Методическая разработка по дисциплине «Математика» на тему «Физический и геометрический смысл производной»

Составила: преподаватель высшей категории
Викулина Елена Владимировна
ГБПОУ «колледж «Красносельский»

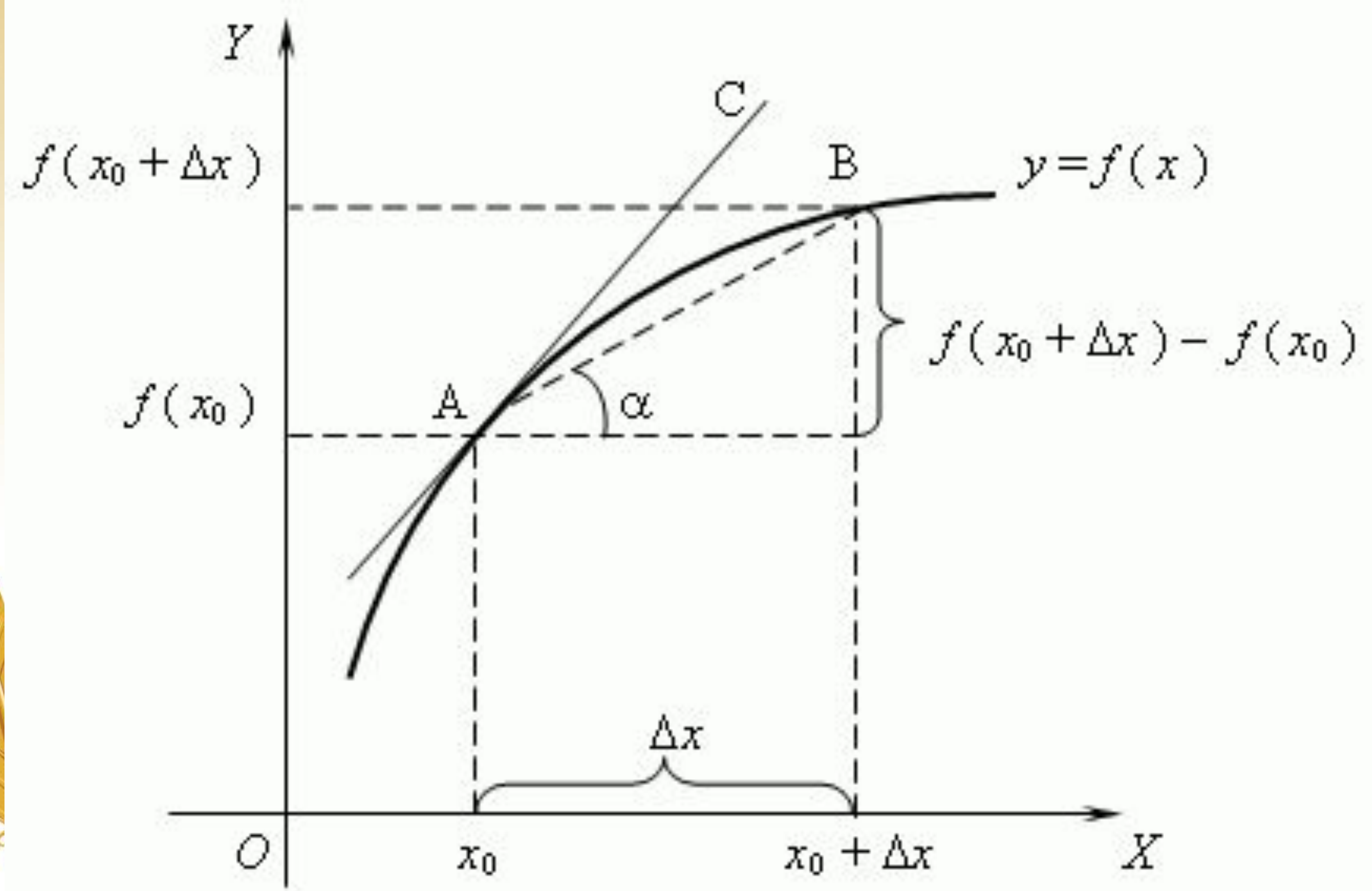
Г.Санкт-Петербург 2013 год

Содержание

Определение

- Производной функции в данной точке называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента при условии ,что приращение аргумента стремится к нулю

$$f'(x) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$


Y
C
$f(x_0+\Delta x)$
B
$y=f(x)$
$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$
$f(x_0)$
A
α
Δx
O
x_0
$x_0+\Delta x$
X

Физический смысл производной

- Если материальная точка движется по закону $S\ (t)$, то скорость её движения $V\ (t)$ в момент времени t равна производной S‘ (t), то есть
$V\ (t)$ = S‘ (t).
- Производная от скорости – ускорение
a (t) = V‘ (t), то есть ускорение равно второй производной от функции
a (t) = V‘ (t) = S“ (t).

Задачи на физический смысл производной

- №1 Тело движется по прямой так, что расстояние от начальной точки изменяется по закону
$S = 5t + 0{,}2t^2 - 6$ (м), где t – время движения в секундах.
Найдите скорость тела через 5 секунд после начала движения.

- №2 Тело движется по прямой так, что расстояние от начальной точки изменяется по закону $S = 2t^3 - 12t^2 + 7$ (м), где t – время движения в секундах. Через сколько секунд после начала движения ускорение тела будет равно 36 м/с²?
- №3 Две материальные точки движутся по законам $S1 = 2{,}5t^2 - 6t + 1$;
  $S2 = 0{,}5t^2 + 2t - 3$. В какой момент времени их скорости будут равны?

Решение задач

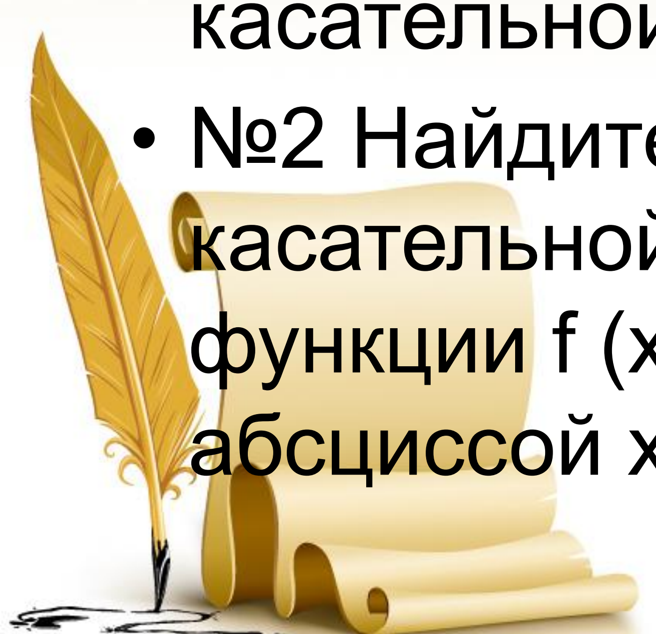
- №1 $V(t) = S'(t) = 5+0{,}6t^2$;
  $V(5) = 5+0{,}6*5^2 = 20$ (м/с)
- №2 $V(t) = S'(t) = 6t^2 - 24t$; $a(t) = V'(t) = S''(t) = 12t - 24$; По условию $a(t) = 36$; то есть
  $12t - 24 = 36$; $t = 5$ (с)
- №3 $V1(t) = S'1(t) = 5t - 6$;
  $V2(t) = S'2(t) = t + 2$;
  По условию $V1(t) = V2(t)$; то есть
  $5t - 6 = t + 2$; $t = 2$ (с)

Геометрический смысл производной

Геометрический смысл производной состоит в том, что значение производной функции y = f (x) в точке x равно угловому коэффициенту касательной к графику функции в точке с абсциссой x.

$$f'(x) = k = tg\alpha$$

Задачи на угловой коэффициент касательной

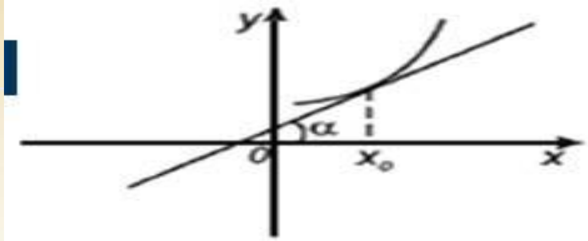


- №1 Дана функция f (x) =$3x^2+5x-6$. Найдите координаты точки её графика, в которой угловой коэффициент касательной к нему равен «-7».
- №2 Найдите угловой коэффициент касательной, проведённой к графику функции f (x) = 4Cos x+3 в точке с абсциссой x = -$\pi/3$.

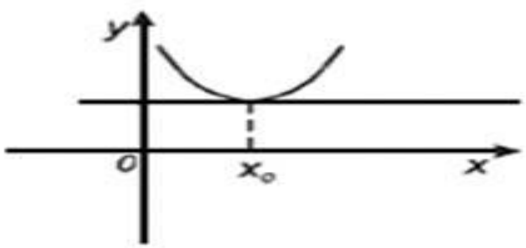
Решение задач

- №1 Ккас = f ‘(x) = 6x + 5;
  По условию Ккас = -7, то есть
  6x + 5 = -7; x = -2;
  y = f ‘(-2) = 3*(-2)^2 + 5*(-2) – 6 = -4;
  (-2; -4) – точка касания
- №2 Ккас = f ‘(x) = 6*Cosx + Sinx;
  f ‘(π/3) = 6 *Cos(π/3) + Sin(π/3) = 6*1/2 + $\sqrt{}$3/2 = (6 + $\sqrt{}$3)/2 ;   Ккас = (6 + $\sqrt{}$3)/2 ;

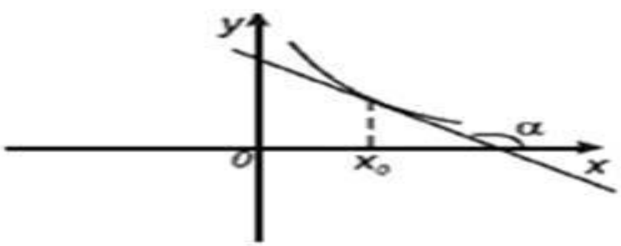
Зависимость знаков производной от угла наклона касательной



$f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha > 0$

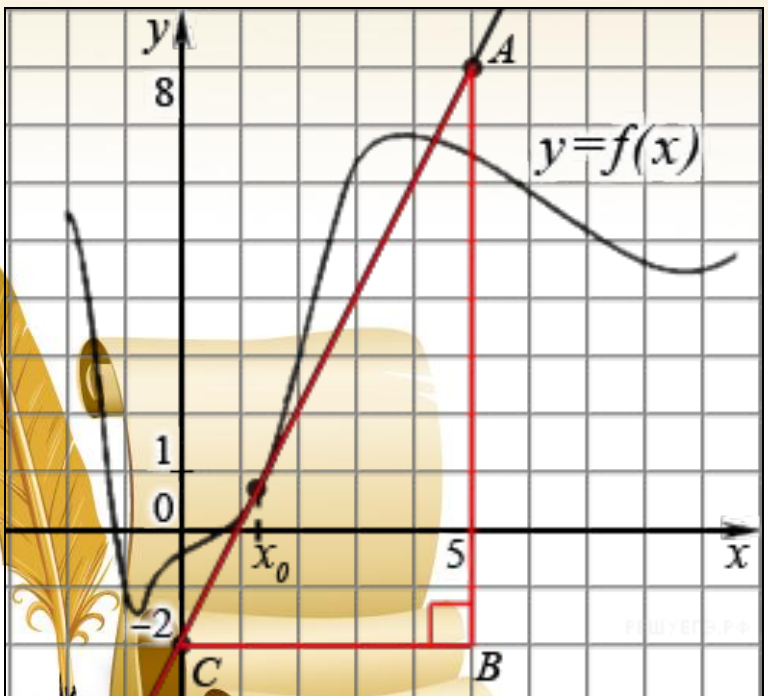


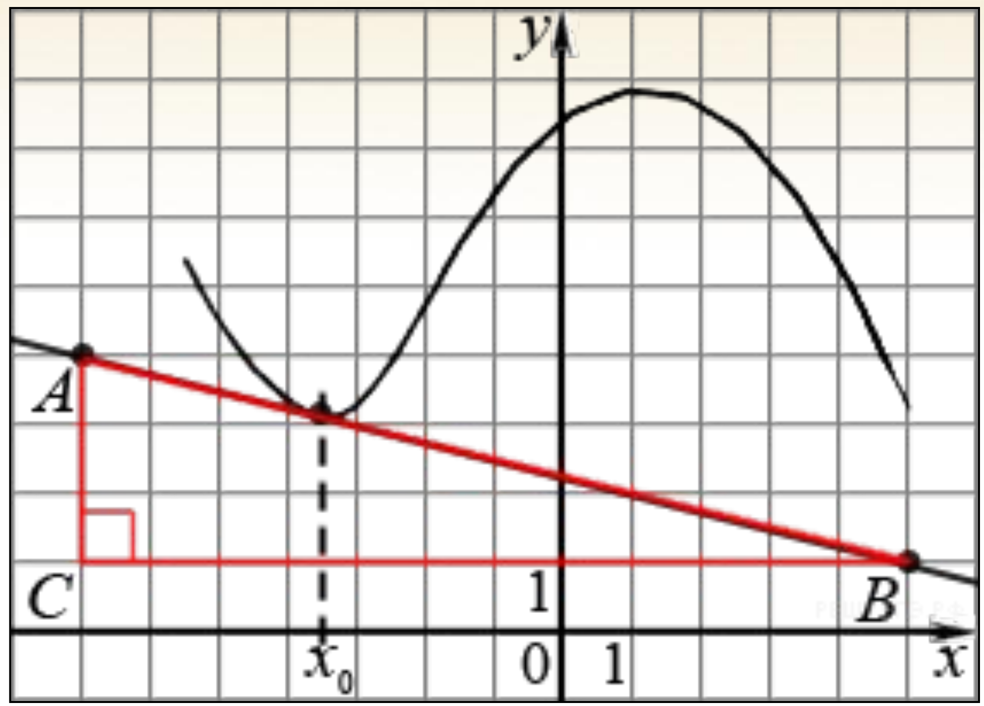
$f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha = 0$



$f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha < 0$

Нахождение значения производной в заданной точке по графику функции





Решение задач

- №1 Из Δ ABC: $\mathrm{tg}\ \alpha = \mathrm{tg}\ ACB = AB/BC = 10/5 = 2$
- №2 Из Δ ABC: $\mathrm{tg}\ \alpha = -\mathrm{tg}\ ABC = -\ AC/BC = -\ 3/12 = -0{,}25$

Уравнение касательной

- дана функция $y = f(x)$, которая имеет производную $y = f'(x)$ на отрезке $[a; b]$. Тогда в любой точке $X_o \in (a; b)$ к графику этой функции можно провести касательную, которая задается уравнением: $y = f'(X_o) \cdot (X - X_o) + f(X_o)$ Здесь $f'(X_o)$ — значение производной в точке X_o, а $f(X_o)$ — значение самой функции.

Составить уравнение касательной к графику функции $f(x) = 2\sin x + 5$ в точке $X_o = \pi/2$.

- $f(X_o) = f(\pi/2) = 2\sin(\pi/2) + 5 = 2 + 5 = 7$;
  $f'(x) = (2\sin x + 5)' = 2\cos x$;
  $f'(X_o) = f'(\pi/2) = 2\cos(\pi/2) = 0$;
- Уравнение касательной:
  $y = 0 \cdot (x - \pi/2) + 7 \Rightarrow y = 7$

Связь свойств функции с её производной

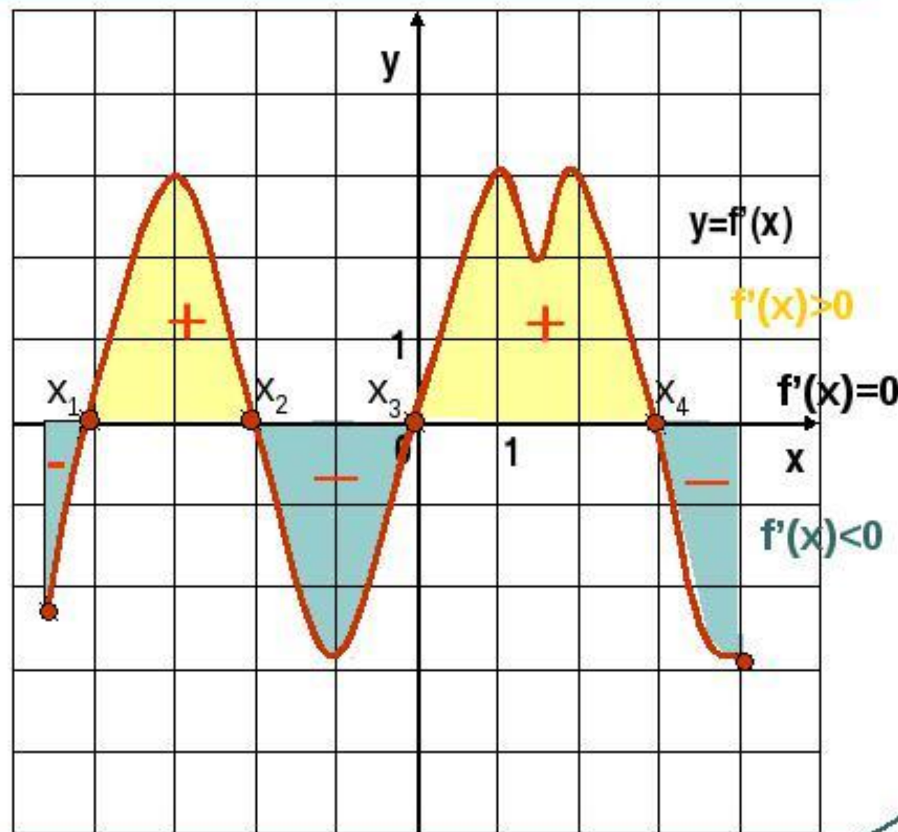
1. Функция y=f(x) возрастает на промежутках (-4;-2), (0;3).

2. Функция y=f(x) убывает на промежутках (-4,5;-4), (-2;0), (3;4).

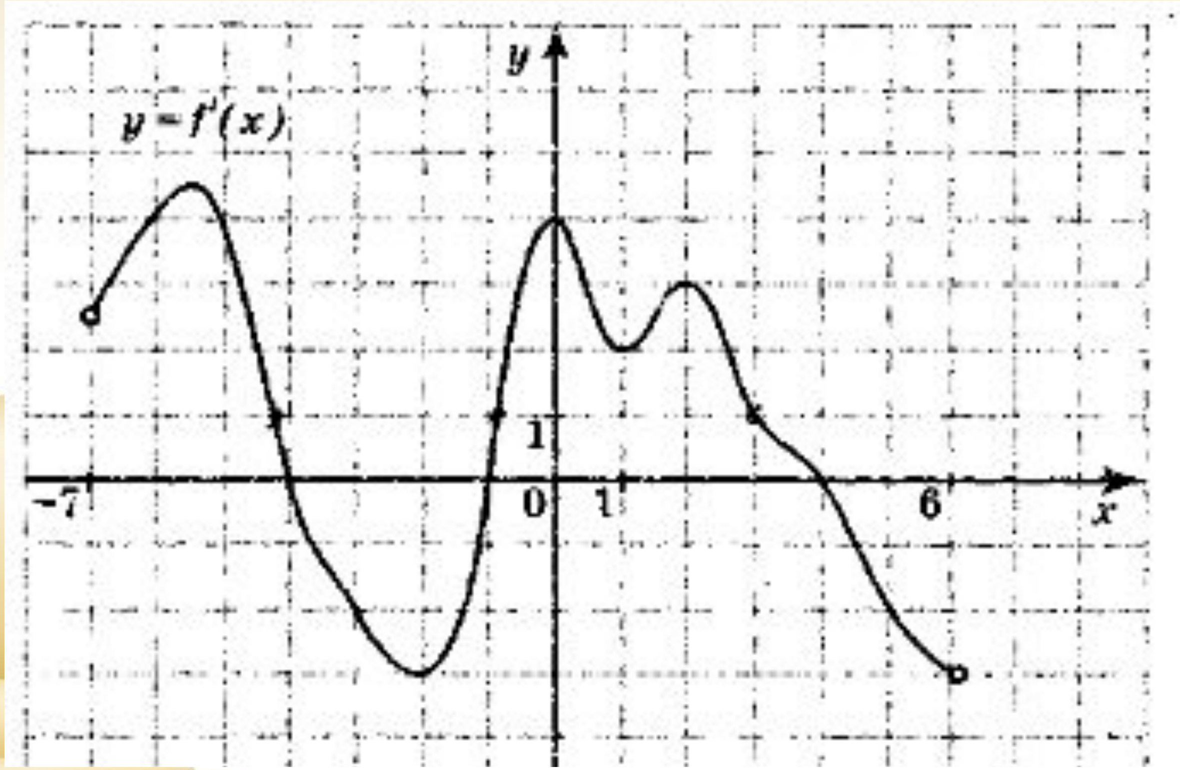
3. x = -4, -2, 0, 3 – точки экстремумов функции y=f(x).

4. x_2= -2, x_4= 3 – точки максимумов функции.

5. x_1= -4, x_3= 0 – точки минимумов функции.



Исследовать функцию на монотонность и экстремумы по графику производной



Решение задачи

- Функция y = f(x) возрастает на промежутках [-7;-4] и [-1;4] ;
- Функция y = f(x) убывает на промежутках [-4;-1] и [4;6] ;
- X = -4 и X = 4 – точки максимума;
- X = -1 –точка минимума