

СТРУКТУРНАЯ МЕХАНИКА КОМПОЗИТОВ

I. КОМПОЗИТНЫЙ МОНОСЛОЙ

1. Основные положения и обозначения
2. Моделирование свойств однонаправленного композита при различных видах нагружения
 - i. Продольное растяжение
 - a. Композит, армированный непрерывными волокнами
 - b. Композит, армированный короткими волокнами
 - ii. Трансверсальное растяжение
 - iii. Сдвиг в плоскости волокон
 - iv. Продольное сжатие
 - v. Трансверсальное сжатие
3. Моделирование свойств хаотично армированного композита
4. Моделирование свойств тканевого композита
5. Характеристики упругости композитного монослоя
 - i. Композит, армированный непрерывными волокнами
 - ii. Композит, армированный короткими волокнами
 - iii. Тканевый композит
 - iv. Характеристики однонаправленного композитного монослоя в направлении θ°
 - v. Хаотично армированный композит
6. Связь между напряжениями и деформациями
 - i. Закон Гука для изотропного материала
 - ii. Особенности деформирования ортотропных материалов
 - iii. Закон Гука для ортотропного материала в главной системе координат
 - iv. Закон Гука для ортотропного материала в произвольной системе координат

II. СЛОИСТЫЙ КОМПОЗИТ

1. Основные положения теории слоистых пластин
2. Деформации слоистого композита
3. Силы и моменты, действующие на слоистый композит
4. Матрицы жесткости слоистого композита
5. Деформация и кривизна срединной плоскости
6. Напряжения и деформации в слоях композита

III. ПРОГНОЗИРОВАНИЕ РАЗРУШЕНИЯ

1. Теории прочности однонаправленного композита
 - i. Теория максимальных напряжений
 - ii. Теория максимальных деформаций
 - iii. Теория Аззи-Цая-Хилла
 - iv. Теория Цая-Бу
2. Методы прогнозирования прочности слоистого композита
 - i. Метод последовательного разрушения слоев
 - ii. Метод прогнозирования прочности слоистого композита с учетом накопления микрповреждений
3. Метод оценки прочности хаотично армированных композитов
 - i. Подход Хана
 - ii. Подход Хальпина-Кардоса

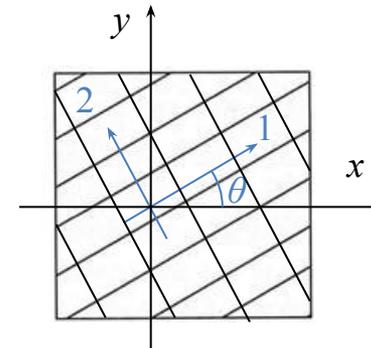
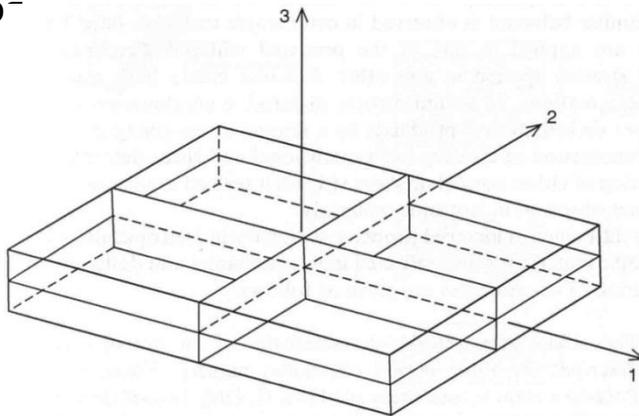
I. КОМПОЗИТНЫЙ МОНОСЛОЙ

1. Основные положения и обозначения

КОМПОЗИТНЫЙ МОНОСЛОЙ – это тонкий слой материала, представленный однонаправленным, хаотично армированным или тканевым композитом

Основные определения:

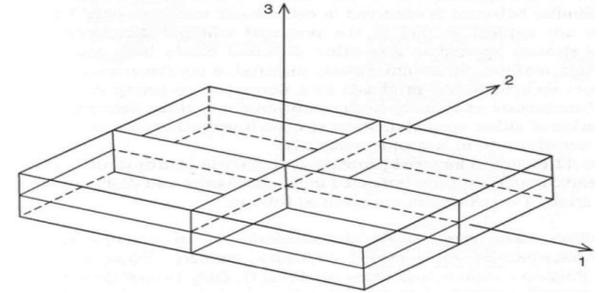
- В общем случае композитный монослой представляет ортотропный материал, у которого имеется 3 плоскости симметрии: 1-2, 2-3 и 1-3 (исключение составляет хаотично армированный материал)
- Плоскость 1-2 – *плоскость армирования*
- Оси 1, 2 и 3 – *главные оси ортотропии* (у однонаправленного монослоя главными осями ортотропии в плоскости армирования являются оси L и T , определяющие соответственно продольное и трансверсальное направления)
- Оси x и y в общем случае представляют направления нагружения композита
- Угол θ между осями x и 1, отложенный против часовой стрелки, называют углом ориентации монослоя



I. КОМПОЗИТНЫЙ МОНОСЛОЙ

1. Основные положения и обозначения

Межслойные компоненты тензоров напряжений и деформаций $\sigma_{33}, \tau_{31}, \tau_{32}$, а также $\varepsilon_{33}, \gamma_{31}$, и γ_{32} в рассмотрение композитного монослоя обычно не включают, сохраняя в тензорах напряжений и деформаций только внутрислойные компоненты:



Напряжения в главных осях ортотропии {1, 2}:
2}:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \end{bmatrix}$$

σ_{11} и σ_{22} – нормальные напряжения
 τ_{12} – сдвиговое (касательное) напряжение

Напряжения в осях нагружения {x, y}:
y}:

$$[\sigma_\theta] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}$$

σ_{xx} и σ_{yy} – нормальные напряжения
 τ_{xy} – сдвиговое (касательное) напряжение

Деформации в главных осях ортотропии {1, 2}:
2}:

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12}/2 \end{bmatrix}$$

ε_{11} и ε_{22} – линейные деформации
 γ_{12} – угол сдвига (сдвиговая деформация)

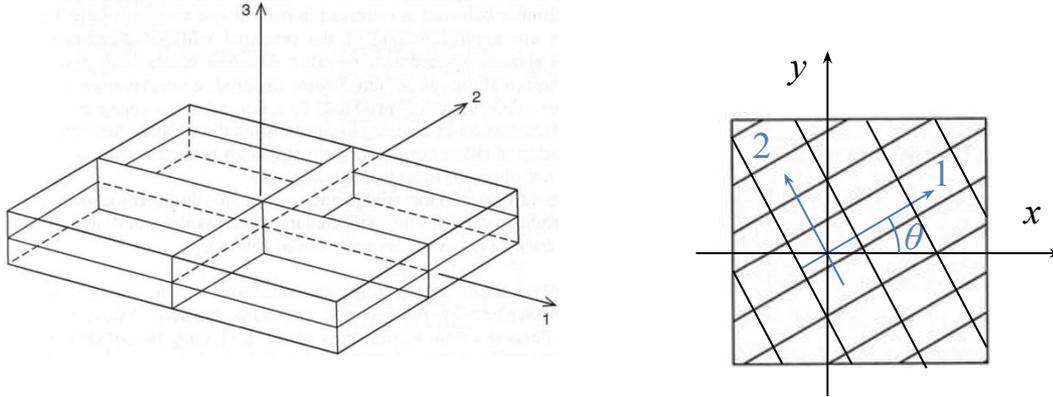
Деформации в осях нагружения {x, y}:
y}:

$$[\varepsilon_\theta] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy}/2 \end{bmatrix}$$

ε_{xx} и ε_{yy} – линейные деформации
 γ_{xy} – угол сдвига (сдвиговая деформация)

I. КОМПОЗИТНЫЙ МОНОСЛОЙ

1. Основные положения и обозначения



Характеристики прочности

композиционного монослоя в главных осях ортотропии {1, 2}:

- σ_{1tu} и σ_{2tu} – пределы прочности при растяжении вдоль главных осей ортотропии
 σ_{1cu} и σ_{2cu} – пределы прочности при сжатии вдоль главных осей ортотропии
 τ_{12u} – предел прочности при сдвиге в плоскости армирования

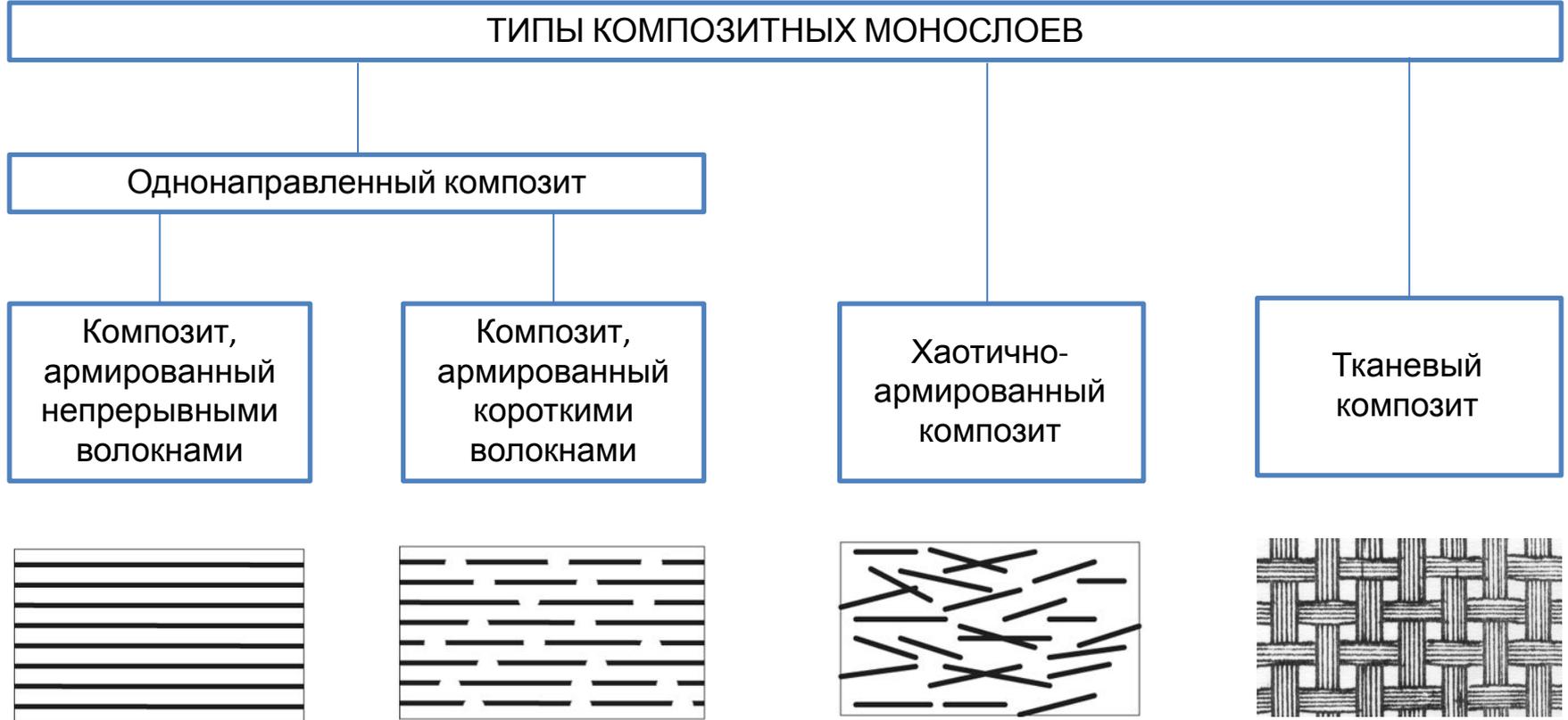
Характеристики упругости

композиционного монослоя в главных осях ортотропии {1, 2}:

- E_1 и E_2 – модули упругости в направлениях главных осей ортотропии
 G_{12} – модуль сдвига в плоскости армирования

I. КОМПОЗИТНЫЙ МОНОСЛОЙ

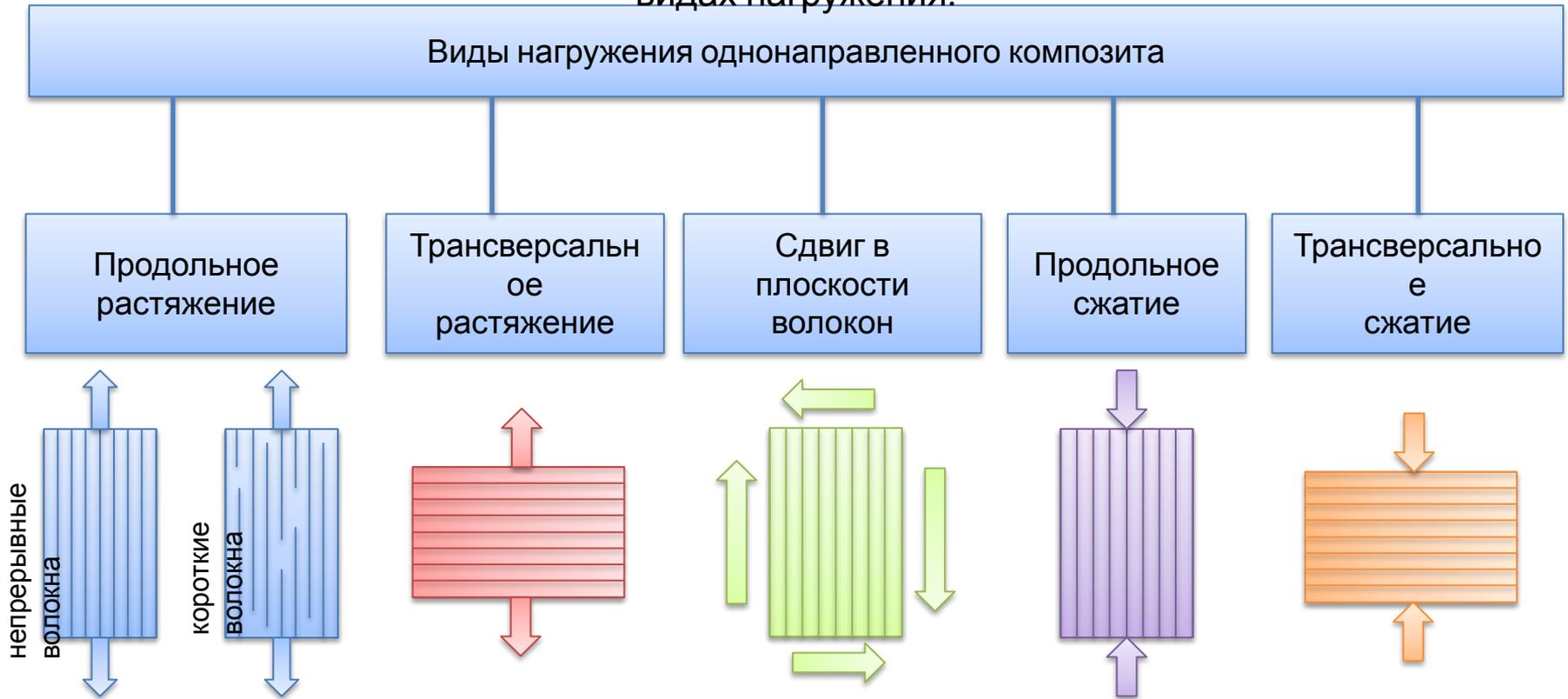
1. Основные положения и обозначения



1. КОМПОЗИТНЫЙ МОНОСЛОЙ

2. Моделирование свойств однонаправленного композита при различных видах нагружения

Свойства однонаправленного композитного монослоя определяются взаимодействием его волокон и матрицы. Рассмотрим эти свойства при различных видах нагружения.



1. КОМПОЗИТНЫЙ МОНОСЛОЙ

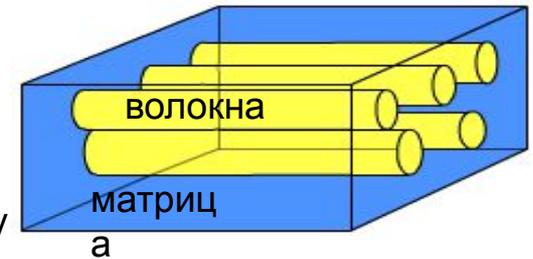
2. Моделирование свойств однонаправленного композита при различных видах нагружения

і. Продольное растяжение

а) Композит, армированный непрерывными волокнами

ДОПУЩЕНИЯ, используемые при моделировании взаимодействия матрицы и волокон однонаправленного композита, армированного непрерывными волокнами:

- Волокна равномерно распределены в матрице
- Связь между волокнами и матрицей идеальна
- Материал представляет бездефектную среду
- Начальные (остаточные) напряжения в материале отсутствуют



1. КОМПОЗИТНЫЙ МОНОСЛОЙ

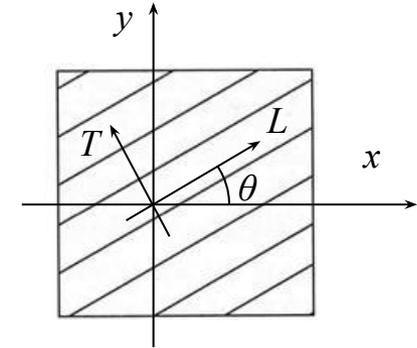
2. Моделирование свойств однонаправленного композита при различных видах нагружения

і. Продольное растяжение

а) Композит армированный непрерывными волокнами

Характеристики прочности однонаправленного композитного монослоя:

- предел прочности при растяжении вдоль волокон – σ_{Ltu}
- трансверсальный предел прочности при растяжении – σ_{Ttu}
- предел прочности при сдвиге – τ_{LTu}
- предел прочности при растяжении вдоль волокон – σ_{Lcu}
- трансверсальный предел прочности при растяжении – σ_{Tcu}



Характеристики жесткости однонаправленного композитного монослоя:

- продольный модуль упругости – E_L
- трансверсальный модуль упругости – E_T
- внутрислойный модуль сдвига – G_{LT}

Напряжения и деформации в главных осях монослоя $\{L, T\}$

Напряжения :

- σ_{LL} – продольное напряжение
- σ_{TT} – трансверсальное напряжение
- τ_{LT} – сдвиговое (касательное) напряжение

Деформации:

- ϵ_{LL} – продольная деформация
- ϵ_{TT} – трансверсальная деформация
- γ_{LT} – угол сдвига (сдвиговая деформация)

1. КОМПОЗИТНЫЙ МОНОСЛОЙ

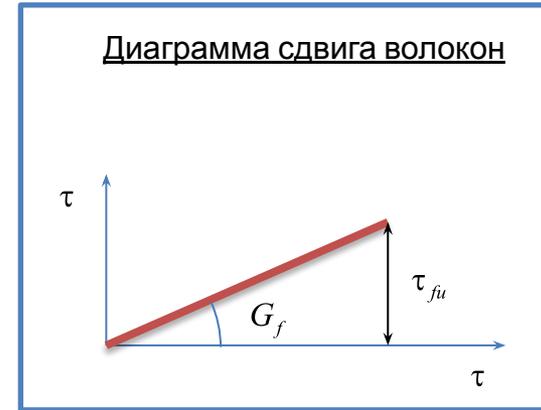
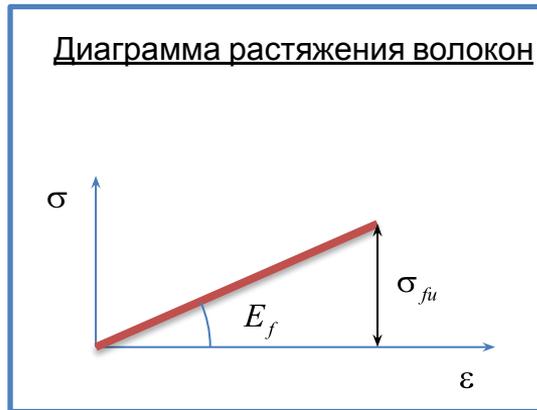
2. Моделирование свойств однонаправленного композита при различных видах нагружения

і. Продольное растяжение

а) Композит, армированный непрерывными волокнами

ДОПУЩЕНИЯ, используемые при моделировании взаимодействия матрицы и волокон однонаправленного композита, армированного длинными волокнами:

- Свойства волокон при растяжении и сдвиге описываются линейно-упругим законом



σ_{fu} – предел прочности волокон при растяжении

τ_{fu} – предел прочности волокон при сдвиге

E_f – продольный модуль упругости волокон

G_f – модуль сдвига волокон

1. КОМПОЗИТНЫЙ МОНОСЛОЙ

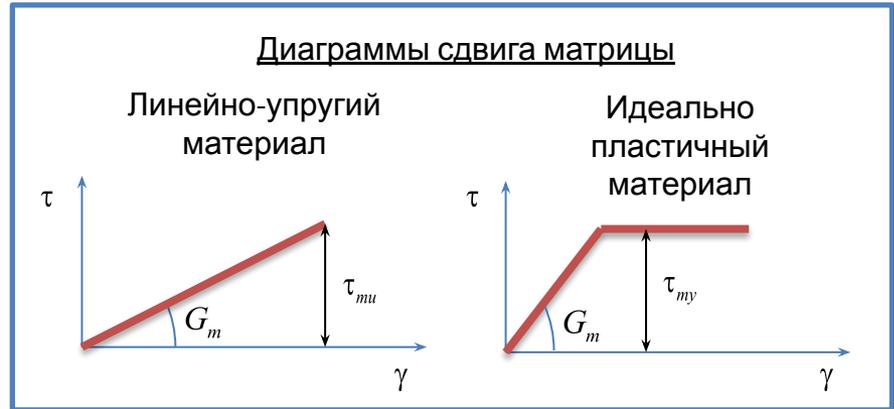
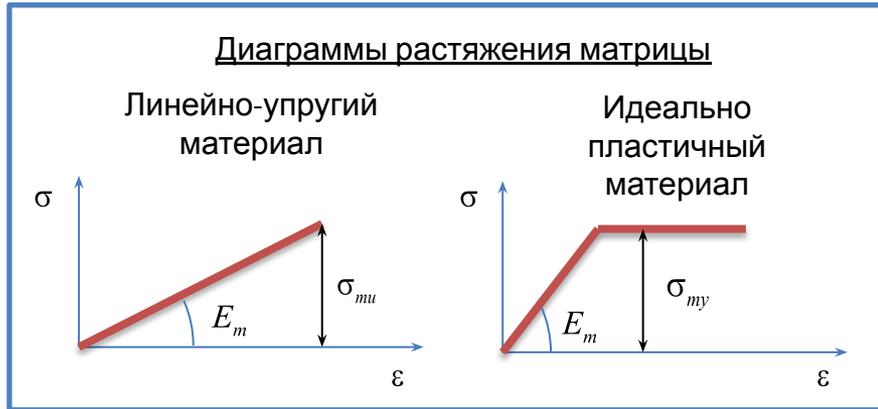
2. Моделирование свойств однонаправленного композита при различных видах нагружения

і. Продольное растяжение

а) Композит, армированный непрерывными волокнами

ДОПУЩЕНИЯ, используемые при моделировании взаимодействия матрицы и волокон однонаправленного композита, армированного длинными волокнами:

- Матрица представляет либо линейно-упругий, либо идеально-пластичный материал



E_m – продольный модуль упругости матрицы

G_m – модуль сдвига матрицы

σ_{mi} – предел прочности матрицы при растяжении

τ_{mi} – предел прочности матрицы при растяжении

σ_{my} – предел текучести матрицы при растяжении

τ_{my} – предел текучести матрицы при сдвиге

1. КОМПОЗИТНЫЙ МОНОСЛОЙ

2. Моделирование свойств однонаправленного композита при различных видах нагружения

і. Продольное растяжение

Продольный модуль упругости

Рассмотрим элемент объема однонаправленного волокнистого композита под действием растягивающей силы P_L , у которого

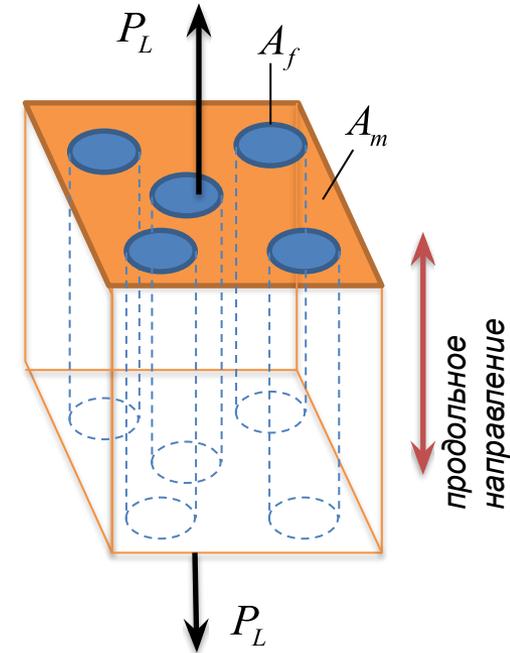
A_f - это площадь, занимаемая волокнами, в поперечном сечении;

A_m - площадь, занимаемая матрицей, в поперечном сечении;

$A = A_f + A_m$ - площадь всего поперечного сечения.

Так как связь между волокнами и матрицей композита идеальна, деформации ε_f волокон, ε_m матрицы и ε_{LL} всего композита в продольном направлении совпадают:

$$\varepsilon_f = \varepsilon_m = \varepsilon_{LL}$$



1. КОМПОЗИТНЫЙ МОНОСЛОЙ

2. Моделирование свойств однонаправленного композита при различных видах нагружения

i. Продольное растяжение

Продольный модуль упругости

Продольная сила, действующая на рассматриваемый элемент объема может быть представлена в виде суммы:

$$P_L = P_f + P_m$$

Перепишем это выражение через соответствующие напряжения σ и площади:

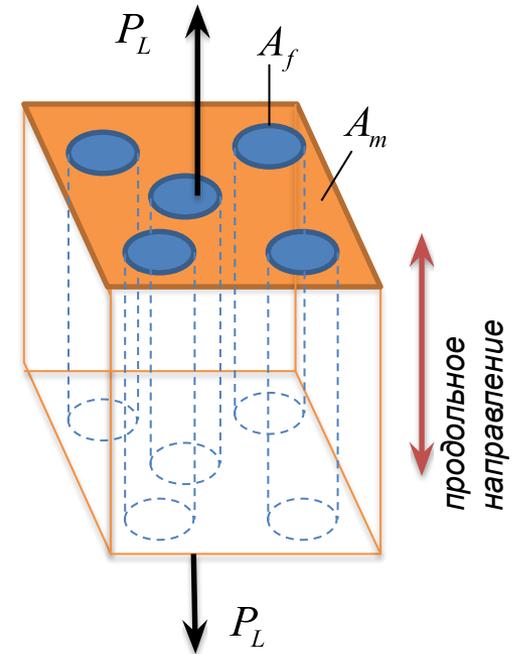
$$\sigma_{LL} A = \sigma_f A_f + \sigma_m A_m$$

Разделив это выражение на площадь поперечного сечения и, приняв во внимание, что

$$v_f = \frac{A_f}{A} \quad \text{и} \quad v_m = \frac{A_m}{A} = 1 - v_f$$

- это объемные доли волокон и матрицы в композите соответственно, в результате получим:

$$\sigma_{LL} = \sigma_f \frac{A_f}{A} + \sigma_m \frac{A_m}{A} = \sigma_f v_f + \sigma_m v_m$$



1. КОМПОЗИТНЫЙ МОНОСЛОЙ

2. Моделирование свойств однонаправленного композита при различных видах нагружения

і. Продольное растяжение

Продольный модуль упругости

Разделив последнее выражение на деформации

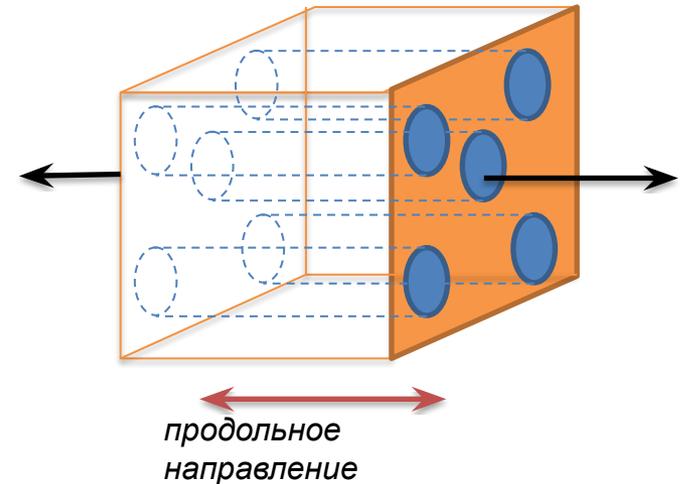
$$\varepsilon_f = \varepsilon_m = \varepsilon_{LL}$$

с учетом закона Гука при одноосном растяжении

получим

ПРАВИЛО СМЕСЕЙ ДЛЯ ПРОДОЛЬНОГО МОДУЛЯ УПРУГОСТИ ОДНОНАПРАВЛЕННОГО КОМПОЗИТА :

$$E_L = E_f v_f + E_m v_m = E_f v_f + E_m (1 - v_f)$$



ВЫВОДЫ: модуль упругости однонаправленного композита вдоль волокон:

- находится в пределах: $E_m \leq E_L \leq E_f$
- возрастает по линейному закону с ростом объемной доли волокон;
- в наибольшей степени определяется модулем упругости материала волокон.

1. КОМПОЗИТНЫЙ МОНОСЛОЙ

2. Моделирование свойств однонаправленного композита при различных видах нагружения

i. Продольное растяжение

Прочность вдоль волокон при растяжении

ПРЕДЕЛ ПРОЧНОСТИ ВДОЛЬ ВОЛОКОН ПРИ РАСТЯЖЕНИИ

$$\sigma_{Ltu} = \sigma_{fu} v_f + \sigma'_m v_m$$

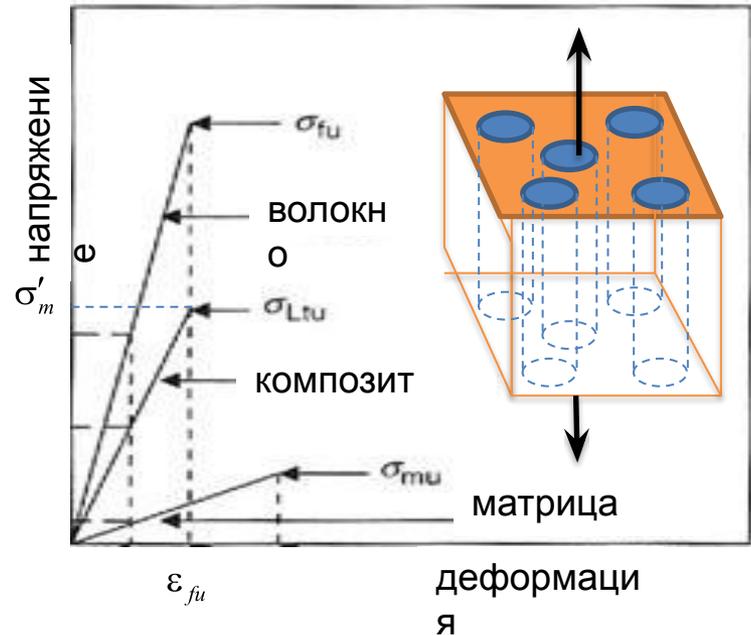
Здесь σ'_m – напряжение в матрице, соответствующее разрушению волокон при растяжении композита.

ДОЛЯ НАГРУЗКИ, ПРИХОДЯЩАЯСЯ НА ВОЛОКНА

$$\frac{P_f}{P_L} = \frac{\sigma_f v_f}{\sigma_f v_f + \sigma_m (1 - v_f)} = \frac{E_f v_f}{E_f v_f + E_m (1 - v_f)}$$

Для эффективного упрочнения композита объемная доля волокон должна быть выше критического значения (при выводе этого выражения предполагали, что матрица разрушается сразу же после разрушения волокон):

$$v_{fcr} = \frac{\sigma_{mu} - \sigma'_m}{\sigma_{fu} - \sigma'_m}$$



1. КОМПОЗИТНЫЙ МОНОСЛОЙ

2. Моделирование свойств однонаправленного композита при различных видах нагружения

і. Продольное растяжение

а) Композит, армированный непрерывными волокнами

ПРИМЕР.

Однонаправленный композит содержит 60% углеродных волокон в эпоксидной матрице.

	Модуль упругости	Предел прочности
Свойства волокон	$E_f = 345 \text{ ГПа}$	$\sigma_{fu} = 2480 \text{ МПа}$
Свойства матрицы	$E_m = 3,45 \text{ ГПа}$	$\sigma_{mU} = 138 \text{ МПа}$

Определить:

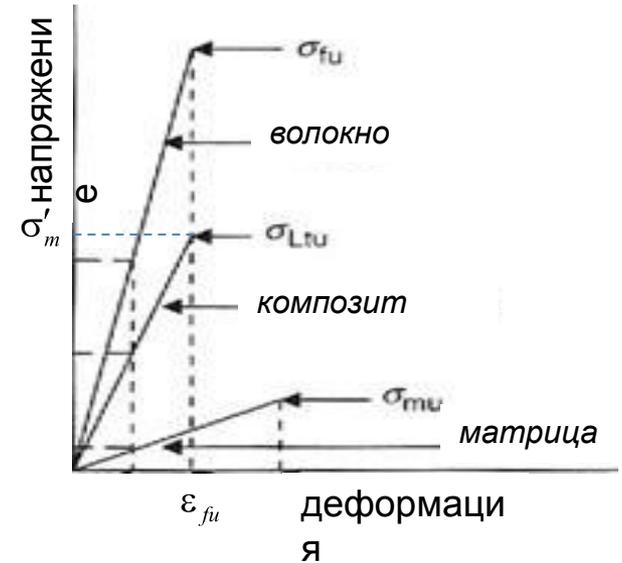
- продольный модуль упругости композита;
- продольный предел прочности композита при растяжении.

РЕШЕНИЕ.

Продольный модуль упругости композита $E_{Lc} = E_f v_f + E_m (1 - v_f) = 345 \cdot 0,6 + 3,45 \cdot (1 - 0,6) = 208$

Напряжение в матрице, соответствующее разрушению волокон $\sigma'_m = \sigma_{fu} \cdot \frac{E_m}{E_f} = 2480 \cdot \frac{3,45}{345} = 24,8 \text{ МПа}$

Продольный предел прочности композита $\sigma_{Lcu} = \sigma_{fu} v_f + \sigma'_m v_m = 2480 \cdot 0,6 + 24,8 \cdot 0,4 = 1500 \text{ МПа}$



1. КОМПОЗИТНЫЙ МОНОСЛОЙ

2. Моделирование свойств однонаправленного композита при различных видах нагружения

і. Продольное растяжение

в) Композит, армированный короткими волокнами

Механизм передачи нагрузок

Продольная сила, приложенная к однонаправленному композиту, армированному короткими волокнами, передается волокнам путем *сдвигового механизма*:

поскольку жесткость матрицы обычно значительно ниже жесткости волокон, ее продольные деформации выше, чем в волокнах, находящихся рядом. При условии идеальной связи между матрицей и волокнами разница между продольными деформациями матрицы и волокон приводит к возникновению касательных (сдвиговых) напряжений, распределенных по границе раздела волокно-матрица.



ДО ДЕФОРМИРОВАНИЯ матрица



ПОСЛЕ ДЕФОРМИРОВАНИЯ матрица



1. КОМПОЗИТНЫЙ МОНОСЛОЙ

2. Моделирование свойств однонаправленного композита при различных видах нагружения

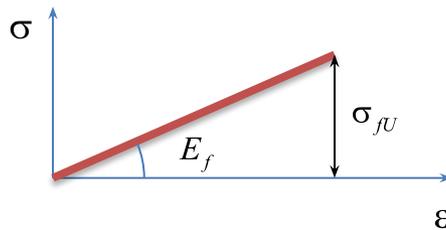
і. Продольное растяжение

в) Композит, армированный короткими волокнами

ДОПУЩЕНИЯ, используемые при моделировании прочности при растяжении в продольном направлении однонаправленного композита, армированного короткими волокнами:

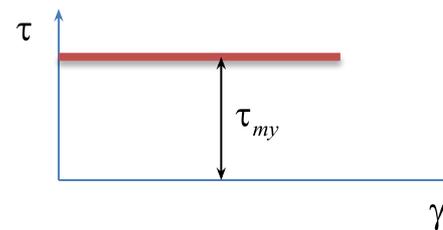
- напряжения на торцах волокон отсутствуют
- взаимодействия соседних волокон не рассматривают
- свойства волокон при растяжении описывают линейным законом, а матрица при сдвиге представляет собой жестко-пластичный материал (модель Келли-Тайсона)

Диаграмма растяжения
волокон



σ_{fu} – предел прочности
волокон при
растяжении

Диаграмма сдвига
матрицы



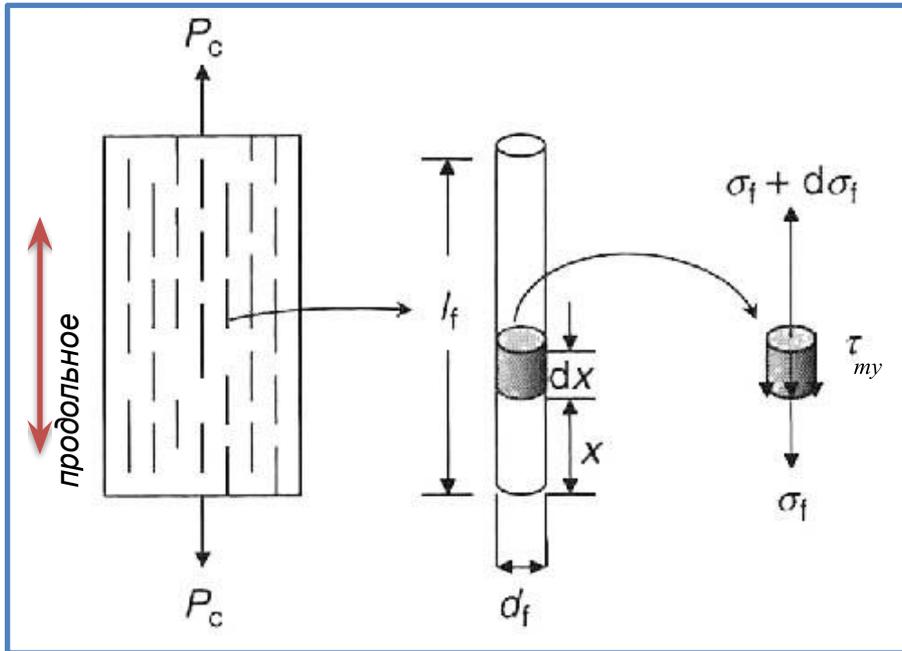
τ_{my} – предел
текучести матрицы
при сдвиге

1. КОМПОЗИТНЫЙ МОНОСЛОЙ

2. Моделирование свойств однонаправленного композита при различных видах нагружения

і. Продольное растяжение

Прочность при растяжении вдоль волокон



Уравнение равновесия
элементарного отрезка волокна длиной
 dx при растяжении вдоль волокон:

$$\frac{\pi d_f^2}{4} (\sigma_f + d\sigma_f) - \frac{\pi d_f^2}{4} \sigma_f - (\pi d_f dx) \tau_{my} = 0$$

Здесь

σ_f – продольное напряжение в волокне
на расстоянии x от его нижнего торца

τ_{my} – сдвиговое напряжение на границе
раздела волокно-матрица (предел
текучести матрицы)

d_f – диаметр волокна

После следующих преобразований последнего выражения:

$$\frac{d\sigma_f}{dx} = \frac{4\tau_{my}}{d_f} \longrightarrow \sigma_f = \frac{4}{d_f} \int_0^x \tau_{my} dx$$

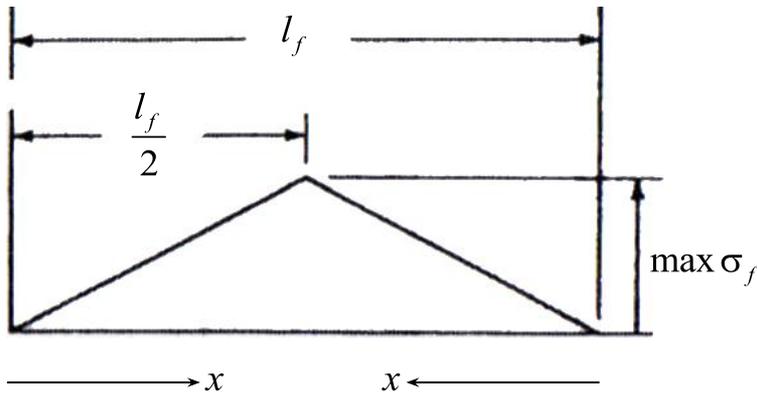
получим распределение нормальных напряжений по длине волокна $\sigma_f(x) = \frac{4\tau_{my}}{d_f} x$

1. КОМПОЗИТНЫЙ МОНОСЛОЙ

2. Моделирование свойств однонаправленного композита при различных видах нагружения

і. Продольное растяжение

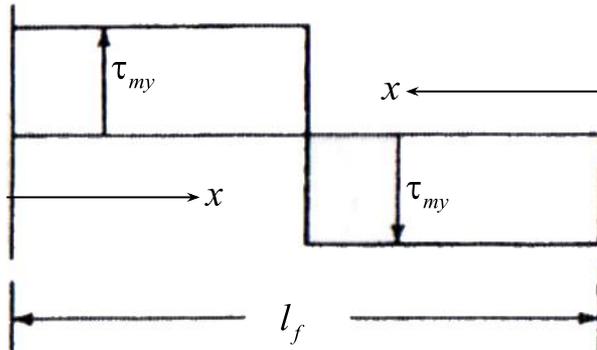
Прочность при растяжении вдоль волокон



Согласно полученному выражению

$$\sigma_f(x) = \frac{4\tau_{my}}{d_f} x$$

нормальные напряжения распределены по линейному закону – они равны нулю на торцах волокна и возрастают с ростом расстояния x от торцов к центру



Сдвиговые напряжения по половинам длины волокна распределены по постоянному закону (допущение Келли-Тайсона).

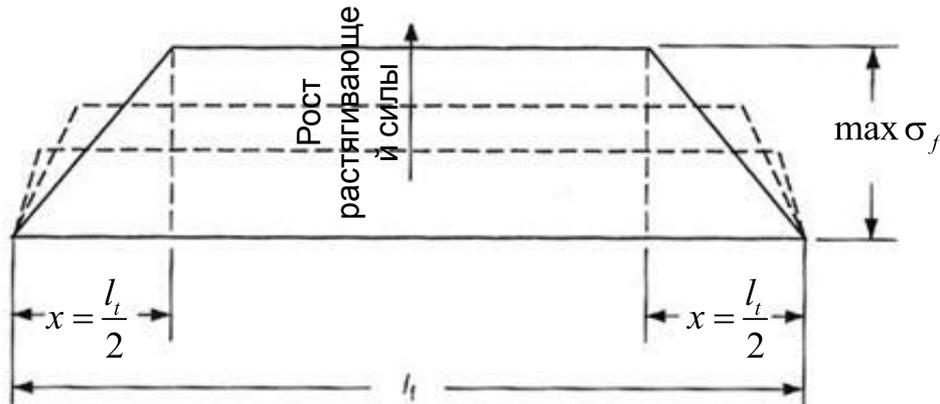
1. КОМПОЗИТНЫЙ МОНОСЛОЙ

2. Моделирование свойств однонаправленного композита при различных видах нагружения

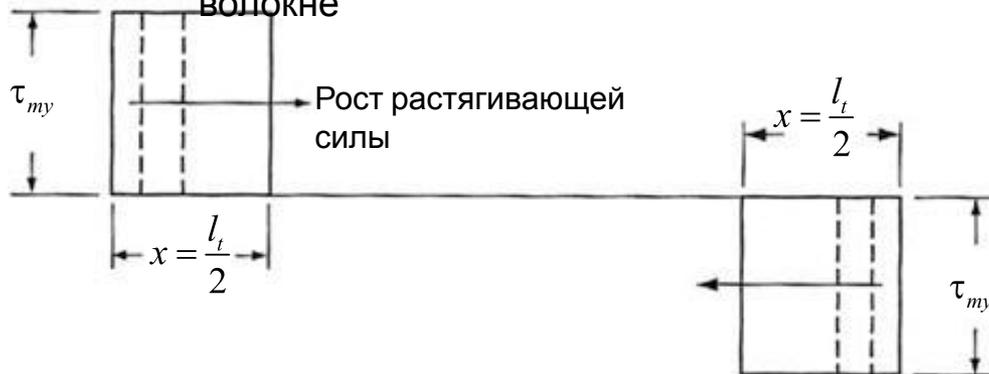
і. Продольное растяжение

Прочность при растяжении вдоль волокон

Нормальные напряжения в



Касательные напряжения в
волокне



В общем случае нормальные напряжения в волокне с ростом расстояния x от его торцов не могут возрастать бесконечно:

при заданной нагрузке они достигают максимальных величин

$$\max \sigma_f = \frac{4\tau_{my}}{d_f} \frac{l_t}{2} = \frac{2\tau_{my}}{d_f} l_t$$

на некотором удалении от торцов
 $x = \frac{l_t}{2}$

и распределяются равномерно по центральному участку

1. КОМПОЗИТНЫЙ МОНОСЛОЙ

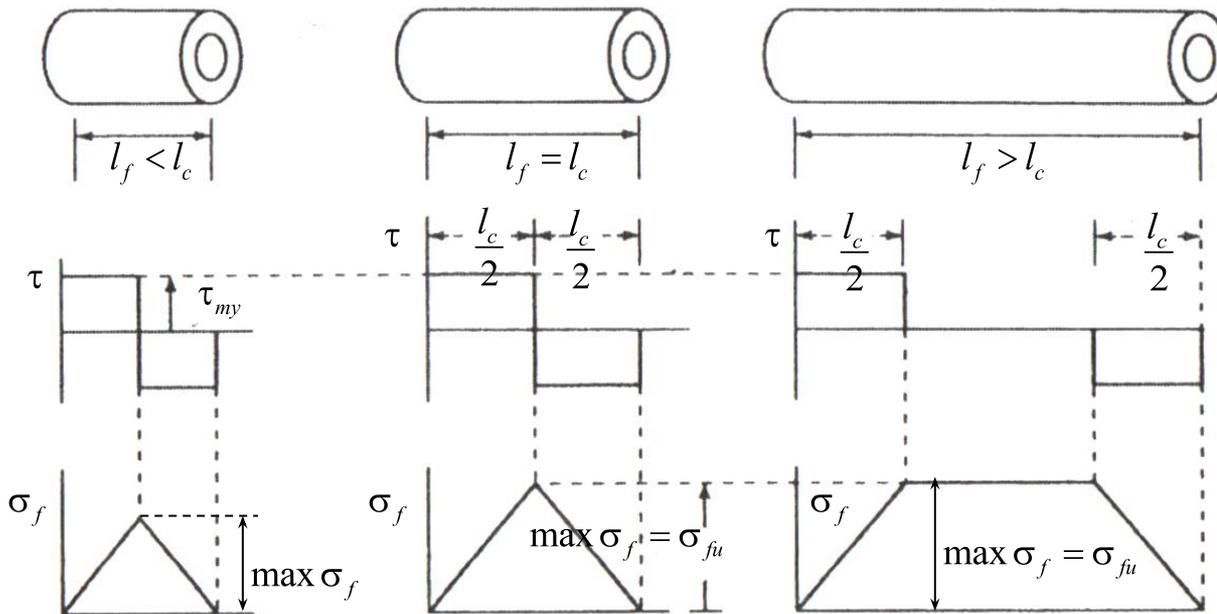
2. Моделирование свойств однонаправленного композита при различных видах нагружения

і. Продольное растяжение

Прочность при растяжении вдоль волокон

Разрушение композита обусловлено либо разрушением матрицы, либо нарушением связи волокно-матрица

Разрушение композита обусловлено разрушением волокон



Критическая длина волокна l_c – это его минимальная длина при которой нормальные напряжения в волокне достигают предела прочности. То есть при $x = \frac{l_c}{2}$

максимальные нормальные напряжения в волокне $\max \sigma_f \equiv \sigma_{fu}$

Критическая длина

$$l_c = \frac{\sigma_{fu}}{2\tau_T} d_f$$

1. КОМПОЗИТНЫЙ МОНОСЛОЙ

2. Моделирование свойств однонаправленного композита при различных видах нагружения

і. Продольное растяжение

Прочность при растяжении вдоль волокон

1. Рассмотрим случай, когда $l_f < l_c$

Среднее напряжение в волокне при этом равно

$$\bar{\sigma}_f = \frac{2}{l_f} \left(\int_{S_\Delta} \sigma_f(x) dx \right) = \frac{2}{l_f} \cdot S_\Delta = \frac{2}{l_f} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{l_f}{2} \cdot \max \sigma_f \right) = \frac{1}{2} \max \sigma_f$$

С учетом равенств $\max \sigma_f = \frac{l_f}{l_c} \cdot \sigma_{fu}$ и $l_c = \frac{\sigma_{fu}}{2\tau_T} d_f$

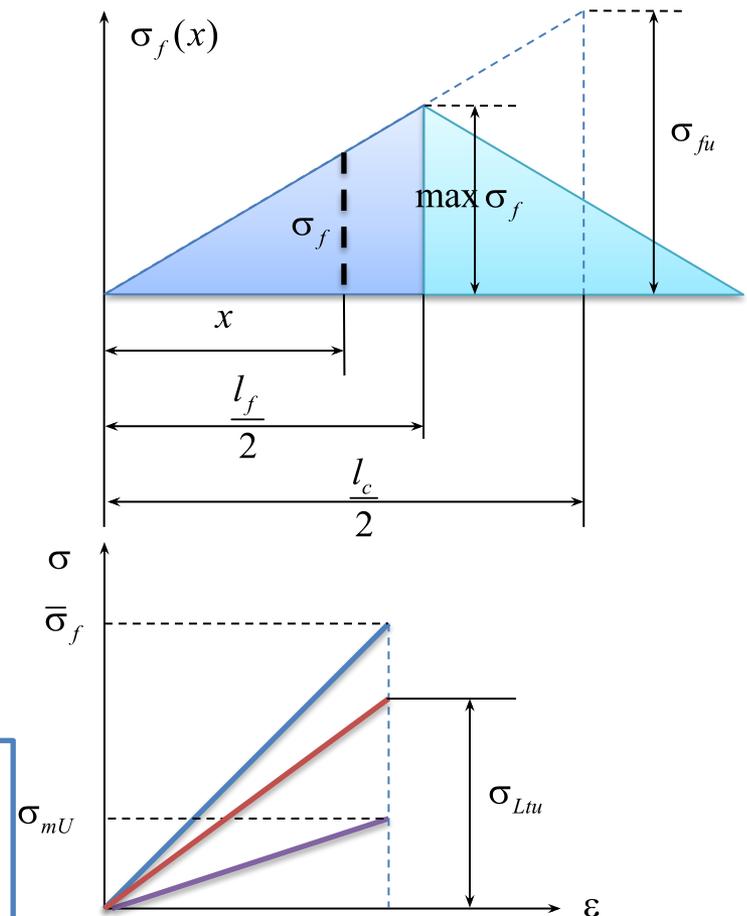
в итоге получим $\bar{\sigma}_f = \frac{l_f}{2l_c} \cdot \sigma_{fu} = \frac{l_f}{d_f} \tau_{my}$

Для определения прочности композита с короткими волокнами, модифицируем немного выражение для определения прочности композита с длинными волокнами:

$$\sigma_{Ltu} = \sigma_{fu} v_f + \sigma'_m v_m \rightarrow \sigma_{Ltu} = \bar{\sigma}_f v_f + \sigma_{mU} v_m$$

Продольный предел прочности при $l_f < l_c$

$$\sigma_{Ltu} = \frac{l_f}{d_f} \tau_{my} v_f + \sigma_{mu} v_m$$



1. КОМПОЗИТНЫЙ МОНОСЛОЙ

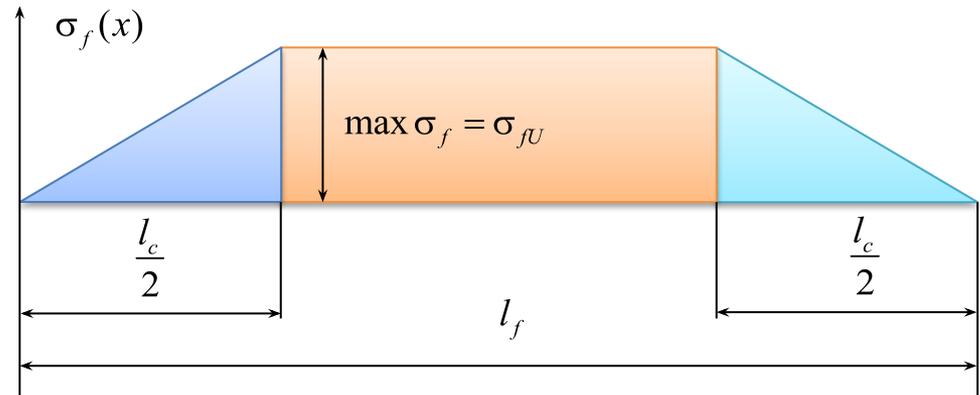
2. Моделирование свойств однонаправленного композита при различных видах нагружения

i. Продольное растяжение

в) Композит армированный короткими волокнами

Прочность при растяжении вдоль волокон

2. Рассмотрим случай, когда $l_f > l_c$

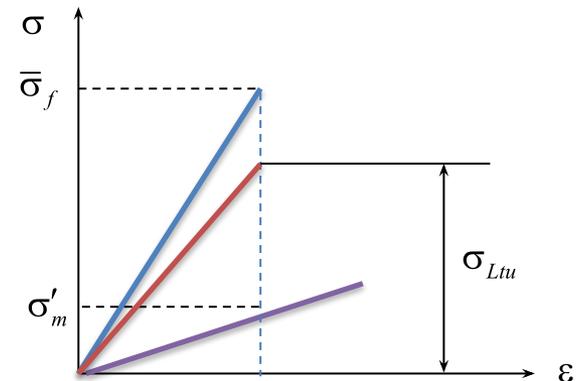


При достижении максимальными нормальными напряжениями в волокне предела прочности, среднее напряжение в волокне определяется следующим образом

$$\bar{\sigma}_f = \frac{1}{l_f} \cdot \left(\frac{l_c}{2} \cdot \max \sigma_f + (l_f - l_c) \cdot \max \sigma_f \right) = \left(1 - \frac{l_c}{2l_f} \right) \max \sigma_f$$

Предел прочности при $l_f > l_c$

$$\sigma_{Ltu} = \bar{\sigma}_{fu} v_f + \sigma'_m (1 - v_f) = \sigma_{fu} \left(1 - \frac{l_c}{2l_f} \right) v_f + \sigma'_m (1 - v_f)$$



1. КОМПОЗИТНЫЙ МОНОСЛОЙ

2. Моделирование свойств однонаправленного композита при различных видах нагружения

и. Продольное растяжение

б) Композит армированный короткими волокнами

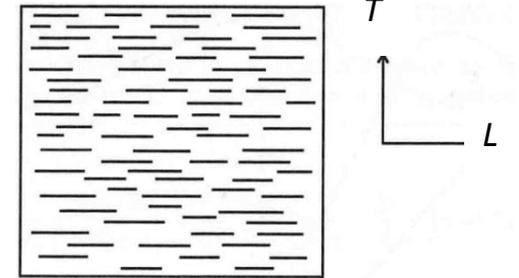
Продольный модуль упругости

1. Модель Кокса:

$$E_L = E_f \left(1 - \frac{\tanh(\beta l / 2)}{\beta l / 2} \right) v_f + E_m v_m$$

$$\beta^2 = \frac{8\pi G_m}{d^2 E_f \ln(D/d)}$$

где G_m – модуль сдвига материала матрицы



1. КОМПОЗИТНЫЙ МОНОСЛОЙ

2. Моделирование свойств однонаправленного композита при различных видах нагружения

і. Продольное растяжение

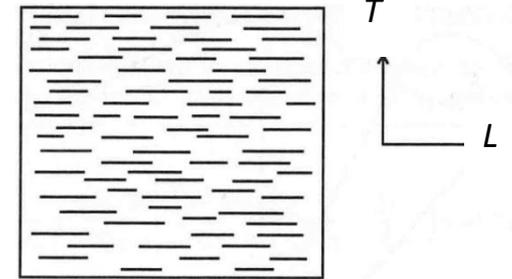
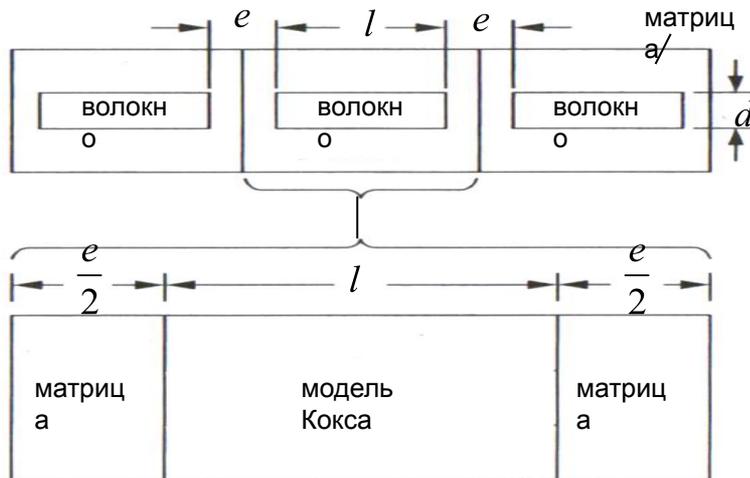
к) Композит армированный короткими волокнами

Продольный модуль упругости

2. Модифицированная модель Кокса:

$$\frac{1}{E_L} = \frac{l(l+e)}{(E_L)^{Cox}} + \frac{e(l+e)}{E_m}$$

где $(E_L)^{Cox}$ – модуль упругости, вычисленный с использованием модели Кокса



1. КОМПОЗИТНЫЙ МОНОСЛОЙ

2. Моделирование свойств однонаправленного композита при различных видах нагружения

і. Продольное растяжение

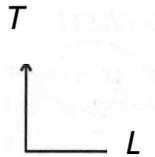
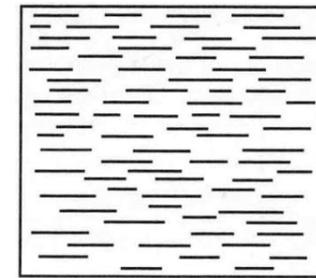
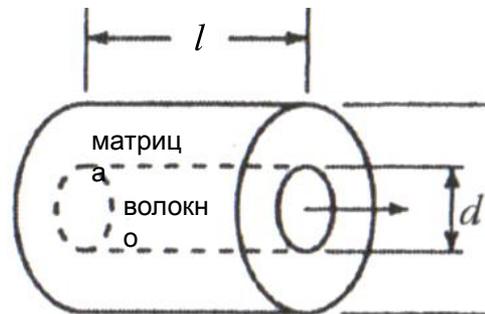
к) Композит армированный короткими волокнами

Продольный модуль упругости

2. Модель Хальпина - Цая:

$$E_L = \frac{1 + 2 \frac{l}{d} \eta_L v_f}{1 - \eta_L v_f} E_m$$

$$\eta_L = \frac{\frac{E_f}{E_m} - 1}{\frac{E_f}{E_m} + 2 \frac{l_f}{d_f}}$$



I. КОМПОЗИТНЫЙ МОНОСЛОЙ

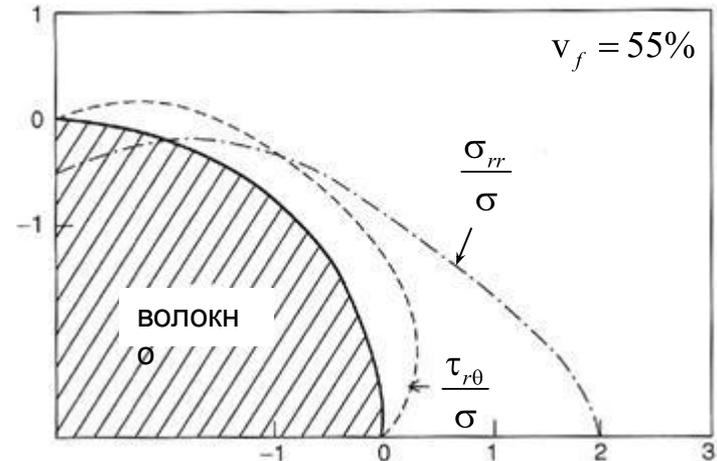
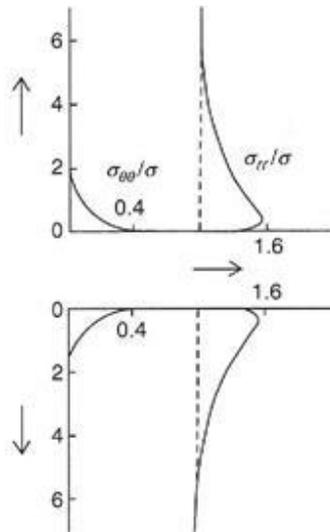
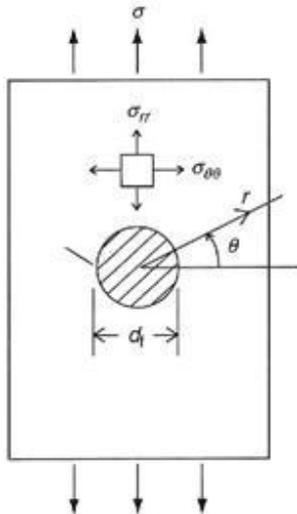
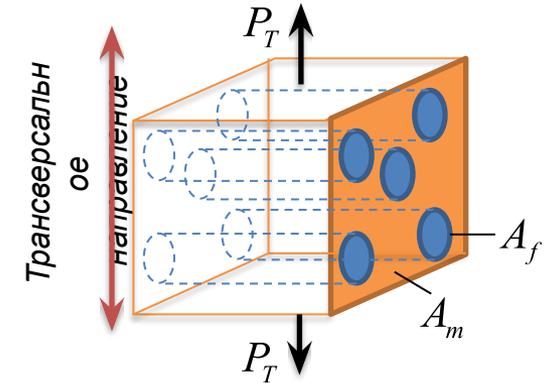
2. Моделирование свойств однонаправленного композита при различных видах нагружения

ii. Трансверсальное растяжение

Особенности деформирования

В случае трансверсального нагружения композита волокна работают скорее как жесткие включения в отличие от продольного нагружения, где волокна несут большую часть нагрузки.

Хотя жесткость матрицы несколько возрастает с добавлением в нее волокон, местные напряжения, возникающие на границе раздела волокно-матрица, превышают номинальные почти на 50% и ослабляют несущую способность композита.



I. КОМПОЗИТНЫЙ МОНОСЛОЙ

2. Моделирование свойств однонаправленного композита при различных видах нагружения

ii. Трансверсальное растяжение

ДОПУЩЕНИЯ

используемые при моделировании деформирования однонаправленного композита в трансверсальном направлении:

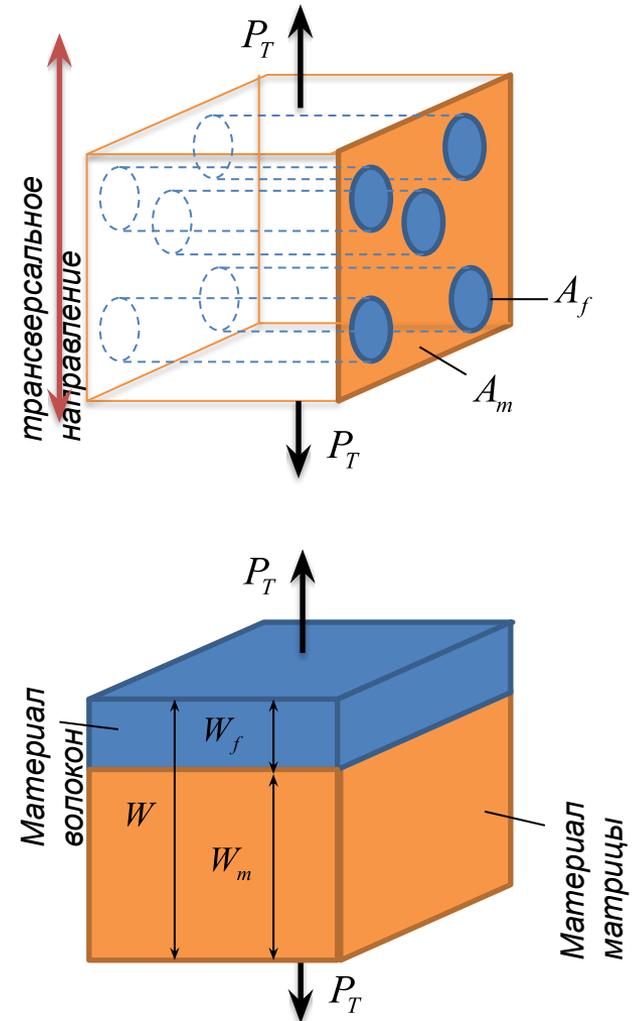
- Волокна и матрица заменены параллелепипедами соответствующих объемов с идеальной связью между ними (при этом не учитывается концентрация напряжений на границе раздела волокно-матрица)

- Трансверсальное удлинение ΔW рассматриваемого элемента объема представляет сумму удлинений объемов, соответствующих волокнам и матрице

$$\Delta W = \Delta W_f + \Delta W_m$$

- Растягивающие напряжения в волокнах, в матрице и в композите равны друг другу
 $\sigma_f = \sigma_m = \sigma_{TT}$

- Матрица и волокна представляют линейно-упругие материалы



I. КОМПОЗИТНЫЙ МОНОСЛОЙ

2. Моделирование свойств однонаправленного композита при различных видах нагружения

ii. Трансверсальное растяжение

Трансверсальный модуль упругости

Поскольку $\varepsilon_{TT} = \frac{\Delta W}{W}$ $\varepsilon_f = \frac{\Delta W_f}{W_f}$ $\varepsilon_m = \frac{\Delta W_m}{W_m}$

полное удлинение рассматриваемого элемента объема в трансверсальном направлении может быть переписано

$$\varepsilon_{TT} W = \varepsilon_f W_f + \varepsilon_m W_m$$

Разделив это выражение на W , получим

$$\varepsilon_{TT} = \varepsilon_f v_f + \varepsilon_m v_m \quad , \text{ где } v_f = \frac{W_f}{W} \quad , \text{ а } v_m = \frac{W_m}{W}$$

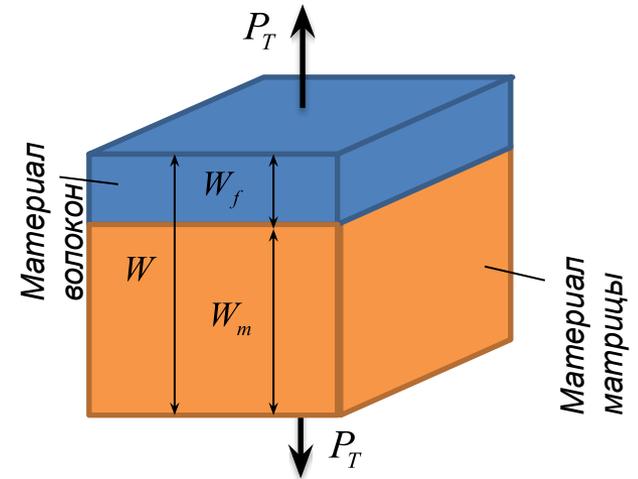
Приняв во внимание следующее:

$$\varepsilon_{TT} = \frac{\sigma_{TT}}{E_T} \quad \varepsilon_f = \frac{\sigma_f}{E_f} \quad \varepsilon_m = \frac{\sigma_m}{E_m} \quad \sigma_f = \sigma_m = \sigma_{TT}$$

получим

ПРАВИЛО СМЕСЕЙ ДЛЯ ТРАНСВЕРСАЛЬНОГО МОДУЛЯ УПРУГОСТИ ОДНОНАПРАВЛЕННОГО КОМПОЗИТА

$$\frac{1}{E_T} = \frac{v_f}{E_f} + \frac{v_m}{E_m}$$



I. КОМПОЗИТНЫЙ МОНОСЛОЙ

2. Моделирование свойств однонаправленного композита при различных видах нагружения

ii. Трансверсальное растяжение

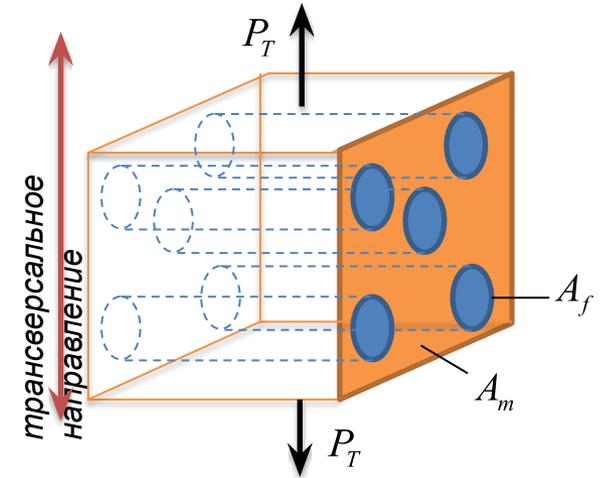
Трансверсальный предел прочности

ТРАНСВЕРСАЛЬНЫЙ ПРЕДЕЛ ПРОЧНОСТИ

$$\sigma_{Tm} = \frac{\sigma_{mu}}{K_{\sigma}}$$

$$K_{\sigma} = \frac{1 - v_f \left(1 - \frac{E_m}{E_f}\right)}{1 - \sqrt{\frac{4 v_f}{\pi}} \left(1 - \frac{E_m}{E_f}\right)}$$

Здесь K_{σ} – это коэффициент концентрации напряжений



Выражение, определяющее трансверсальную прочность однонаправленного композита, армированного длинными волокнами, получается на основе ДОПУЩЕНИЯ:

трансверсальная прочность такого композита при растяжении ограничена соответствующим пределом прочности матрицы

Вывод: трансверсальная прочность однонаправленного композита, армированного длинными волокнами, снижается с увеличением модуля упругости волокон, а также с увеличением объемной доли волокон

I. КОМПОЗИТНЫЙ МОНОСЛОЙ

2. Моделирование свойств однонаправленного композита при различных видах нагружения

ii. Трансверсальное растяжение

ПРИМЕР.

Для однонаправленного эпоксидного углепластика, армированного длинными волокнами, с объемной долей волокон 70% сравнить:

А) модули упругости

Б) пределы прочности

В продольном и трансверсальном направлении.

	Модуль упругости	Предел прочности
Свойств а волокон	$E_f = 345 \text{ ГПа}$	$\sigma_{fu} = 2480 \text{ МПа}$
Свойств а матрицы	$E_m = 3,45 \text{ ГПа}$	$\sigma_{mu} = 138 \text{ МПа}$

А) Продольный модуль упругости $E_L = E_f v_f + E_m (1 - v_f) = 345 \cdot 0,7 + 3,45 \cdot (1 - 0,7) = 243$

Трансверсальный модуль упругости $E_T = \left(\frac{v_f}{E_f} + \frac{1 - v_f}{E_m} \right)^{-1} = \left(\frac{0,7}{345} + \frac{1 - 0,7}{3,45} \right)^{-1} = 11,2 \text{ ГПа}$

Отношение продольного к трансверсальному модулю упругости $\frac{E_L}{E_T} = \frac{243}{11,2} = 21,7$

I. КОМПОЗИТНЫЙ МОНОСЛОЙ

2. Моделирование свойств однонаправленного композита при различных видах нагружения

ii. Трансверсальное растяжение

ПРИМЕР.

Для однонаправленного эпоксидного углепластика с объемной долей волокон 70% сравнить:

А) модули упругости

Б) пределы прочности

в продольном и трансверсальном направлении.

РЕШЕНИЕ.

	Модуль упругости	Предел прочности
Свойств а волокон	$E_f = 345$ ГПа	$\sigma_{fu} = 2480$ МПа
Свойств а матрицы	$E_m = 3,45$ ГПа	$\sigma_{mu} = 138$ МПа

Б) Продольный предел прочности

$$\sigma_{Ltu} = \sigma_{fu} v_f + \sigma_m v_m = \sigma_{fu} v_f + \sigma_{fu} \frac{E_m}{E_f} v_m = 2,48 \cdot 0,7 + 2,48 \cdot \frac{3,45}{345} \cdot 0,3 = 1743$$

Трансверсальный предел прочности

$$\sigma_{Ttu} = \frac{\sigma_{mu}}{K_\sigma} = \frac{1 - \sqrt{\frac{4v_f}{\pi} \left(1 - \frac{E_m}{E_f}\right)}}{1 - v_f \left(1 - \frac{E_m}{E_f}\right)} \sigma_{mu} = \frac{1 - \sqrt{\frac{4 \cdot 0,7}{\pi} \left(1 - \frac{3,45}{345}\right)}}{1 - 0,7 \left(1 - \frac{3,45}{345}\right)} \cdot 138 = 29,4$$

Отношение продольного к трансверсальному пределу прочности

$$\frac{\sigma_{Ltu}}{\sigma_{Ttu}} = \frac{1743}{29,4} = 52,3$$

I. КОМПОЗИТНЫЙ МОНОСЛОЙ

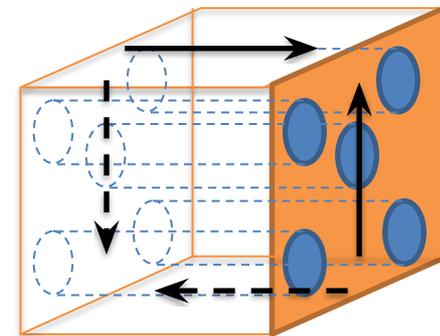
2. Моделирование свойств однонаправленного композита при различных видах нагружения

iii. Сдвиг в плоскости волокон

Моделирование характеристик сдвига однонаправленного композита, армированного длинными волокнами, основывают на соображениях, аналогичных тем, которые были использованы в случае трансверсального растяжения.

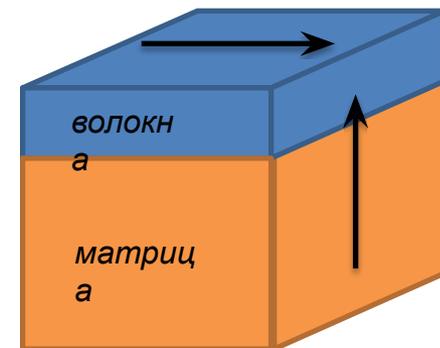
МОДУЛЬ СДВИГА ОДНОНАПРАВЛЕННОГО КОМПОЗИТА

$$\frac{1}{G_{LT}} = \frac{v_f}{G_f} + \frac{v_m}{G_m}$$



ПРЕДЕЛ ПРОЧНОСТИ ОДНОНАПРАВЛЕННОГО КОМПОЗИТА ПРИ СДВИГЕ

$$\tau_{LTu} = \frac{\tau_{mi}}{K_\tau}, \text{ где } K_\tau = \frac{1 - v_f \left(1 - \frac{G_m}{G_f}\right)}{1 - \sqrt{\frac{4v_f}{\pi} \left(1 - \frac{G_m}{G_f}\right)}}$$



Здесь K_τ – это коэффициент концентрации напряжений

I. КОМПОЗИТНЫЙ МОНОСЛОЙ

2. Моделирование свойств однонаправленного композита при различных видах нагружения

iv. Продольное сжатие

Формы разрушения и прочность при сжатии:

1) Потеря устойчивости волокон

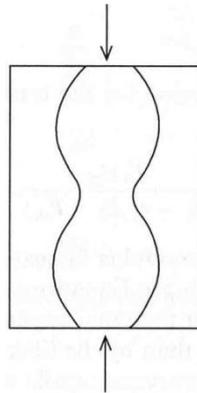
Одна из важных функций матрицы в композите – это обеспечение боковой поддержки волокон при продольном сжатии. Композиты на основе полимерных матриц, у которых модуль упругости может быть на несколько порядков ниже модулей упругости волокон, при продольном сжатии часто разрушаются из-за местной потери устойчивости волокон.

A) EXTENSIONAL MODE

(обычно происходит при низкой объемной доле волокон $v_f < 20\%$)

Предел прочности

$$\sigma_{Lcu} = 2v_f \sqrt{\frac{v_f E_m E_f}{3(1-v_f)}}$$

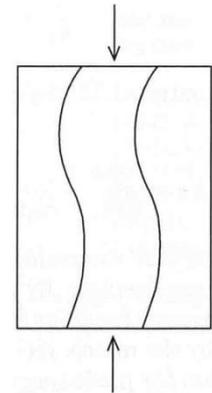


Б) SHEAR MODE

(обычно происходит при высокой объемной доле волокон $v_f > 20\%$)

Предел прочности

$$\sigma_{Lcu} = \frac{G_m}{1-v_f}$$



I. КОМПОЗИТНЫЙ МОНОСЛОЙ

2. Моделирование свойств однонаправленного композита при различных видах нагружения

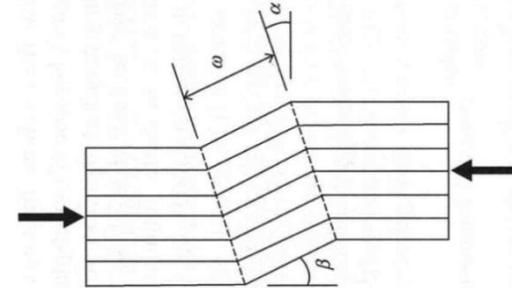
iv. Продольное сжатие

Формы разрушения и прочность при сжатии:

2) Скручивание волокон (происходит при наличие начальных отклонений ориентации пучков волокон)

Напряжение при котором происходит скручивание (Будянский и Флэк)

$$\sigma_{ск} = \frac{\tau_{my}}{\varphi + \gamma_{my}}$$



Здесь γ_{my} - деформация, соответствующая текучести матрицы, а φ - начальное угловое отклонение волокон

3) Сдвиговое разрушение композита

4) Разрушение при сжатии или текучесть волокон (например, в случае металлических волокон)

5) Продольное растрескивание матрицы

6) Текучесть матрицы

7) Отслоение волокон от матрицы

I. КОМПОЗИТНЫЙ МОНОСЛОЙ

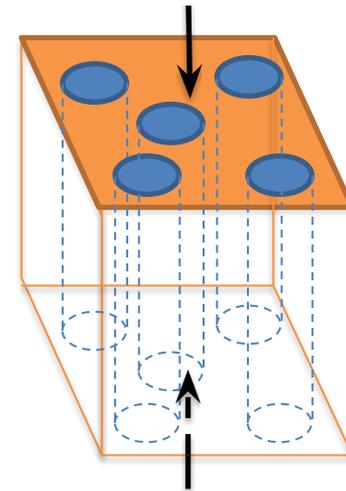
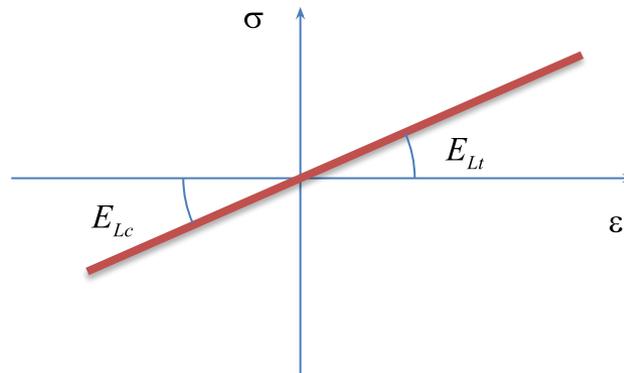
2. Моделирование свойств однонаправленного композита при различных видах нагружения

iv. Продольное сжатие

Модуль упругости:

Модуль упругости при продольном сжатии однонаправленного композита примерно совпадает с модулем упругости при растяжении.

$$E_{Lc} \approx E_{Lt} \equiv E_L$$



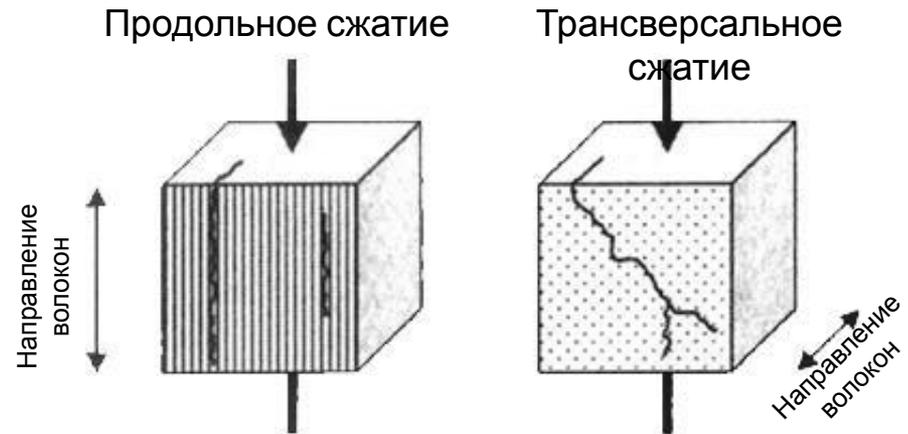
I. КОМПОЗИТНЫЙ МОНОСЛОЙ

2. Моделирование свойств однонаправленного композита при различных видах нагружения

V. Трансверсальное сжатие

При трансверсальном сжатии, сжимающую нагрузку прикладывают по нормали к направлению волокон.

Наиболее часто наблюдаемый случай разрушения композита при трансверсальном сжатии – это сдвиговое разрушение матрицы в плоскости, параллельной направлению волокон и наклоненной к оси нагружения.



- Прочность и модуль упругости композита при трансверсальном сжатии значительно ниже соответствующих характеристик при продольном сжатии композита.
- Модуль упругости композита при трансверсальном сжатии больше, чем модуль упругости матрицы; он примерно равен трансверсальному модулю упругости композита при растяжении.
- Прочность композита при трансверсальном сжатии практически не зависит от объемного содержания волокон.

$$E_{Tc} \approx E_{Ti} \equiv E_T$$

$$\sigma_{Tcu} \approx \sigma_{mu}$$

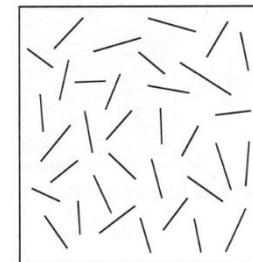
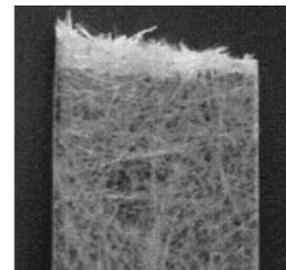
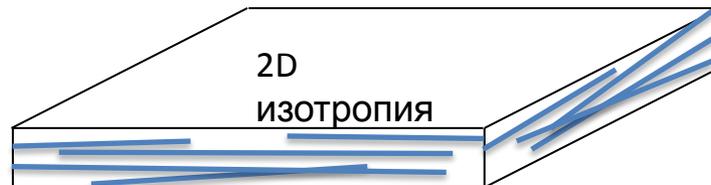
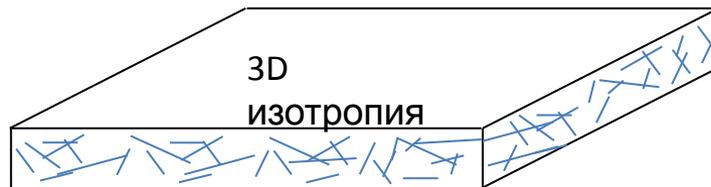
1. КОМПОЗИТНЫЙ МОНОСЛОЙ

3. Моделирование свойств хаотично армированного композита

Особенности хаотичного армирования

Известно, что хаотично армированные композиты проявляют изотропию свойств. Если длина включений (усы, микроволокна, нанотрубки) мала по сравнению с толщиной монослоя, то можно считать, что включения равномерно распределяются в пространстве материала, обеспечивая его одинаковыми интегральными характеристиками во всех направлениях (3D изотропия).

Однако, если говорить о наиболее распространенных в промышленности волокнистых композитах, армированных короткими волокнами (например, ХАСП), то следует отметить, что длина волокон таких материалов значительно превышает толщину монослоя. Волокна при этом распределяются равномерно только в плоскости армирования монослоя. Поэтому такой материал называют 2D изотропным (или изотропным в плоскости армирования).



ХАС
П

I. КОМПОЗИТНЫЙ МОНОСЛОЙ

3. Моделирование свойств хаотично армированного композита

Характеристики упругости

1. Подход Кокса :

Допущения:

- ориентация волокон в пространстве более важна, чем их длина, поэтому для упрощения выражений короткие волокна в модели можно заменить бесконечными
- хаотичная структура композита заменяется регулярной, где: а) в случае 2D изотропного композита волокна равномерно распределяются по всем направлениям плоскости армирования; б) в случае 3D изотропного композита – по всем направлениям пространства.
- влиянием матрицы можно пренебречь

Подход Кокса для 2D изотропного композита

Модуль упругости: $E = \frac{1}{3} E_f v_f$

Модуль сдвига: $G = \frac{1}{8} E_f v_f$

Коэффициент Пуассона: $\mu = \frac{1}{3}$

Подход Кокса для 3D изотропного композита

Модуль упругости: $E = \frac{1}{6} E_f v_f$

Модуль сдвига: $G = \frac{1}{15} E_f v_f$

Коэффициент Пуассона: $\mu = \frac{1}{4}$

1. КОМПОЗИТНЫЙ МОНОСЛОЙ

3. Моделирование свойств хаотично армированного композита

Характеристики упругости

2. Подход Цая – Пагано (2D изотропный материал)

Для оценки интегральных характеристик упругости композитов, хаотично армированных в плоскости армирования, Цай и Пагано сохранили первые два допущения подхода Кокса:

- ориентация волокон в пространстве более важна, чем их длина, поэтому для упрощения выражений короткие волокна в модели заменяются бесконечными
- хаотичная структура композита заменяется регулярной, где волокна равномерно распределяются по всем направлениям плоскости армирования

Однако, в отличие от Кокса, они кроме волокон включили в рассмотрение также и матрицу.

Подход Цая-Пагано для 2D изотропного композита

Модуль упругости:
$$E = \frac{3}{8} E_L + \frac{5}{8} E_T$$

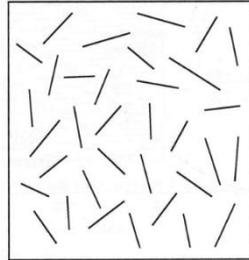
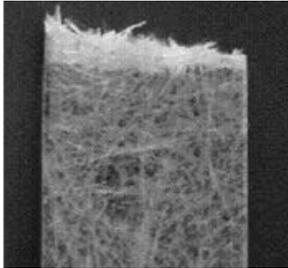
Модуль сдвига:
$$G = \frac{1}{8} E_L + \frac{1}{4} E_T$$

Коэффициент Пуассона:
$$\mu = \frac{E}{2G} - 1$$

I. КОМПОЗИТНЫЙ МОНОСЛОЙ

3. Моделирование свойств хаотично армированного композита

Предел прочности при растяжении σ_u
(2D изотропный материал)



1. Подход Лиса:

$$\sigma_{tu} = \frac{2\tau_{LTu}}{\pi} \left(1 + \frac{\sigma_{Ttu}}{\sigma'_m} + \ln \frac{\sigma_{Ttu}\sigma'_m}{\tau_{LTu}^2} \right)$$

Здесь σ'_m – напряжение в матрице, соответствующее разрушению волокон при растяжении однонаправленного композита, армированного непрерывными волокнами.

2. Подход Хана:

$$\sigma_{tu} = \frac{4}{\pi} \sqrt{\sigma_{LTu}\sigma_{Ttu}}$$

2D хаотично армированный композит заменяют композитом, содержащим непрерывные волокна, равномерно распределенные по всем направлениям плоскости армирования. Предел прочности σ_{tu} при этом вычисляют по правилу смесей.

3. Метод Хальпина Кардоса:

2D хаотично армированный композит представляют как квазиизотропный с укладкой $[0/90/\pm 45]_s$, где каждый слой – это однонаправленный композит, армированный короткими волокнами той же длины и с той же объемной долей, что и у исходного. Для прогнозирования прочности используют теорию слоистых пластин и теорию максимальных деформаций.

I. КОМПОЗИТНЫЙ МОНОСЛОЙ

4. Моделирование свойств тканевого композита

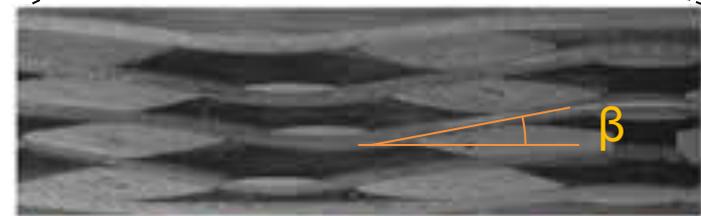
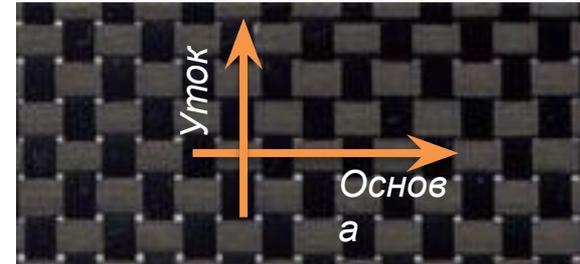
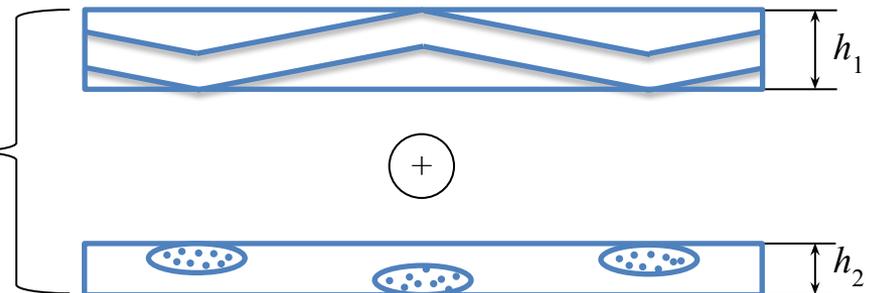
Допущения:

- Монослой условно состоит из двух слоев однонаправленно армированных искривленными волокнами в направлении основы и утка
- Направления нитей основы и утка определяется соответственно индексами «о» и «у»
- Толщины слоев пропорциональны объемному содержанию волокон: $\frac{v_{fo}}{v_f} h$ и $\frac{v_{fy}}{v_f} h$ $v_{fo} + v_{fy} = v_f$

- Искривленную форму волокон представляют в виде ломаной, состоящей из прямолинейных участков, наклон которых определяется углом β
- Распрямление волокон в процессе нагружения не учитывают



=

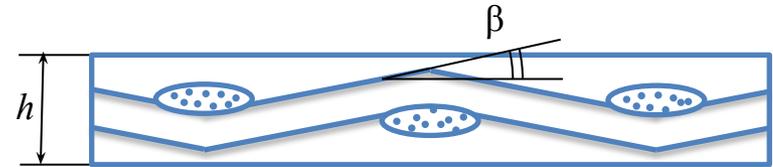


I. КОМПОЗИТНЫЙ МОНОСЛОЙ

4. Моделирование свойств тканевого композита

Модуль упругости
вдоль волокон
ОСНОВЫ:

$$E_o = E_o' \frac{v_f v_f}{v_f} + E_o'' \frac{v_f}{v_f}$$



$$E_o' = \frac{(1 + \operatorname{tg}^2 \beta_o)^2}{\frac{1}{E_{\parallel}} + \left(\frac{1}{G_{\perp}} - 2 \frac{\mu_{\perp}}{E_{\parallel}} \right) \operatorname{tg}^2 \beta_o + \frac{1}{E_{\perp}} \operatorname{tg}^4 \beta_o}$$

$$E_o'' = \left[\left(1 - 2 \sqrt{\frac{v_f}{\pi}} \right) \frac{1}{1 - \mu_m^2} + 2 \sqrt{\frac{v_f}{\pi}} \cdot I \right] E_m$$

$$E_{\parallel} = v_f E_f + (1 - v_f) E_m$$

$$E_{\perp} = E_o''$$

$$\mu_{\perp} = v_f \mu_f + (1 - v_f) \mu_m$$

$$G_{\perp} = \left[1 + 2 \sqrt{\frac{v_f}{\pi}} \cdot k \left(\frac{2k}{\sqrt{k^2 - 1}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{k+1}{k-1}} - \frac{\pi}{2} \right) - 2 \sqrt{\frac{v_f}{\pi}} \right] G_m$$

$$a = \frac{1 - \mu_m^2}{E_m}$$

$$b = 2 \sqrt{\frac{v_f}{\pi}} \left(\frac{1 - \mu_f^2}{E_f} - a \right)$$

$$k = \frac{G_f}{2(G_f - G_m) \sqrt{\frac{v_f}{\pi}}}$$

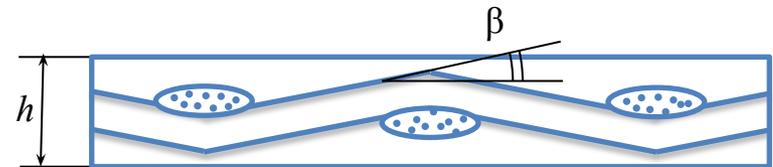
$$I = \frac{1}{b E_m} \left[\frac{\pi}{2} - \frac{2a}{\sqrt{a^2 - b^2}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \right]$$

I. КОМПОЗИТНЫЙ МОНОСЛОЙ

4. Моделирование свойств тканевого композита

Модуль упругости вдоль волокон утка:

$$E_y = E_y' \frac{v_{fy}}{v_f} + E_y'' \frac{v_{fo}}{v_f}$$



Модуль упругости вдоль волокон утка определяется путем перемены мест индексов «o» и «y» в расчетных выражениях

Модуль сдвига в плоскости армирования:

$$G_{oy} = G_{\perp\perp} = \left[1 + 2\sqrt{\frac{v_f}{\pi}} \cdot k \left(\frac{2k}{\sqrt{k^2 - 1}} \arctg \sqrt{\frac{k+1}{k-1}} - \frac{\pi}{2} \right) - 2\sqrt{\frac{v_f}{\pi}} \right] G_m$$

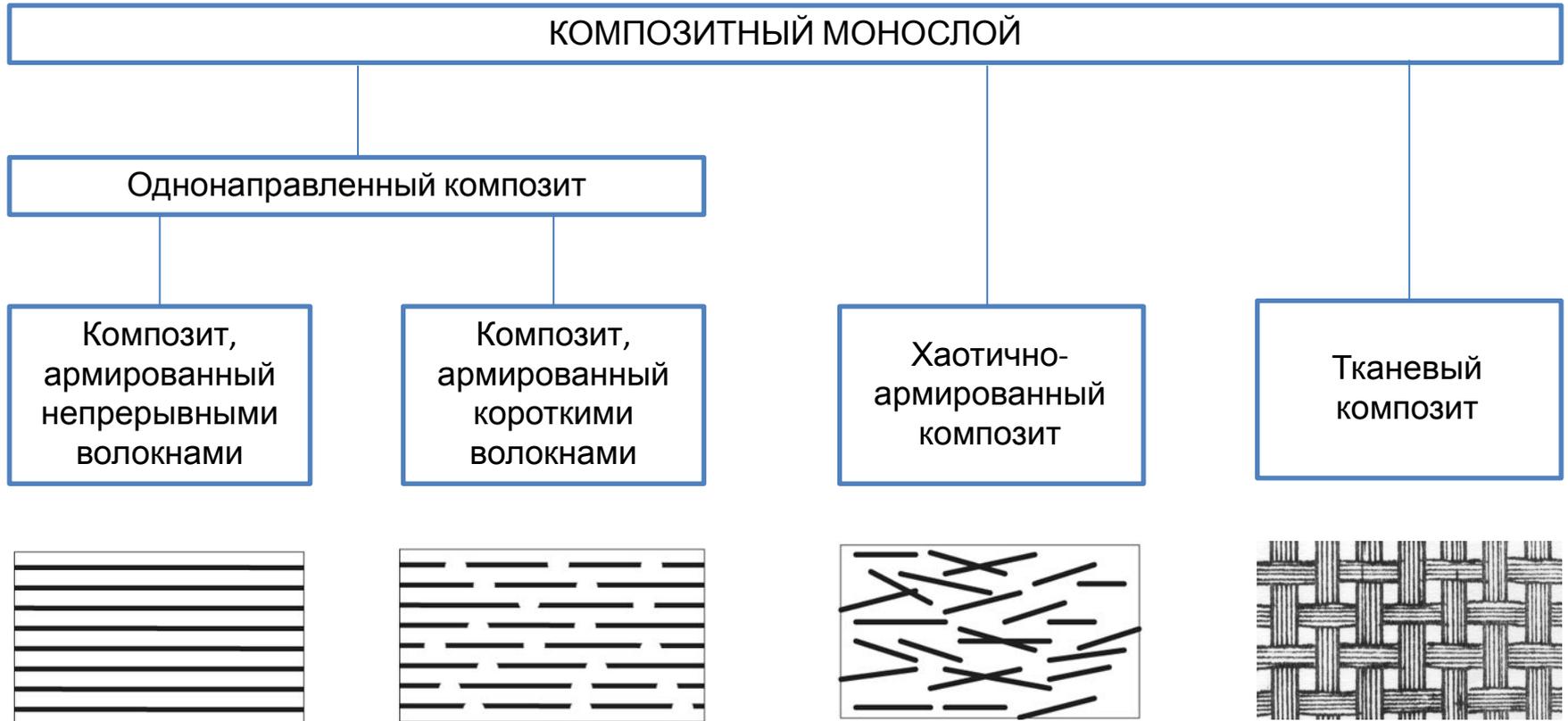
Коэффициенты Пуассона в плоскости армирования:

$$\mu_{oy} = \frac{v_f \mu_{\perp\perp} E_{\perp}}{v_{fo} E_{\perp} + v_{fy} E_y'}$$

$$\mu_{yo} = \frac{v_f \mu_{\perp\perp} E_{\perp}}{v_{fo} E_o' + v_{fy} E_{\perp}}$$

I. КОМПОЗИТНЫЙ МОНОСЛОЙ

5. ХАРАКТЕРИСТИКИ УПРУГОСТИ КОМПОЗИТНОГО МОНОСЛОЯ



I. КОМПОЗИТНЫЙ МОНОСЛОЙ

5. Характеристики упругости композитного монослоя i. КОМПОЗИТ, АРМИРОВАННЫЙ НЕПРЕРЫВНЫМИ ВОЛОКНАМИ

Продольный модуль упругости:

$$E_L = E_f v_f + E_m v_m$$

Главный коэффициент Пуассона:

$$\mu_{LT} = \mu_f v_f + \mu_m v_m$$

Трансверсальный модуль упругости:

$$\frac{1}{E_T} = \frac{v_f}{E_f} + \frac{v_m}{E_m}$$

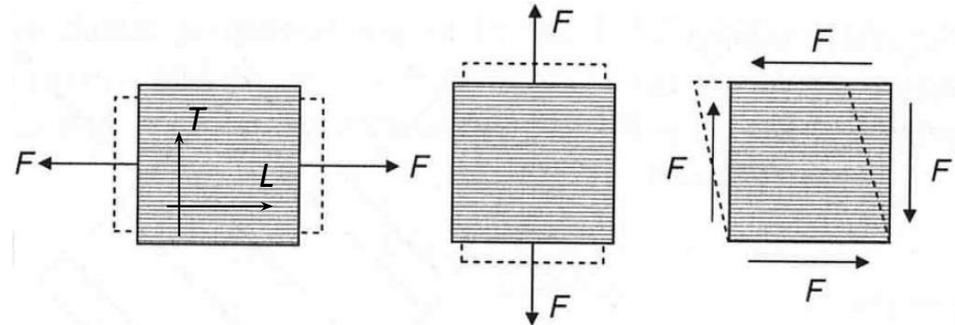
Второстепенный коэффициент

Пуассона:

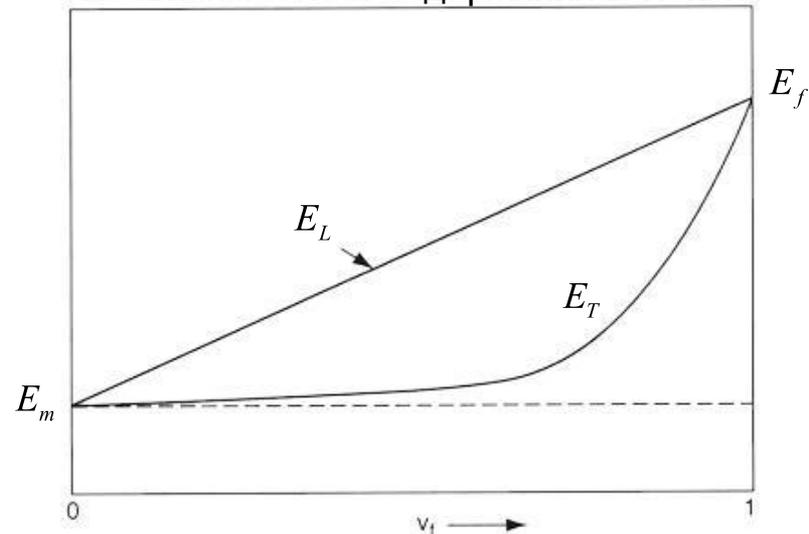
$$\mu_{TL} = \frac{E_T}{E_L} \mu_{LT}$$

Внутрислойный модуль сдвига:

$$\frac{1}{G_{LT}} = \frac{1}{G_{TL}} = \frac{v_f}{G_f} + \frac{v_m}{G_m}$$



Модули упругости
в зависимости от содержания волокон



I. КОМПОЗИТНЫЙ МОНОСЛОЙ

5. ХАРАКТЕРИСТИКИ УПРУГОСТИ КОМПОЗИТНОГО МОНОСЛОЯ

ii. КОМПОЗИТ, АРМИРОВАННЫЙ КОРОТКИМИ ВОЛОКНАМИ

Подход Хальпина-Цая

Продольный и трансверсальный модули упругости:

$$E_L = \frac{1 + 2 \frac{l_f}{d_f} \eta_L v_f}{1 - \eta_L v_f} E_m \quad E_T = \frac{1 + 2 \eta_T v_f}{1 - \eta_T v_f} E_m$$

Внутрислойный модуль сдвига:

$$G_{LT} = G_{TL} = \frac{1 + \eta_G v_f}{1 - \eta_G v_f} G_m$$

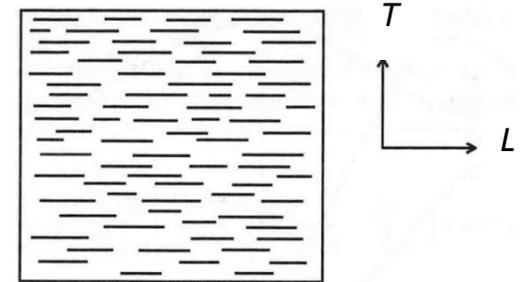
Главный и второстепенный коэффициенты

Пуассона:

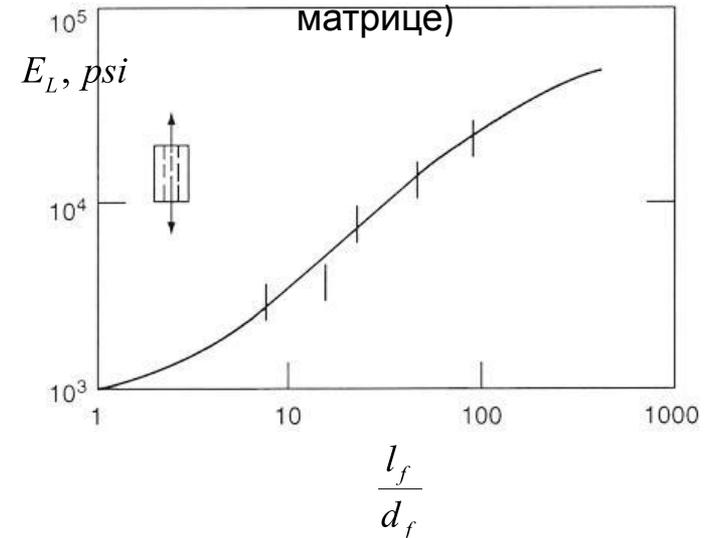
$$\mu_{LT} = \mu_f v_f + \mu_m v_m \quad \mu_{TL} = \frac{E_T}{E_L} \mu_{LT}$$

Здесь

$$\eta_L = \frac{\frac{E_f}{E_m} - 1}{\frac{E_f}{E_m} + 2 \frac{l_f}{d_f}} \quad \eta_T = \frac{\frac{E_f}{E_m} - 1}{\frac{E_f}{E_m} + 2} \quad \eta_G = \frac{\frac{G_f}{G_m} - 1}{\frac{G_f}{G_m} + 1}$$



Продольный модуль упругости
в зависимости от длины волокон
(нейлоновые волокна в полимерной
матрице)



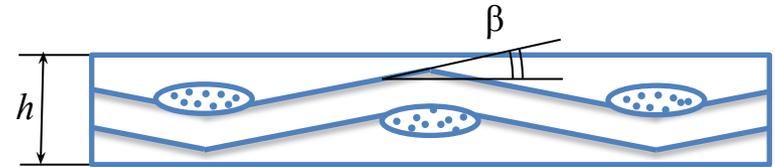
I. КОМПОЗИТНЫЙ МОНОСЛОЙ

5. ХАРАКТЕРИСТИКИ УПРУГОСТИ КОМПОЗИТНОГО МОНОСЛОЯ

V. ТКАНЕВЫЙ КОМПОЗИТ

Модуль упругости
вдоль волокон
ОСНОВЫ:

$$E_o = E_o' \frac{v_f v_f}{v_f} + E_o'' \frac{v_f}{v_f}$$



$$E_o' = \frac{(1 + \operatorname{tg}^2 \beta_o)^2}{\frac{1}{E_{\parallel}} + \left(\frac{1}{G_{\perp}} - 2 \frac{\mu_{\perp}}{E_{\parallel}} \right) \operatorname{tg}^2 \beta_o + \frac{1}{E_{\perp}} \operatorname{tg}^4 \beta_o}$$

$$E_o'' = \left[\left(1 - 2 \sqrt{\frac{v_f}{\pi}} \right) \frac{1}{1 - \mu_m^2} + 2 \sqrt{\frac{v_f}{\pi}} \cdot I \right] E_m$$

$$E_{\parallel} = v_f E_f + (1 - v_f) E_m \quad \mu_{\perp} = v_f \mu_f + (1 - v_f) \mu_f$$

$$E_{\perp} = E_o'' = \left[\left(1 - 2 \sqrt{\frac{v_f}{\pi}} \right) \frac{1}{1 - \mu_m^2} + 2 \sqrt{\frac{v_f}{\pi}} \cdot I \right] E_m$$

$$G_{\perp} = \left[1 + 2 \sqrt{\frac{v_f}{\pi}} \cdot k \left(\frac{2k}{\sqrt{k^2 - 1}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{k+1}{k-1}} - \frac{\pi}{2} \right) - 2 \sqrt{\frac{v_f}{\pi}} \right] G_m$$

$$a = \frac{1 - \mu_m^2}{E_m} \quad b = 2 \sqrt{\frac{v_f}{\pi}} \left(\frac{1 - \mu_f^2}{E_f} - a \right)$$

$$k = \frac{G_f}{2(G_f - G_m) \sqrt{\frac{v_f}{\pi}}}$$

$$I = \frac{1}{b E_m} \left[\frac{\pi}{2} - \frac{2a}{\sqrt{a^2 - b^2}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \right]$$

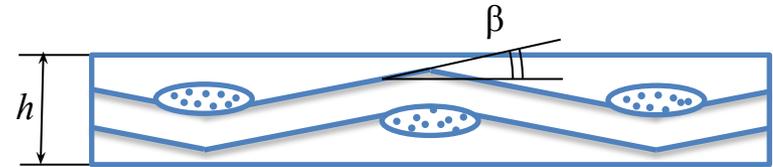
I. КОМПОЗИТНЫЙ МОНОСЛОЙ

5. ХАРАКТЕРИСТИКИ УПРУГОСТИ КОМПОЗИТНОГО МОНОСЛОЯ

V. ТКАНЕВЫЙ КОМПОЗИТ

Модуль упругости вдоль волокон утка:

$$E_y = E_y' \frac{v_{fy}}{v_f} + E_y'' \frac{v_{fo}}{v_f}$$



Модуль упругости вдоль волокон утка определяется путем перемены мест индексов «o» и «y» в расчетных выражениях

Модуль сдвига в плоскости армирования:

$$G_{oy} = G_{\perp\perp} = \left[1 + 2\sqrt{\frac{v_f}{\pi}} \cdot k \left(\frac{2k}{\sqrt{k^2 - 1}} \arctg \sqrt{\frac{k+1}{k-1}} - \frac{\pi}{2} \right) - 2\sqrt{\frac{v_f}{\pi}} \right] G_m$$

Коэффициенты Пуассона в плоскости армирования:

$$\mu_{oy} = \frac{v_f \mu_{\perp\perp} E_{\perp}}{v_{fo} E_{\perp} + v_{fy} E_y'}$$

$$\mu_{yo} = \frac{v_f \mu_{\perp\perp} E_{\perp}}{v_{fo} E_o' + v_{fy} E_{\perp}}$$

I. КОМПОЗИТНЫЙ МОНОСЛОЙ

5. ХАРАКТЕРИСТИКИ УПРУГОСТИ КОМПОЗИТНОГО МОНОСЛОЯ

iii. ХАРАКТЕРИСТИКИ ОДНОНАПРАВЛЕННОГО КОМПОЗИТНОГО МОНОСЛОЯ В НАПРАВЛЕНИИ θ°

Модуль упругости в направлении оси x:

$$\frac{1}{E_x} = \frac{\cos^4 \theta}{E_1} + \frac{\sin^4 \theta}{E_2} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{G_{12}} - \frac{2\mu_{12}}{E_1} \right) \sin^2 2\theta$$

Модуль упругости в направлении оси y:

$$\frac{1}{E_y} = \frac{\sin^4 \theta}{E_1} + \frac{\cos^4 \theta}{E_2} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{G_{12}} - \frac{2\mu_{12}}{E_1} \right) \sin^2 2\theta$$

Модуль сдвига в осях {x, y}:

$$\frac{1}{G_{xy}} = \frac{1+2\mu_{12}}{E_1} + \frac{1}{E_2} - \left(\frac{1+2\mu_{12}}{E_1} + \frac{1}{E_2} - \frac{1}{G_{12}} \right) \sin^2 2\theta$$

Главный коэффициент Пуассона:

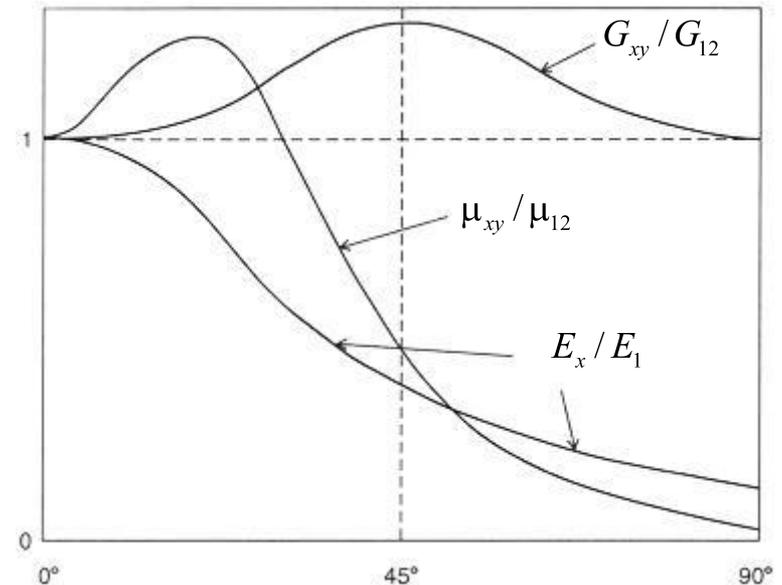
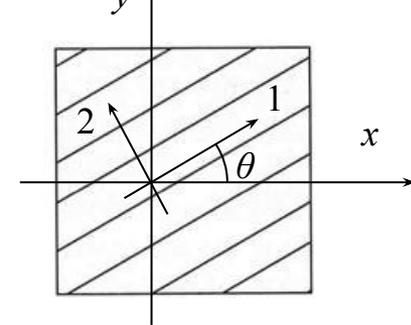
$$\mu_{xy} = E_L \left[\frac{\mu_{12}}{E_1} - \frac{1}{4} \left(\frac{1+2\mu_{12}}{E_1} + \frac{1}{E_2} - \frac{1}{G_{12}} \right) \sin^2 2\theta \right]$$

Второстепенный коэффициент Пуассона:

$$\mu_{21} = \frac{E_2}{E_1} \mu_{12}$$

θ – это угол между осями L и x однонаправленного композитного

монослоя



I. КОМПОЗИТНЫЙ МОНОСЛОЙ

5. ХАРАКТЕРИСТИКИ УПРУГОСТИ КОМПОЗИТНОГО МОНОСЛОЯ

iv. ХАОТИЧНО АРМИРОВАННЫЙ КОМПОЗИТ

Подход Кокса для 2D изотропного композита

Модуль упругости: $E = \frac{1}{3} E_f v_f$

Модуль сдвига: $G = \frac{1}{8} E_f v_f$

Коэффициент Пуассона: $\mu = \frac{1}{3}$

Подход Кокса для 3D изотропного композита

Модуль упругости: $E = \frac{1}{6} E_f v_f$

Модуль сдвига: $G = \frac{1}{15} E_f v_f$

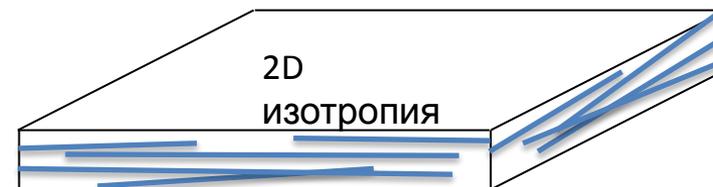
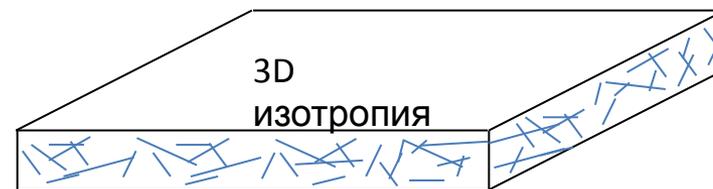
Коэффициент Пуассона: $\mu = \frac{1}{4}$

Подход Цая-Пагано для 2D изотропного композита

Модуль упругости: $E = \frac{3}{8} E_L + \frac{5}{8} E_T$

Модуль сдвига: $G = \frac{1}{8} E_L + \frac{1}{4} E_T$

Коэффициент Пуассона: $\mu = \frac{E}{2G} - 1$



I. КОМПОЗИТНЫЙ МОНОСЛОЙ

6. СВЯЗЬ МЕЖДУ НАПРЯЖЕНИЯМИ И ДЕФОРМАЦИЯМИ

i. Закон Гука для изотропного материала

Закон Гука выражает линейную связь между компонентами напряжений и деформаций.

Для изотропного материала закон Гука имеет следующий вид:

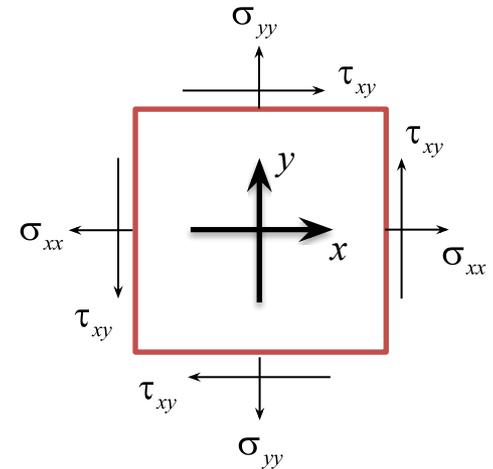
$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy}/2 \end{bmatrix} = [S] \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}$$

$$[S] = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\mu & 0 \\ -\mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1+\mu \end{bmatrix} \quad \text{– матрица податливости}$$

И наоборот:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = [Q] \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy}/2 \end{bmatrix}$$

$$[Q] = [S]^{-1} = \frac{E}{1-\mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\mu \end{bmatrix} \quad \text{– матрица жесткости}$$



У изотропного материала при повороте осей x и y на любой угол матрицы жесткости и податливости не меняются.

I. КОМПОЗИТНЫЙ МОНОСЛОЙ

6. СВЯЗЬ МЕЖДУ НАПРЯЖЕНИЯМИ И ДЕФОРМАЦИЯМИ

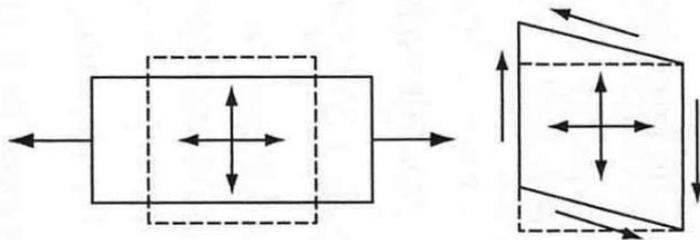
ii. Особенности деформирования ортотропных материалов

Одна из основных особенностей ортотропных материалов, отличающая их от традиционных изотропных, таких как стали и сплавы, – это связанность продольных и угловых деформаций

Деформирование
в главных осях $\{L, T\}$

При нагружении
растяжением
(или сжатием)
возникают
только
продольные
деформации

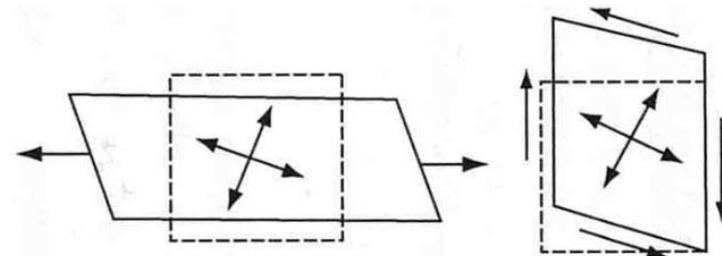
При нагружении
сдвигом
возникают
только
сдвиговые
деформации



Деформирование
в произвольных осях $\{x, y\}$

При нагружении
растяжением (или
сжатием)
возникают не
только продольные
деформации,
но и угловые

При нагружении
сдвигом возникают
не только угловые
деформации, но и
продольные



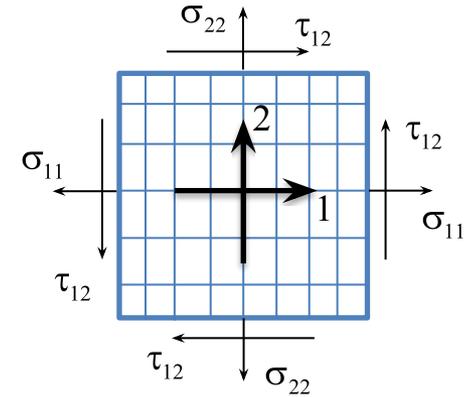
I. КОМПОЗИТНЫЙ МОНОСЛОЙ

6. СВЯЗЬ МЕЖДУ НАПРЯЖЕНИЯМИ И ДЕФОРМАЦИЯМИ

iii. Закон Гука для ортотропного материала в главной системе координат

Связь между напряжениями и деформациями ортотропного монослоя удобно записывать в матричной форме, так как получаемые выражения легко обращаются.

В главной системе координат монослоя {1, 2} (у однонаправленного композита $1 \equiv L, 2 \equiv T$) деформации и напряжения связаны следующим образом:



$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12}/2 \end{bmatrix} = [S] \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \end{bmatrix}, \text{ где}$$

$$[S] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\mu_{12}}{E_1} & 0 \\ -\frac{\mu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2G_{12}} \end{bmatrix}$$

– матрица податливости в главной системе координат {1, 2}

И наоборот:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = [Q] \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12}/2 \end{bmatrix}, \text{ где}$$

$$[Q] = [S]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{E_1}{1 - \mu_{12}\mu_{21}} & \frac{\mu_{12}E_2}{1 - \mu_{12}\mu_{21}} & 0 \\ \frac{\mu_{12}E_2}{1 - \mu_{12}\mu_{21}} & \frac{E_2}{1 - \mu_{12}\mu_{21}} & 0 \\ 0 & 0 & 2G_{12} \end{bmatrix}$$

– матрица жесткости в главной координатной системе {1, 2}, где

$$\mu_{21} = \frac{E_2}{E_1} \mu_{12}$$

I. КОМПОЗИТНЫЙ МОНОСЛОЙ

6. СВЯЗЬ МЕЖДУ НАПРЯЖЕНИЯМИ И ДЕФОРМАЦИЯМИ

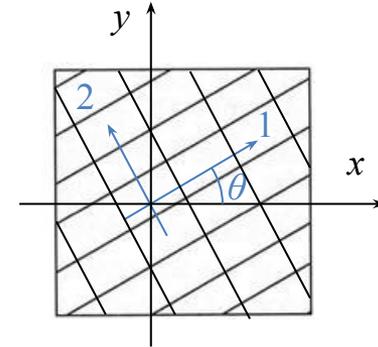
iv. Закон Гука для ортотропного материала в произвольной системе

координат

В произвольной системе координат $\{x, y\}$, повернутой на угол θ относительно главных осей 1 и 2 ортотропного монослоя, напряжения и деформации монослоя связаны следующим образом:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy}/2 \end{bmatrix} = [S_\theta] \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = [Q_\theta] \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy}/2 \end{bmatrix}$$



$[S_\theta] = [T]^{-1} [S] [T]$ – матрица податливости в координатной системе $\{x, y\}$

$[Q_\theta] = [T]^{-1} [Q] [T]$ – матрица жесткости в координатной системе $\{x, y\}$

$[T] = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 2 \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -2 \sin \theta \cos \theta \\ -\sin \theta \cos \theta & \sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix}$ – матрица поворота на угол θ , $[T(\theta)]^{-1} = [T(-\theta)]$

Компоненты напряжений и деформаций в главной системе координат монослоя:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = [T] \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12}/2 \end{bmatrix} = [T] \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy}/2 \end{bmatrix}$$

I. КОМПОЗИТНЫЙ МОНОСЛОЙ

6. СВЯЗЬ МЕЖДУ НАПРЯЖЕНИЯМИ И ДЕФОРМАЦИЯМИ

iv. Закон Гука для ортотропного материала в произвольной системе координат

ПРИМЕР.

Однонаправленный композит, армированный непрерывными волокнами под углом $\theta = -30^\circ$ к оси x , нагружен нормальными напряжениями $\sigma_{xx} = 10$ МПа.

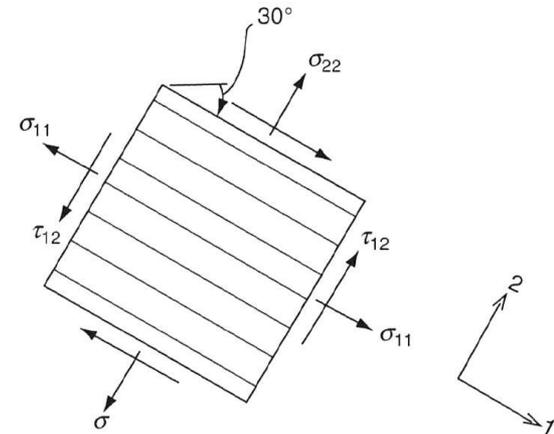
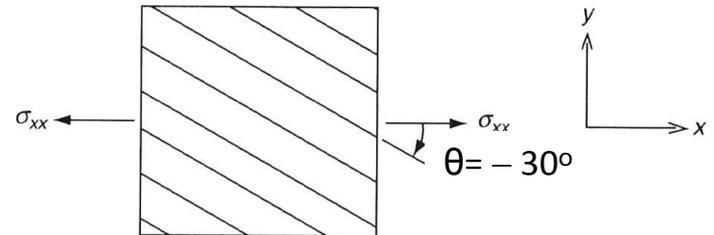
Определить напряжения в главных осях монослоя.

РЕШЕНИЕ.

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 2\sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -2\sin \theta \cos \theta \\ -\sin \theta \cos \theta & \sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

После подстановки $\theta = -30^\circ$ и $\sigma_{xx} = 10$ МПа получим:

$$\sigma_{11} = 7,5 \text{ МПа}, \sigma_{22} = 2,5 \text{ МПа}, \tau_{12} = 4,33 \text{ МПа}$$



I. КОМПОЗИТНЫЙ МОНОСЛОЙ

6. СВЯЗЬ МЕЖДУ НАПРЯЖЕНИЯМИ И ДЕФОРМАЦИЯМИ

iv. Закон Гука для ортотропного материала в произвольной системе координат

ПРИМЕР.

Тонкая пластина нагружена напряжениями $\sigma_{xx} = 1$ ГПа и $\sigma_{yy} = 0,5$ ГПа.

ВЫЧИСЛИТЬ деформации в осях $\{x, y\}$ пластины, изготовленной из:

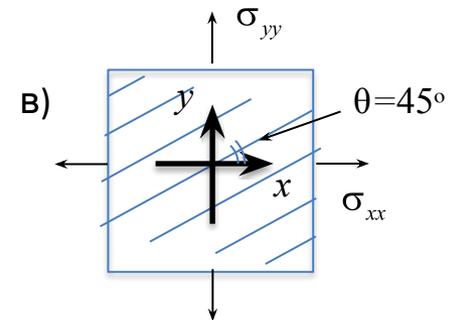
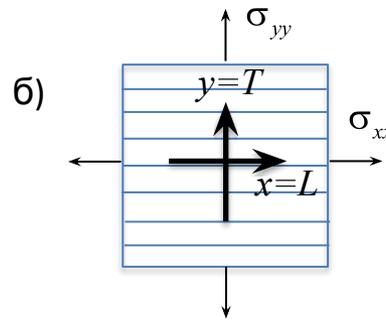
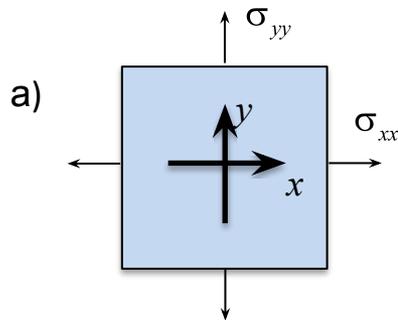
- а) стали;
- б) 0° однонаправленного боропластика;
- в) 45° однонаправленного боропластика.

Характеристики упругости стали и боропластика:

Сталь: $E = 207$ ГПа, $\mu = 0,33$;

Боропластик: $E_L = 207$ ГПа, $E_T = 19$ ГПа, $\mu_{LT} = 0,21$, $G_{LT} = 6,4$ ГПа.

Отметим, что модуль упругости стали совпадает с продольным модулем упругости боропластика.



I. КОМПОЗИТНЫЙ МОНОСЛОЙ

6. СВЯЗЬ МЕЖДУ НАПРЯЖЕНИЯМИ И ДЕФОРМАЦИЯМИ

iv. Закон Гука для ортотропного материала в произвольной системе координат

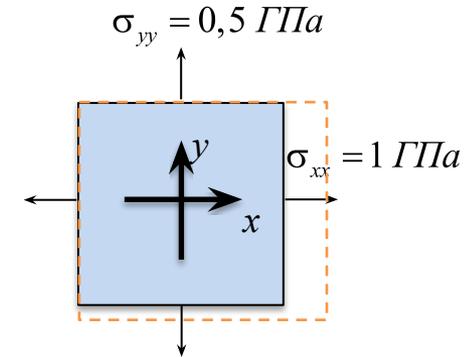
РЕШЕНИЕ.

а) Сталь – изотропный материал:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy}/2 \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\mu & 0 \\ -\mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1+\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{yy} \\ \sigma_{xx} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{1}{207} \begin{bmatrix} 1 & -0,33 & 0 \\ -0,33 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1,33 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0,5 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4,03 \\ 0,82 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}$$

$$\varepsilon_{xx} = 4,03 \cdot 10^{-3}, \varepsilon_{yy} = 0,82 \cdot 10^{-3}, \gamma_{xy} = 0$$

Получили очевидный результат: сдвиговых деформаций нет, а $\varepsilon_{xx} > \varepsilon_{yy}$

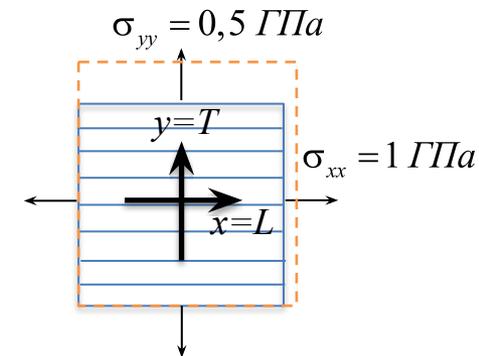


б) 0° однонаправленный боропластик – ортотропный материал, у которого оси {L,T} совпадают с осями нагружения {x,y} :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{LL} \\ \varepsilon_{TT} \\ \gamma_{LT}/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_L} & -\frac{\mu_{LT}}{E_L} & 0 \\ -\frac{\mu_{LT}}{E_L} & \frac{1}{E_T} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2G_{LT}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{LL} \\ \sigma_{TT} \\ \tau_{LT} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{207} & -\frac{0,21}{207} & 0 \\ -0,21 & \frac{1}{19} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12,8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0,5 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4,32 \\ 25,3 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}$$

$$\varepsilon_{xx} = 4,32 \cdot 10^{-3}, \varepsilon_{yy} = 25,3 \cdot 10^{-3}, \gamma_{xy} = 0$$

Результат качественно отличается от предыдущего: $\varepsilon_{xx} < \varepsilon_{yy}$ при $\sigma_{xx} > \sigma_{yy}$, хотя и частично совпадает с ним (сдвиговые деформации отсутствуют)



I. КОМПОЗИТНЫЙ МОНОСЛОЙ

6. СВЯЗЬ МЕЖДУ НАПРЯЖЕНИЯМИ И ДЕФОРМАЦИЯМИ

iv. Закон Гука для ортотропного материала в произвольной системе координат

в) 45° однонаправленный боропластик – ортотропный материал, у которого главные оси повернуты на угол $\theta=45^\circ$ по отношению к осями $\{x,y\}$ нагружения

Матрица податливости в осях $\{x, y\}$ определяется следующим образом:

$$[S_\theta] = [T]^{-1} [S] [T] = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & -2sc \\ s^2 & c^2 & 2sc \\ sc & -sc & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{E_L} & -\frac{\mu_{LT}}{E_L} & 0 \\ -\frac{\mu_{LT}}{E_L} & \frac{1}{E_T} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2G_{LT}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 2sc \\ s^2 & c^2 & -2sc \\ -sc & sc & c^2 - s^2 \end{bmatrix}, \text{ где } c \equiv \cos(\theta), \text{ а } s \equiv \sin(\theta)$$

Подставив в выражение
$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy}/2 \end{bmatrix} = [S_\theta] \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}$$

матрицу податливости $[S_\theta]$ и напряжения: $\sigma_{xx}=1$ ГПа, $\sigma_{yy}=0,5$ ГПа и $\tau_{xy}=0$,
получим деформации в осях $\{x, y\}$:

$$\varepsilon_{xx} = 40,326 \cdot 10^{-3}, \varepsilon_{yy} = 1,270 \cdot 10^{-3}, \gamma_{xy} = -35,86 \cdot 10^{-3}$$

Результат заметно отличается от предыдущих – при нагружении растяжением появились сдвиговые деформации

