

Лекция Вычислительная механика

**ОСНОВЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ  
МЕХАНИКИ**

К.т.н., доцент каф. ВМиМ  
Каменских Анна Александровна  
239-15-64

## Основная литература

Методы конечных элементов: пер. с англ. / К.-Ю. Бате. – Москва: Физматлит, 2010. – 1022 с.

Самарский А.А. Теория разностных схем: учебное пособие для вузов / А.А. Самарский .– 1, 2, 3-е изд. – Москва: Наука, 1983. – 616 с.

Сегерлинд Л.Дж. Применение метода конечных элементов: пер. с англ. / Л. Д. Сегерлинд; Под ред. Б. Е. Победри. – Москва: Мир, 1979 .— 392 с.

Методы вычислительной математики: учебное пособие / М.Г. Бояршинов; Пермский государственный технический университет. – Пермь: Изд-во ПГТУ, 2008. – 420 с.

Зенкевич О. Конечные элементы и аппроксимация: пер. с англ. / О. Зенкевич, К. Морган; Под ред. Н.С. Бахвалова. – Москва: Мир, 1986. – 318 с.

Образцов И.Ф. Метод конечных элементов в задачах строительной механики летательных аппаратов: учебное пособие для вузов / И.Ф. Образцов, Л. М. Савельев, Х. С. Хазанов. – Москва: Высш. шк., 1985. – 392 с.

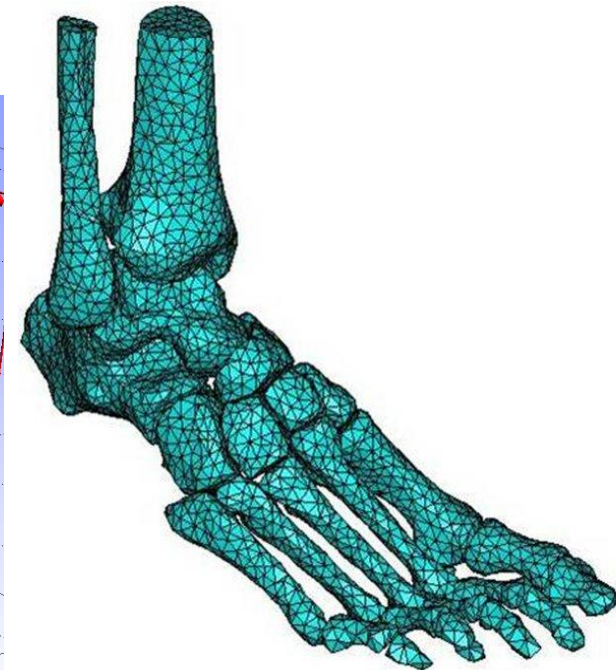
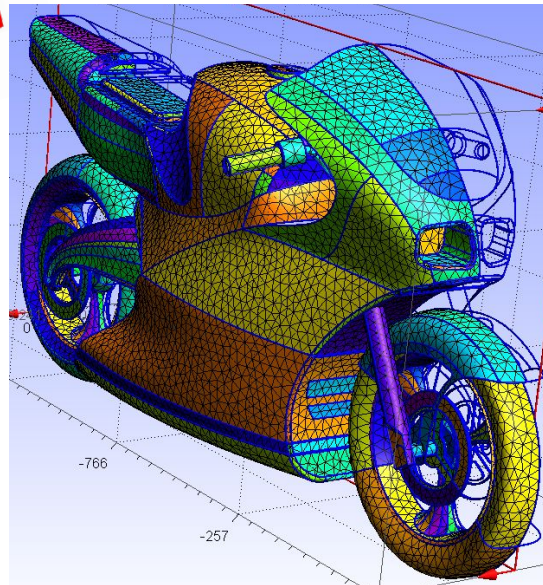
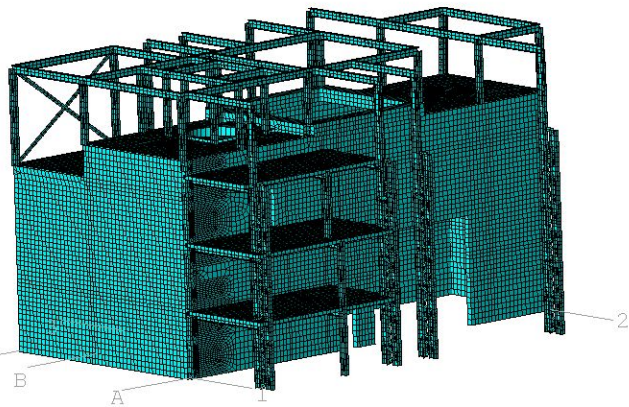
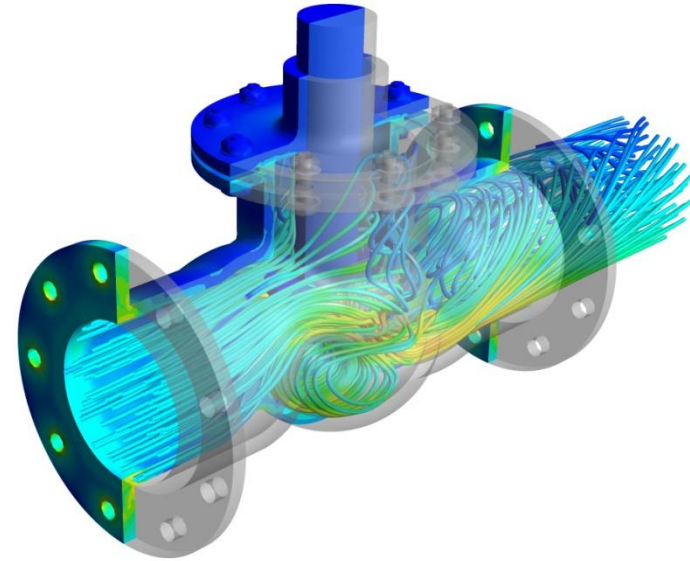
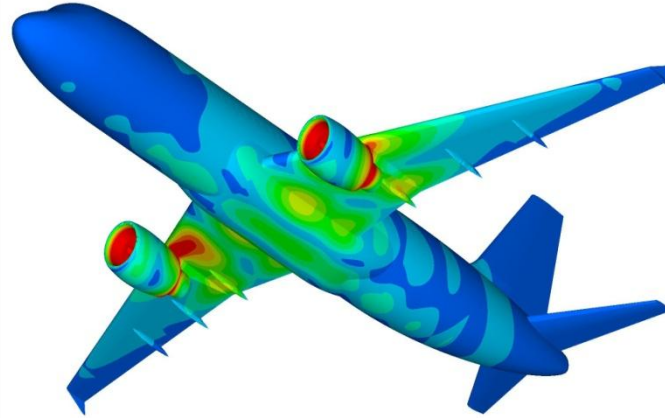
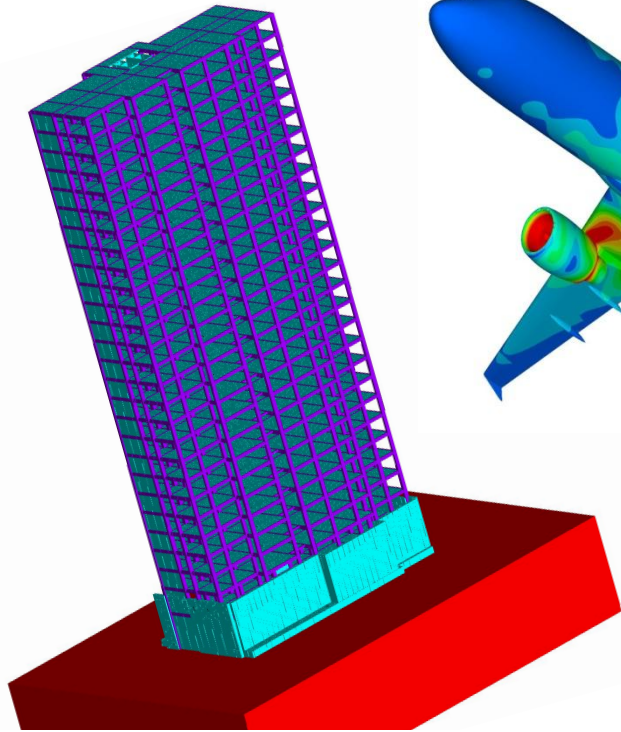
## Дополнительная литература

Численные методы: учебное пособие для вузов / М.Г. Бояршинов; Пермский национальный исследовательский политехнический университет. – Пермь: Изд-во ПГТУ, 1998. Ч.5. – 2014. – 204 с.

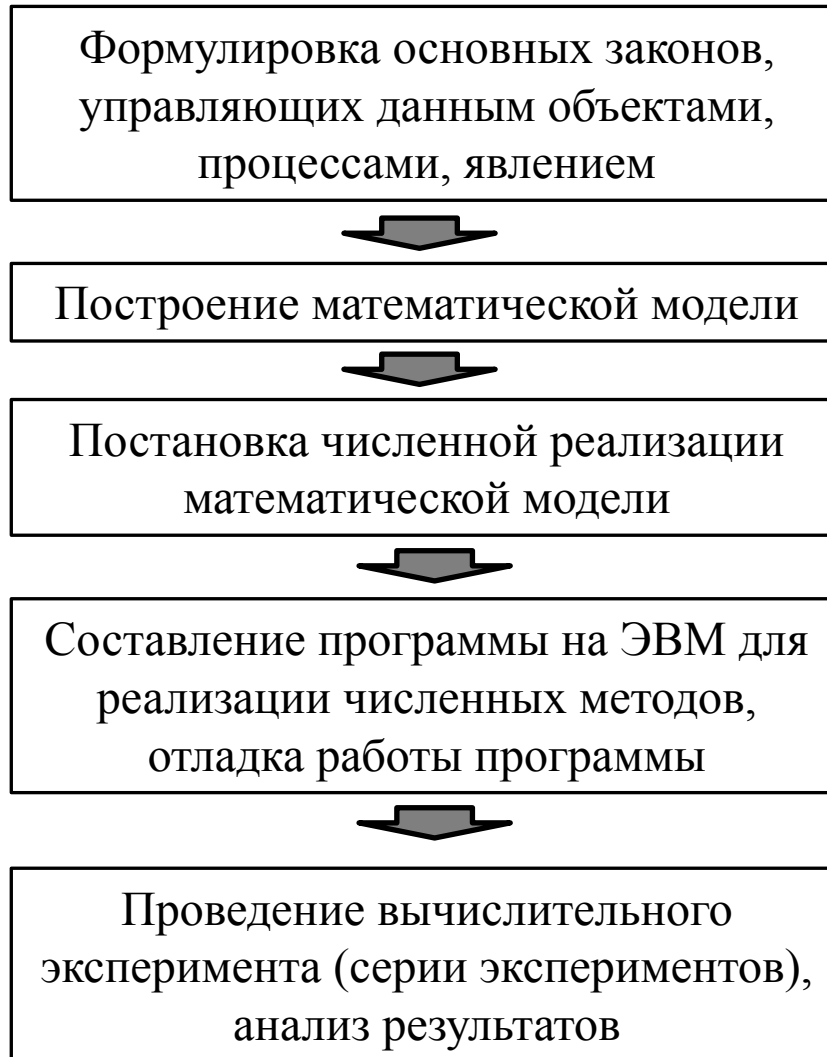
Голованов А.И. Метод конечных элементов в статике и динамике тонкостенных конструкций / А. И. Голованов, О. Н. Тюленева, А. Ф. Шигабутдинов. – М.: Физматлит, 2006. – 392 с.

Победря Б.Е. Численные методы в теории упругости и пластичности: учебное пособие для вузов / Б. Е. Победря; Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова. – 2-е изд. – Москва: Изд-во МГУ, 1995. – 366 с.

**Вычислительная механика** – раздел механики сплошных сред, в котором строятся **конечномерные модели** сплошных сред, используется **компьютерное моделирование** и **численные методы** для решения задач механики деформируемого твердого тела и механики жидкости и газа.



**Вычислительный эксперимент** – технология исследования сложных проблем, основанная на построении и анализе с помощью ЭВМ математических моделей изучаемого объекта.



## Три основных численных метода вычислительной механики



**Метод конечных разностей (МКР)** – метод численного решения краевых задач для дифференциальных уравнений называют также методом сеток. На рассчитываемую область наносится сетка с узлами. Все производные, входящие в дифференциальные уравнения и граничные условия, приближенно заменяются соответствующими разностными отношениями (по формулам численного дифференцирования) и, таким образом, выражаются через неизвестные узловые значения искомой функции. В результате приходим к системе линейных алгебраических уравнений относительно значений функций в узлах сетки.

**Метод конечных элементов (МКЭ)** – это метод приближённого численного решения физических задач. В его основе лежат две главные идеи: дискретизация исследуемого объекта на конечное множество элементов и кусочно-элементная аппроксимация исследуемых функций.

**Метод граничных элементов (МГЭ)** – метод предусматривает предельных переход от исходной постановки задачи для дифференциальных уравнений к соотношениям, связывающим неизвестные функции на границе области или на ее части. Эти соотношения представляют собой граничные интегральные уравнения, дискретный аналог которых дает САУ относительно узловых неизвестных относящихся к узлам на поверхности тела.

# Схематически любой численный метод можно представить в виде

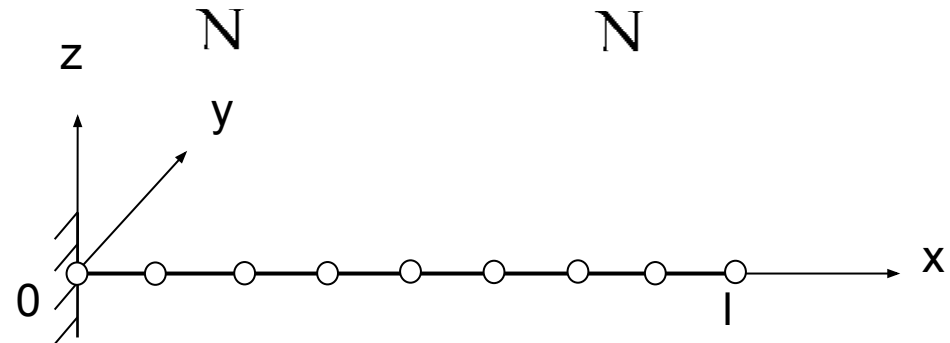
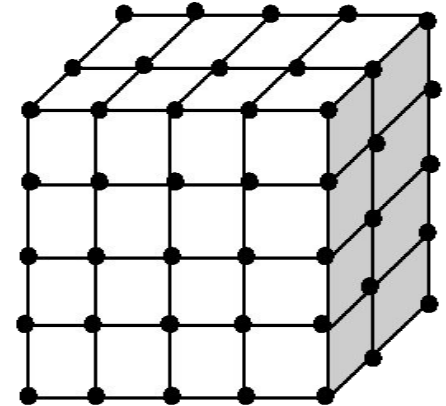
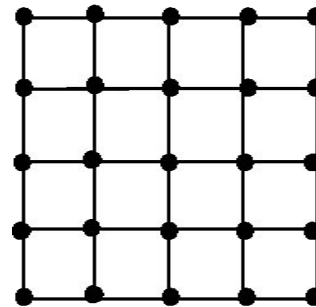
Построение дискретного аналога области изменения аргумента



Дискретизация математической модели, в результате которой получается алгебраический аналог математической модели (система алгебраических уравнений)



Решение СЛАУ любым методом: метод Гаусса, метод прогонки, метод LU-разложения, итерационные методы решения СЛАУ (Зейделя, простых итераций)



**Численный метод сходится**, если при неограниченном росте числа алгебраических уравнений (узловых неизвестных) решение дискретной задачи стремится к решению исходной задачи.

**Численный метод называют устойчивым**, если в процессе счета погрешность округления не накапливается и не искажает значительно конечный результат.

## Метод конечных разностей (МКР)

Область непрерывного изменения аргумента (отрезок, прямоугольник и т.д.) заменяется конечным (дискретным) множеством точек (узлов), называемым *сеткой*.

Вместо функции непрерывного изменения аргумента рассматриваются функции дискретного аргумента, определенные в узлах сетки и называемые *сеточными функциями*.

Производные, входящие в дифференциальные уравнения и краевые условия, заменяются (аппроксимируются) разностными соотношениями, т.е. линейными комбинациями значений сеточных функций в некоторых узлах сетки.

В результате краевая задача для дифференциального уравнения заменяется системой линейных, если исходная задача была линейной, алгебраических уравнений (системе разностных уравнений) – *разностной схемой*.

Как выбрать сетку?

Как написать разностную схему?

Насколько хорошо разностная схема аппроксимирует исходную задачу?

Устойчива ли разностная схема и в каком смысле?

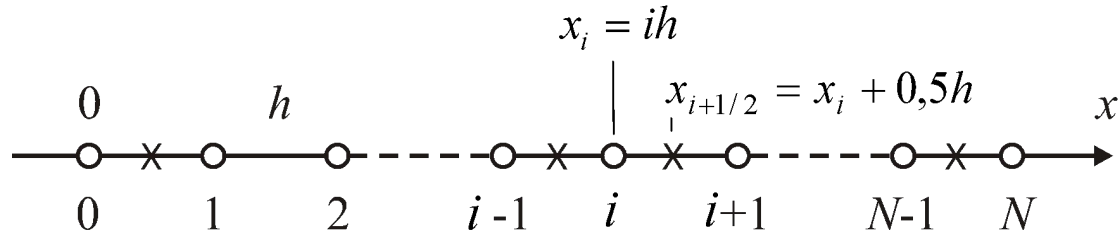
Какова скорость сходимости решения разностной задачи к решению исходной задачи?

# Сетки и сеточные функции

*Разностная сетка* - конечное множество точек заменяющее область непрерывного изменения аргумента.

Сами точки – *узлы сетки*, а функции, определенные на этой сетке, - *сеточными функциями*.

## Равномерная сетка на отрезке



Множество точек  $x_i = ih, i = 0, 1, 2, \dots, N$  называется равномерной сеткой на отрезке  $[0, l]$  и

обозначается  $\overline{\omega} = \{x_i = ih \mid i = \overline{0, N}\}$ , где  $h$  – шаг сетки.

В качестве области определения сеточных функций кроме узлов, называемых еще *целыми точками*, часто используют *полуцелые точки*  $x_{i+1/2} = x_i + 0,5h$ , отмеченные на рисунке крестиками.

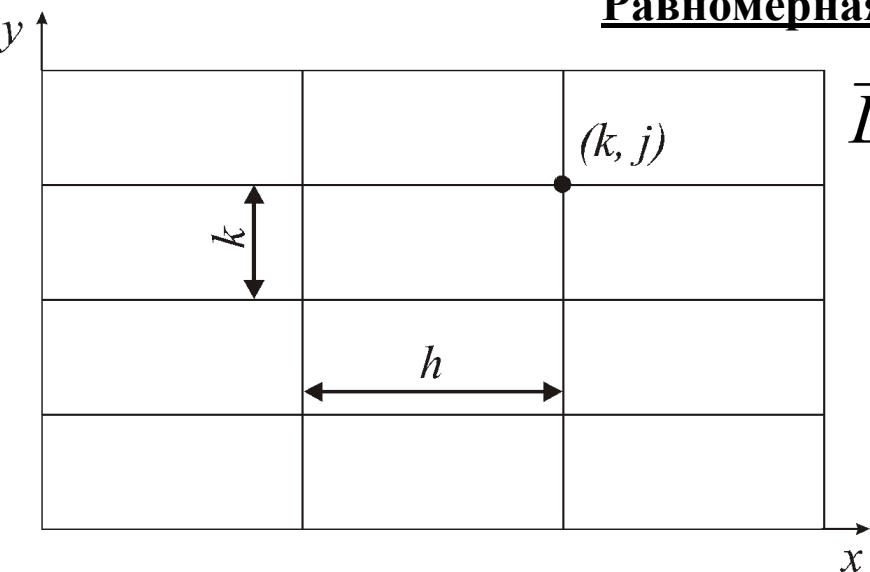
## Неравномерная сетка на отрезке

Рассмотрим тот же отрезок  $[0, l]$ . Введя произвольные точки  $0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{N-1} < l$ , разобьем его на  $N$  частей. Тогда получим сетку с шагом  $h_i = x_i - x_{i-1}$ , который зависит от номера  $i$  узла

$x_i$ . Если  $h_i \neq h_{i+1}$  хотя бы для одного номера  $i$ , то сетку называют неравномерной. 
$$\sum_{i=1}^N h_i = l$$



## Равномерная сетка на плоскости



$$\bar{D} = \{x = (x_1, x_2) \mid 0 \leq x_\alpha \leq l_\alpha, \alpha = 1, 2\}$$

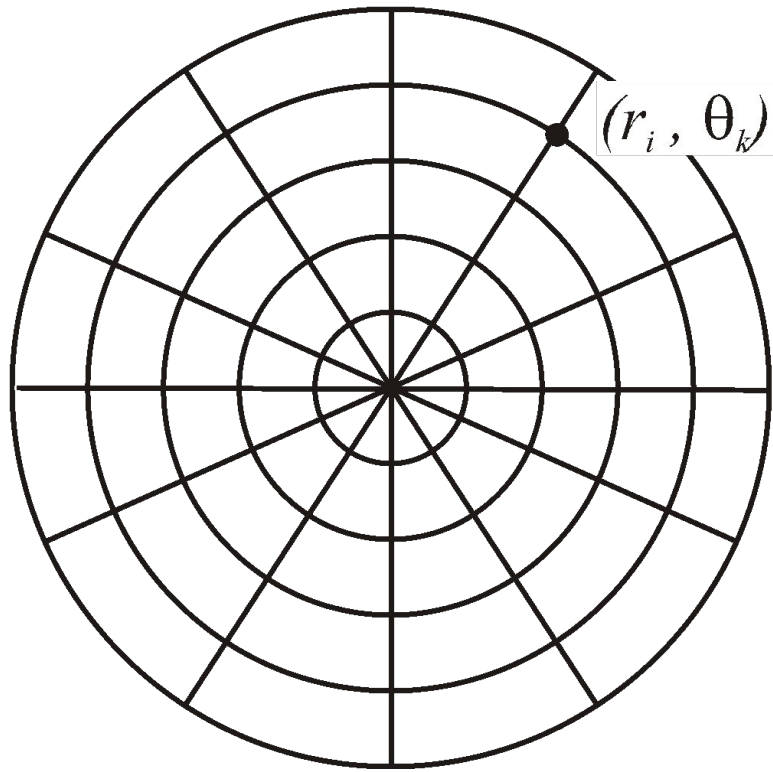
$$D = \{0 \leq x \leq d, 0 \leq y \leq b\}$$

Построим на каждом отрезке  $0 \leq x \leq d, 0 \leq y \leq b$  сетку с шагом  $h = d/N_1$  и  $k = b/N_2$ . Множество узлов  $(x_i, y_j)$  с координатами  $x_i = ih, y_j = jk$  назовём сеткой в прямоугольнике  $D$ .

Построим на каждом отрезке  $0 \leq x_\alpha \leq l_\alpha$  сетку  $\bar{\omega}_\alpha = \{x_{\alpha i_\alpha} = i_\alpha h_\alpha \mid i_\alpha = \overline{0, N_\alpha}\}$  с шагом  $h_\alpha = l_\alpha / N_\alpha$ . Множество узлов  $(x_{1i_1}, x_{2i_2})$  с координатами  $x_{1i_1} = i_1 h_1, x_{2i_2} = i_2 h_2$   $(x_k = kh, k = 0, \dots, N, h = d/N; y_j = jp, j = 0, 1, \dots, M, p = b/M)$  назовём сеткой в прямоугольнике  $\bar{D}$ .

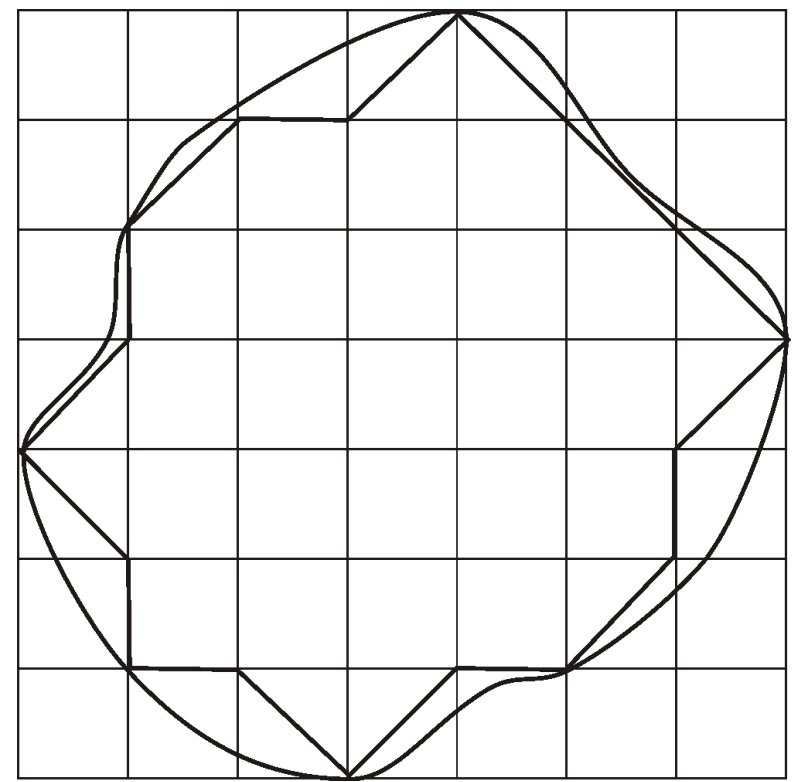
$$\bar{\omega} = \left\{ x = (x_{1i_1}, x_{2i_2}) \mid x_{\alpha i_\alpha} = i_\alpha h_\alpha, i_\alpha = \overline{0, N_\alpha}; \alpha = 1, 2 \right\}$$

Эта сетка равномерна по каждому из переменных  $x$  и  $y$ . Если хотя бы одна из сеток  $\bar{\omega}_\alpha$  неравномерна, то сетка  $\bar{\omega}$  называется неравномерной. Если  $h_1 = h_2$ , то сетка называется квадратной,  $h_1 \neq h_2$  - прямоугольной.



Разностная сетка на плоскости кольца

Область  $G$  представляет собой кольцо, покроем его окружностями  $r_i = R_1 \exp(ih)$ , где  $h = (1/N) \ln(R_2/R_1)$ ,  $i = 0, 1, \dots, N$  и лучами  $\theta_k = kp$ ,  $p = 2\pi/M$ ,  $k = 0, 1, \dots, M-1$ .



Разностная сетка на области сложной формы

Проведем прямые

$$x_{1i_1} = i_1 h_1, \quad i_1 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, h_1 > 0,$$

$$x_{2i_2} = i_2 h_2, \quad i_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, h_2 > 0.$$

Тогда на плоскости получим сетку с узлами  $(i_1 h_1, i_2 h_2)$ ,  $i_1, i_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Эта сетка равномерна по каждому направлению. Нас интересуют только те узлы, которые принадлежат области  $G$  с границей  $\Gamma$   $G = G \cup \Gamma$ .

# Аппроксимация дифференциальных операторов первой и второй производных на равномерной сетке

Рассмотрим возможные способы аппроксимации дифференциального оператора вида:

$$A[T] = dT / dx \quad (1)$$

определенного на множестве непрерывных функций в области  $G = \{d < x < b\}$ , имеющих ограниченные производные третьего порядка включительно.



$$dT / dx = \lim_{h \rightarrow 0} [T(x+h) - T(x)] / h$$

$$dT / dx \approx [T(x+h) - T(x)] / h$$



Правое разностное  
отношение

$$(2) \quad T_{x,k} = (T_{k+1} - T_k) / h$$

Левое разностное  
соотношение

$$T_{\bar{x},k} = (T_k - T_{k-1}) / h \quad (3)$$

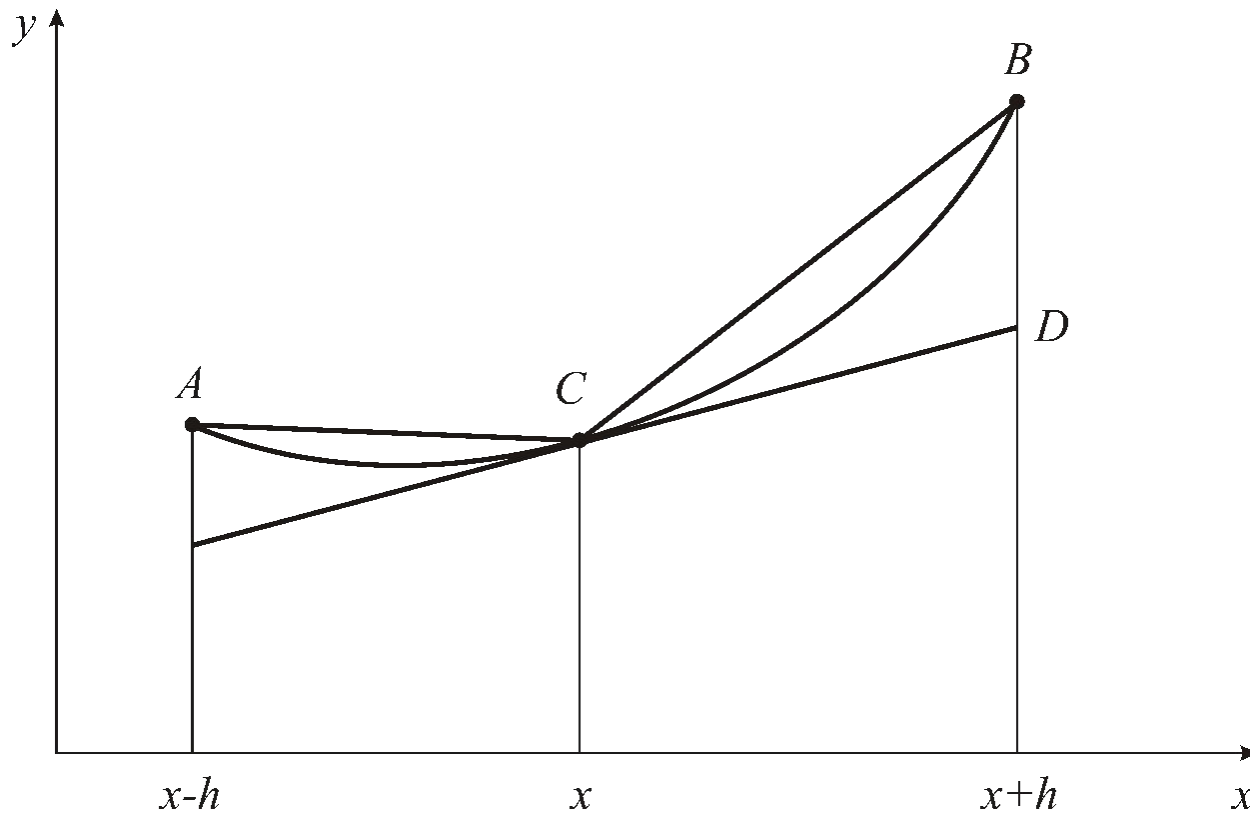
Линейная комбинация (2) и (3)

$$\sigma T_{x,k} + (1 - \sigma) T_{\bar{x},k} \quad (4)$$

При  $\sigma = 1/2$  получим центральное  
разностное соотношение

$$T_{x,k} = (T_{k+1} - T_{k-1}) / (2h) \quad (5)$$

# Геометрическая интерпретация разностей



Линия D отражает истинное значение производной в точке C, правую разность – линия CB, левую – AC, центральную – AB. Значение тангенса угла наклона прямой AB ближе к значению тангенса прямой D.

При замене оператора  $A[T]$  разностным выражением (2)-(4) допускается погрешность  $\psi_h(x) = A_h[T_h] - (A[T])_h$  называемая *погрешностью аппроксимации* оператора  $A$  разностным оператором  $A_h$  в точке  $x$ .

Рассмотрим **аппроксимацию второй производной**  $A[T] = d^2T / dx^2$ . В отличие от первой производной, для которой достаточно двухточечного шаблона, для второй производной выберем **трехточечный шаблон** ( $x_{k-1}, x_k, x_{k+1}$ ).

$$\begin{aligned} T_k'' &= (T_k')' = \frac{T_{k+1}' - T_k'}{h} = \\ &= \frac{(T_{k+1} - T_k)/h - (T_k - T_{k-1})/h}{h} = \frac{T_{k+1} - 2T_k + T_{k-1}}{h^2} \end{aligned}$$