уравнения на числовой прямой

# ОТБОР КОРНЕЙ НА ЧИСЛОВОЙ ОКРУЖНОСТИ

а) Решите уравнение  $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + 2x\right) = \cos x$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$

**Решение.**

а)  $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + 2x\right) = \cos x$

$$\sin 2x = \cos x$$

$$2\sin x \cos x - \cos x = 0$$

$$\cos x (2\sin x - 1) = 0$$

$$\cos x = 0 \quad \text{или} \quad 2\sin x - 1 = 0$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \quad \text{или} \quad \sin x = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z},$$

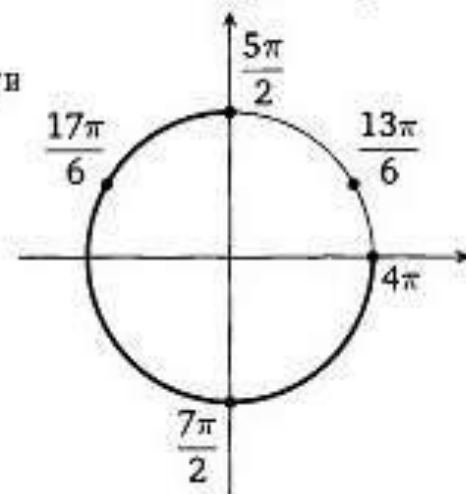
$$x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$$

б) Отберем корни уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$ .

Для этого на единичной окружности отметим дугу равную данному отрезку и точки, соответствующие корням данного уравнения.

Итак, корнями, принадлежащими данному отрезку, являются

числа  $\frac{5\pi}{2}; \frac{17\pi}{6}; \frac{7\pi}{2}$ .



Ответ: а)  $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}, x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}, x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z},$

б)  $\frac{5\pi}{2}; \frac{17\pi}{6}; \frac{7\pi}{2}.$

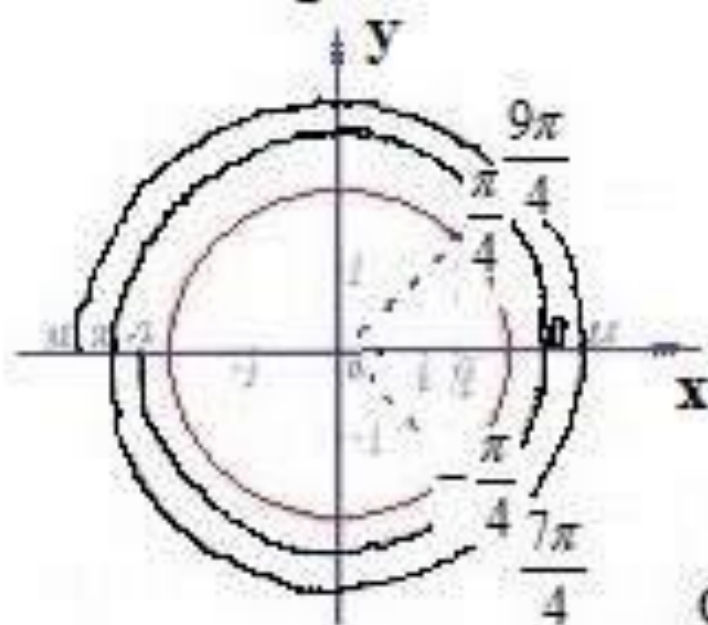
а) Решить уравнение  $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $[-\pi; 3\pi]$

Решение.

а)  $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}, x = \pm \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

б)  $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2},$



Ответ: а)  $x = \pm \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z};$

б)  $-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}; \frac{9\pi}{4}.$

# ОТБОР КОРНЕЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ НА ЧИСЛОВОЙ ПРЯМОЙ

а) Решите уравнение  $\frac{\cos \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{3}} = 0$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку.  $(-\pi; 11\pi]$

Решение.

а) Из условия получаем 
$$\begin{cases} \cos \frac{x}{2} = 0, \\ \sin \frac{x}{3} \neq 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pi + 2\pi k \\ x \neq 3\pi n, k, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Следует исключить те значения параметра  $k$ , которые приводят к совпадению корней числителя и знаменателя.

Приравняем значения  $x$  из системы. Решим диофантовое уравнение через частное решение.

$$\pi + 2\pi k = 3\pi n, k, n \in \mathbb{Z} : \pi$$

$$1 + 2k = 3n,$$

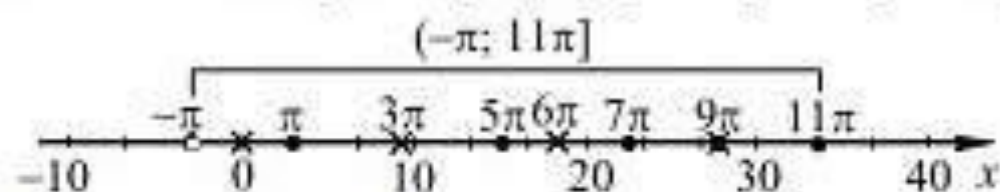
$$3n - 2k = 1, \text{ частное решение } n_0 = 1, k_0 = 1. \quad 3n - 2k = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 1, \quad 3n - 3 \cdot 1 = 2k - 2 \cdot 1,$$

$$3(n-1) = 2(k-1), \quad \begin{cases} n-1 = 2t \\ k-1 = 3t, t \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow$$

Следовательно,  $x = \pi + 2\pi k, k \neq 3t + 1, k, t \in \mathbb{Z}$

Следовательно,  $x = \pi + 2\pi k$ ,  $k \neq 3t + 1$ ,  $k, t \in \mathbb{Z}$

б) На числовой прямой рассмотрим промежуток  $(-\pi; 11\pi]$ .



На числовой прямой отметим черными точками корни, принадлежащие полуинтервалу  $(-\pi; 11\pi]$ . Это числа  $\pi, 5\pi, 7\pi, 11\pi$ .

Ответ: а)  $x = \pi + 2\pi k$ ,  $k \neq 3t + 1$ ,  $k, t \in \mathbb{Z}$

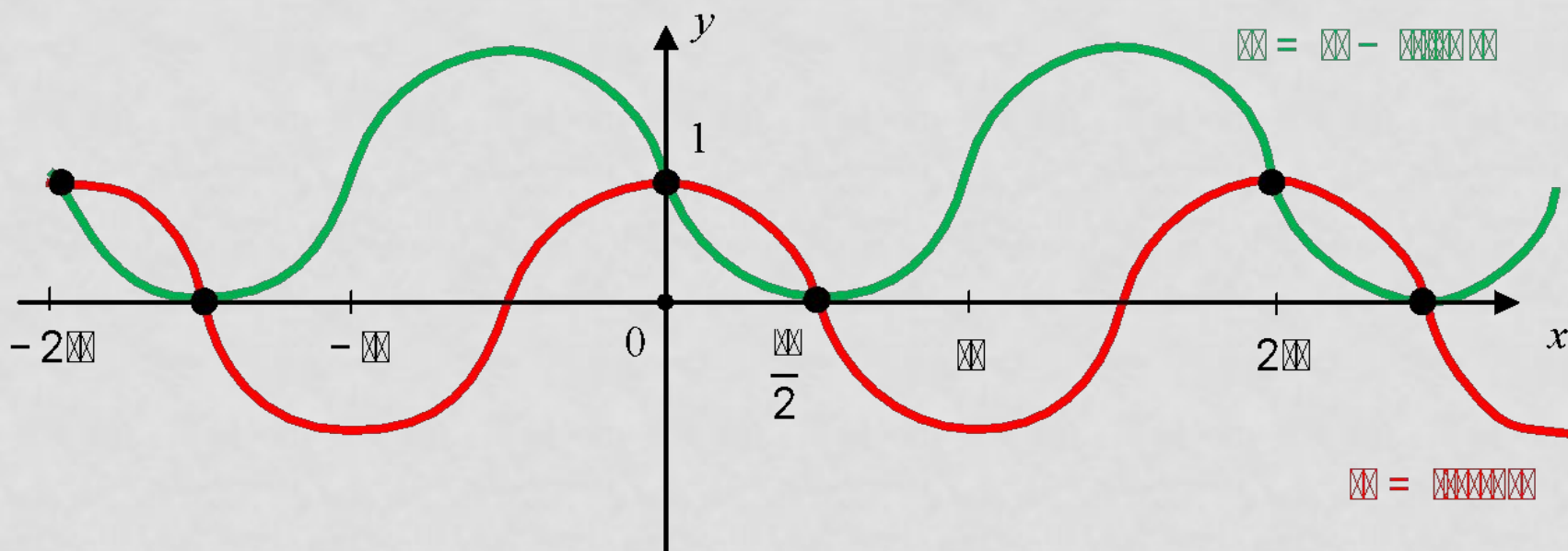
б)  $\pi, 5\pi, 7\pi, 11\pi$

# 4. ФУНКЦИОНАЛЬНО ГРАФИЧЕСКИЙ СПОСОБ

Решить уравнение  $\cos x + \sin x = 1$

В одной системе координат строим графики  $y = \cos x$  и  $y = 1 - \sin x$

Точки пересечения графиков являются решением этого уравнения.



а) Решите уравнение:

$$4 \sin^3 x = \cos \left( x - \frac{5\pi}{2} \right).$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[ \frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2} \right]$ .

$$4 \sin^3 x = \sin x.$$

$$4 \sin^3 x - \sin x = 0$$

$$\sin x(4 \sin^2 x - 1) = 0.$$

$$\sin x = 0$$

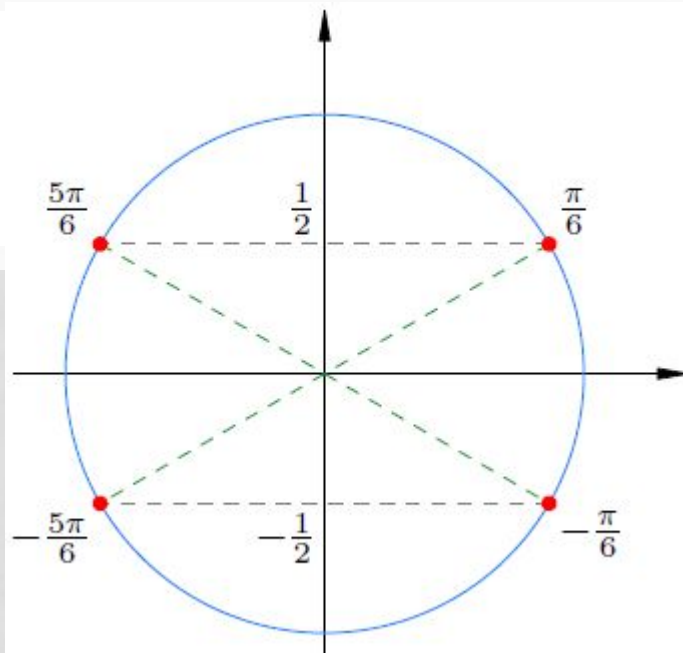
$$x = \pi n \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

$$4 \sin^2 x - 1 = 0$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{4}$$

$$\sin x = \pm \frac{1}{2}.$$





Решения уравнения  $4 \sin^2 x - 1 = 0$

Эти четыре точки можно описать одной формулой

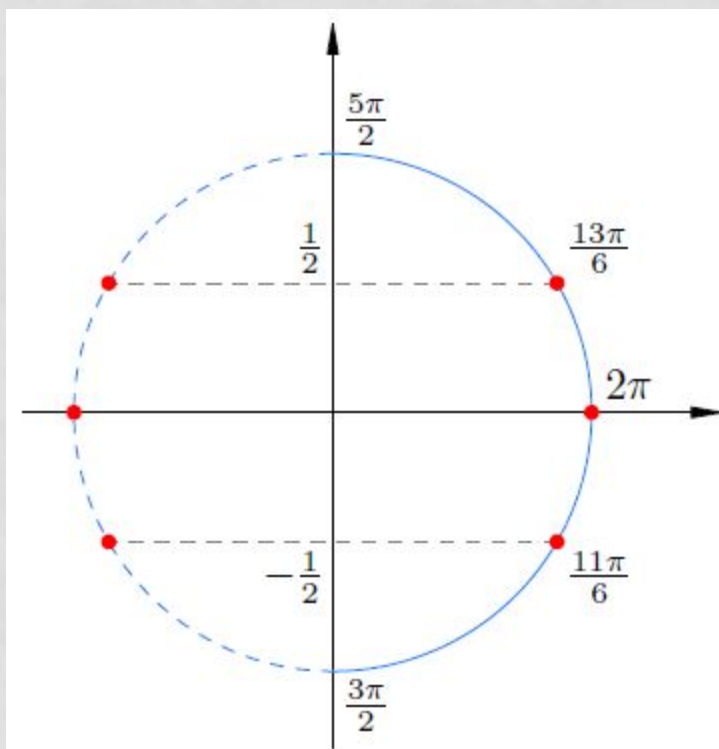
$$x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi n \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

Мы выполнили пункт а) задачи. Решения данного уравнения:

$$x = \pi n, \quad x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi n \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

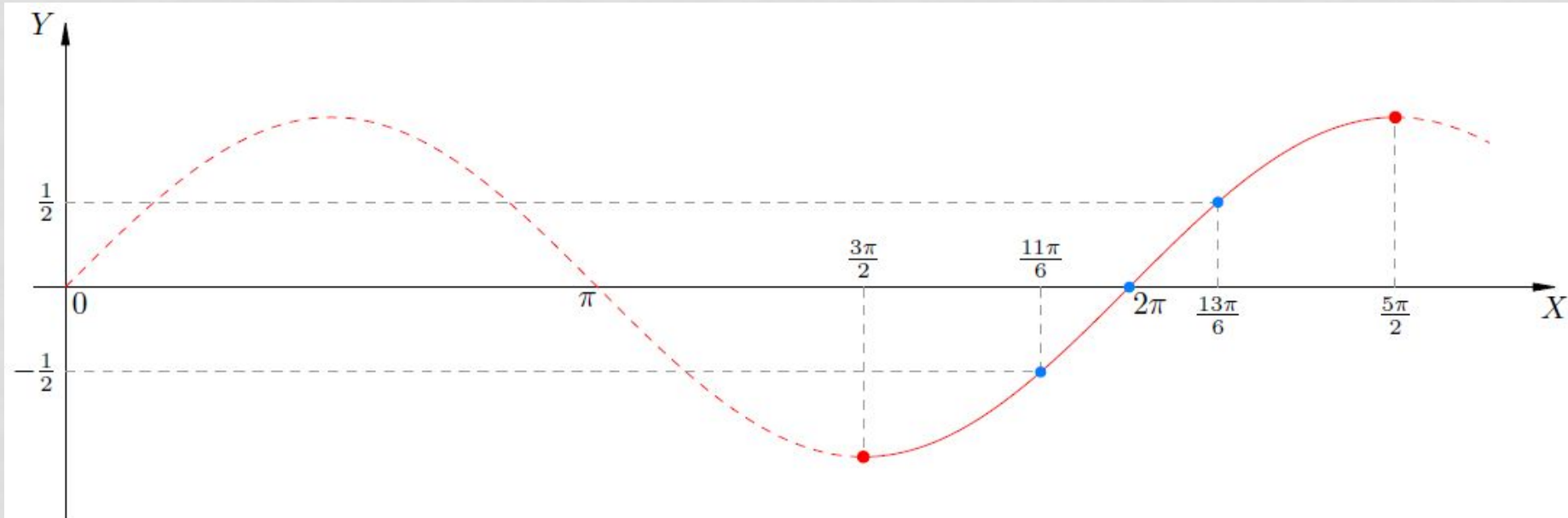


*Первый способ. Отбор корней с помощью тригонометрической окружности.*



Данный способ — простой, наглядный и универсальный.

*Второй способ. Отбор корней с помощью графика.*



### *Третий способ. Отбор корней с помощью двойных неравенств.*

Берём первую серию решений ( $x = \pi n$ ) и заключаем её в двойное неравенство:

$$\frac{3\pi}{2} \leq \pi n \leq \frac{5\pi}{2}.$$

Сокращаем на  $\pi$ :

$$\frac{3}{2} \leq n \leq \frac{5}{2}.$$

С учётом того, что  $n$  — целое, получаем единственную возможность  $n = 2$ . Стало быть, данная серия даёт нам решение  $2\pi$  на отрезке  $[3\pi/2; 5\pi/2]$ .

Вторую серию решений ( $x = \pm\pi/6 + \pi n$ ) мы для удобства разобьём на две:

$$x_1 = \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad x_2 = -\frac{\pi}{6} + \pi n.$$

Сначала имеем:

$$\frac{3\pi}{2} \leq \frac{\pi}{6} + \pi n \leq \frac{5\pi}{2}.$$

Снова сокращаем на  $\pi$ :

$$\frac{3}{2} \leq \frac{1}{6} + n \leq \frac{5}{2},$$

и вычитаем  $1/6$  из всех частей неравенства:

$$\frac{4}{3} \leq n \leq \frac{7}{3}.$$

Для  $n$  получается единственное значение:  $n = 2$ . Соответственно, серия  $x_1$  даёт на отрезке  $[3\pi/2; 5\pi/2]$  следующее решение:

$$\frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{13\pi}{6}.$$

Остаётся разобраться с серией  $x_2$ . Имеем:

$$\frac{3\pi}{2} \leq -\frac{\pi}{6} + \pi n \leq \frac{5\pi}{2}.$$

После сокращения на  $\pi$  и прибавления  $1/6$  получим:

$$\frac{5}{3} \leq n \leq \frac{8}{3}.$$

И снова единственный случай:  $n = 2$ . Тогда серия  $x_2$  даёт:

$$-\frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{11\pi}{6}.$$

Ответ: а)  $\pi n, \pm \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ ; б)  $2\pi, \frac{11\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}$ .

а) Решите уравнение:

$$2 \log_2^2 (2 \sin x) - 7 \log_2 (2 \sin x) + 3 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $[\frac{\pi}{2}; 2\pi]$ .

а) Используем замену  $\log_2 (2 \sin x) = t$ . Тогда уравнение принимает вид:

$$2t^2 - 7t + 3 = 0.$$

Дискриминант данного уравнения равен:

$$D = b^2 - 4ac = 7^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 25.$$

Тогда корни уравнения равны:

$$t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \begin{cases} t_1 = \frac{-(-7) - \sqrt{25}}{2 \cdot 2} \\ t_2 = \frac{-(-7) + \sqrt{25}}{2 \cdot 2} \end{cases} = \begin{cases} t_1 = \frac{1}{2} \\ t_2 = 3. \end{cases}$$

Обратная подстановка приводит к следующему результату:

$$\begin{cases} \log_2 (2 \sin x) = \frac{1}{2} \\ \log_2 (2 \sin x) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \sin x = 2^{\frac{1}{2}} \\ 2 \sin x = 2^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \sin x = \sqrt{2} \\ 2 \sin x = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin x = 4. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin x = 4. \end{cases}$$

Второе уравнение не имеет корней, поскольку  $0 \leq |\sin x| \leq 1$ .  
Решением второго уравнения является серия:

$$x = (-1)^n \cdot \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Получаем следующую серию:

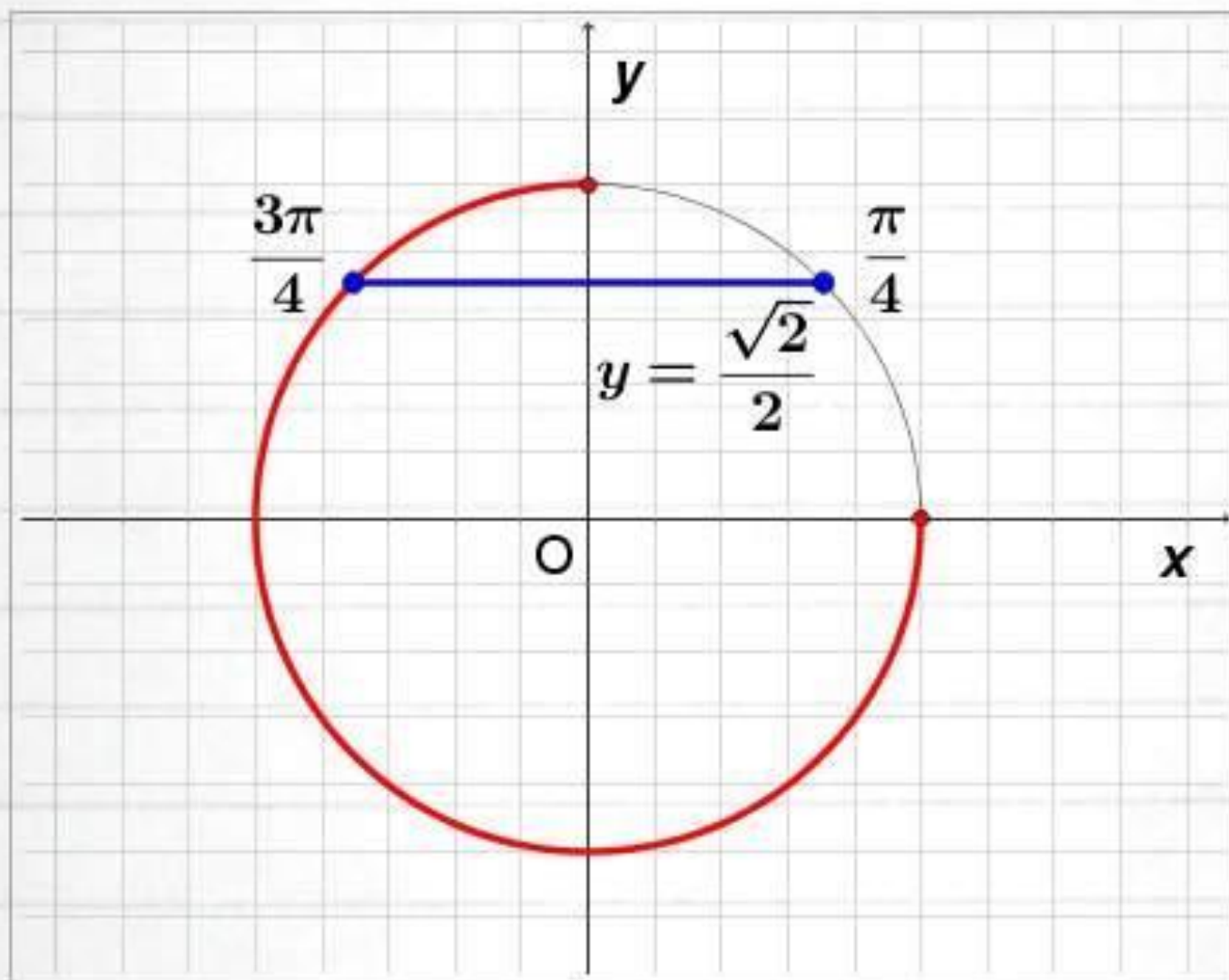
$$x = (-1)^n \cdot \left(\frac{\pi}{4}\right) + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Эту серию можно записать иначе:

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$



б) Осуществляем отбор решений с помощью единичной окружности. На рисунке множество  $[\frac{\pi}{2}; 2\pi]$  выделено красным цветом:



Из рисунка видно, что подходит только один корень:  $x = \frac{3\pi}{4}$ .



а) Решите уравнение:

$$2 \log_2^2 (2 \sin x) - 7 \log_2 (2 \sin x) + 3 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $[\frac{\pi}{2}; 2\pi]$ .

Ответ: а)  $x = (-1)^n \left(\frac{\pi}{4}\right) + \pi n, n \in \mathbb{Z},$

б)  $\frac{3\pi}{4}.$

# А.Эйнштейн говорил так...

«Мне приходится делить время между политикой и уравнениями. Однако, уравнения, по-моему, важнее. Политика только для данного момента, а уравнения будут существовать вечно.»