

Правило умножения. Перестановки и факториалы

1. Правило умножения.
2. Применение правила умножения для решения задач.
3. Перестановки и факториалы.

Раздел математики, посвященный исследованию количественных оценок случайных событий, называют *теорией вероятности*.

Комбинаторика — это искусство подсчета числа различных комбинаций, соединений, сочетаний, перестановок тех или иных элементов некоторых множеств.

Задача № 1. Из цифр 2, 4, 7 следует
составить трехзначное число, в котором ни
одна цифра не может повторяться
более двух раз. Сколько всего таких
чисел можно составить?

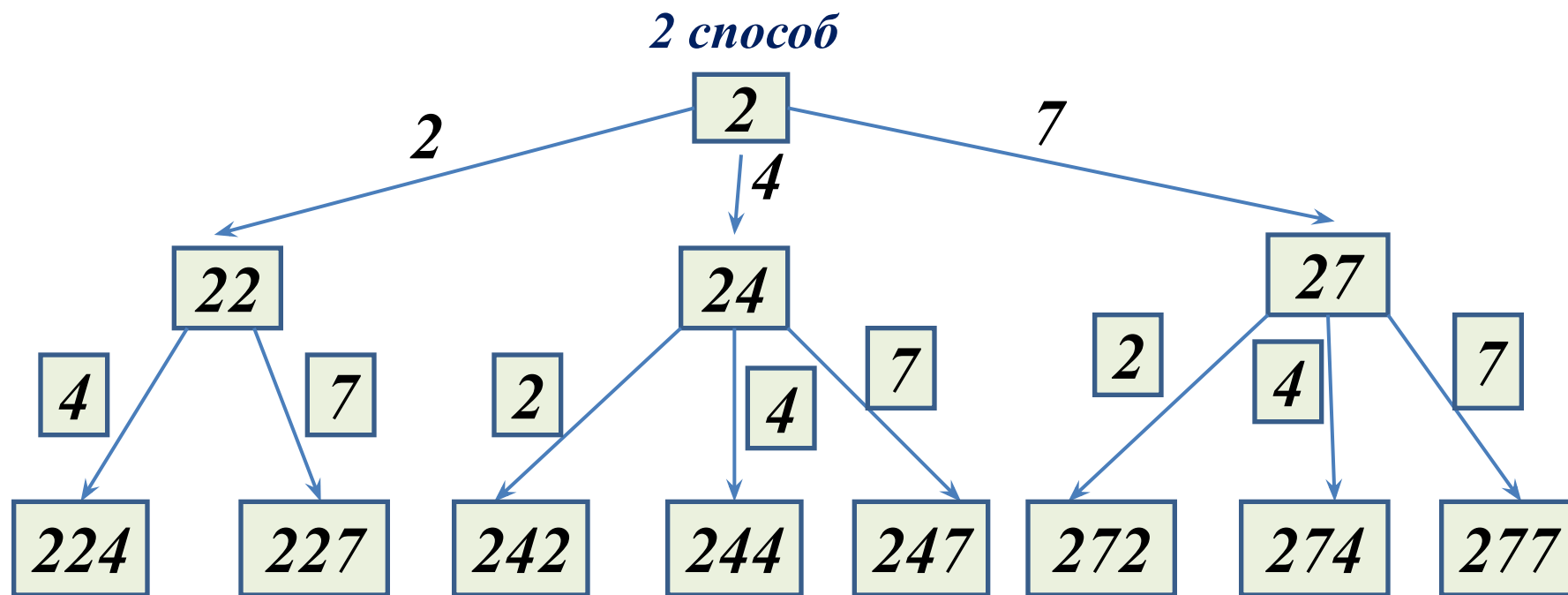
Решение.

1 способ. Найдем количество всех трехзначных чисел, которые начинаются с цифры 2: 224, 227, 242, 272, 244, 277, 247, 274
— 8 чисел.

Найдем количество всех трехзначных чисел, которые начинаются с цифры 4: 442, 447, 424, 474, 422, 477, 427, 472
— 8 чисел.

Найдем количество всех трехзначных чисел, которые начинаются с цифры 7: 772, 774, 727, 747, 722, 744, 724, 742
— 8 чисел.

Ответ: 24 числа.



Всего 8 чисел

Мы составили *дерево возможных вариантов* трехзначных чисел, где на первом месте стоит цифра 2. Составим дерево возможных вариантов для трехзначных чисел, где на первом месте стоит цифра 4, получим 8 чисел и для трехзначных чисел, где на первом месте стоит цифра 7, тоже 8 чисел. *Всего 24 числа.*

Правило умножения

Для того чтобы найти число всех возможных исходов независимого проведения двух испытаний A и B , следует перемножить число всех исходов испытания A и число всех исходов испытания B .

Применение правила умножения при решении задач

Задача. Сколько среди четырёхзначных чисел, составленных из цифр 3, 4, 6, 8 (без повторений), таких, которые начинаются с цифры 3?

А. 24 Б. 18 В. 6 Г. 12

Решение

На первое место можно поставить **только одну** цифру – 3.

На второе место можно поставить любую из **трёх**: 4, 6 или 8.

На третье место можно поставить любую из **двух** оставшихся цифр.

На четвертое место можно поставить **одну** оставшуюся цифру

Используя правило умножения получаем **$1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$**

Ответ: В.

Задача. Найдите сумму цифр всех четырехзначных чисел, которые можно составить из цифр 2, 4, 6, 8 (без повторения).

А. 360 Б. 480 В. 240 Г. 400

Решение

Все числа состоят из одних и тех же цифр, значит сумма цифр каждого числа одинаковая и равна $2+4+6+8=20$.

Выясним сколько таких четырехзначных чисел существует. На первое место можно поставить любую из **четырёх** данных цифр.

На второе место любую из **трёх** оставшихся цифр.

На третье место любую из **двух** оставшихся цифр.

На четвёртое место **одну** оставшуюся цифру.

По правилу умножения получаем $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ числа.

Сумма цифр 24 чисел составляет $24 \cdot 20 = 480$.

Ответ: Б.

Задача. Из класса, в котором учится 15 девочек и 10 мальчиков, нужно выбрать одну девочку и одного мальчика для ведения школьного вечера. Сколькими способами это можно сделать?

Решение

Применим правило умножения: девочку можно выбрать **15** способами,

мальчика — **10** способами,

пару мальчик — девочка — **$15 \cdot 10 = 150$** способами.

Ответ: 150.

Задача. В чемпионате города по футболу играет десять команд. Сколькими способами могут распределиться три призовых места?

Решение

На первое место можно поставить любую из **10** команд,
на второе — любую из **9** оставшихся,
на третье — любую из **8** оставшихся.

По правилу умножения общее число способов, которыми можно распределить три места, равно **$10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$** .

Ответ: 720.

Задача. В расписании уроков на среду для первого класса должно быть четыре урока: два урока математики, урок чтения и урок физкультуры. Сколькими способами можно составить расписание на этот день?

Решение

Урок чтения можно поставить на любой из **четырёх** уроков,

Урок физкультуры – на любой из **трёх** оставшихся.

После этого для двух уроков математики останется **единственный** вариант поставить их в расписание.

По правилу умножения общее число способов составить расписание на среду равно **$4 \cdot 3 = 12$** .

Ответ: 12.

Задача. В конференции участвовало 30 человек. Каждый участник с каждым обменялся визитной карточкой. Сколько всего понадобилась карточек?

Решение.

Каждый из 30 участников конференции раздал 29 карточек.

Значит, всего было роздано $30 \cdot 29 = 870$ карточек.

Ответ. 870.

Задача. Сколько трёхзначных чисел можно записать, используя только цифры 0, 2, 4, 6?

Решение

На первое место можно поставить любую из цифр, кроме нуля, - это ***3 варианта*** ;

на второе место – любую из ***4*** цифр и

на третье – тоже любую из ***4*** цифр.

По правилу умножения общее количество вариантов равно ***$3 \cdot 4 \cdot 4 = 48$*** .

Ответ: 48.

Задача. В меню школьной столовой 2 различных супа, 4 вторых блюда и 3 вида сока. Сколько можно составить вариантов обеда из трех блюд?

Решение

Первое блюдо можно выбрать **2 способами**,
второе блюдо – **4 способами** и
третье блюдо – **3 способами**.

По правилу умножения общее количество вариантов равно **$2 \cdot 4 \cdot 3 = 24$** .

Ответ: 24.

Вопрос 4 Перестановки и факториалы

Задача № 1. В семье шесть человек, а за столом в кухне шесть стульев. Было решено каждый вечер перед ужином рассаживаться на эти шесть стульев по-новому. Сколько дней члены семьи смогут делать это без повторений?

Решение

Предположим, что первой садится бабушка. У нее имеется **6** вариантов выбора стула.

Вторым садится дедушка и независимо выбирает стул из **5** оставшихся

Мама делает свой выбор третьей, и выбор у нее будет из **4** стульев

У папы будет уже **3** варианта, у дочки – **2**, ну а у сын сядет на **единственно** незанятый стул.

По правилу умножения имеем $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$.

Ответ: 720 дней.

Определение. Произведение подряд идущих первых n натуральных чисел обозначают $n!$ и называют «эн факториал»: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$.

Задача № 2. В 9 «А» классе в среду семь уроков: алгебра, геометрия, литература, русский язык, английский язык, биология и физкультура. Сколько вариантов расписания можно составить на среду?

Решение

Для алгебры – 7 вариантов. Для геометрии – 6 вариантов.

Для литературы – 5 вариантов и т. д.

По правилу умножения получаем: $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 7! = 5040$.

Ответ: 5040.

Определение. Перестановкой называется множество из n элементов, записанных в определённом порядке.

Теорема о перестановках элементов конечного множества:

n различных элементов можно расставить по одному на n различных мест ровно $n!$ способами.


$$P_n = n!$$

Задача. Четыре друга купили билеты в кино: на 1-е и 2-е места в первом ряду и на 1-е и 2-е места во втором ряду. Сколькими способами друзья могут занять эти 4 места в кинотеатре?

Решение

Используя теорему о перестановках имеем: **4-е** друга могут занять по одному **4-е** различных места ровно **4!** способами.

$$P_n = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

Ответ: 24 способа.

Задача. Сколькими способами можно с помощью букв *K, L, M, N* обозначить вершины четырехугольника?

Решение

Используя теорему о перестановках имеем: **4-е** различные буквы можно записать по одной около **4-ех** различных вершин многоугольника ровно **4!** способами.

$$P_n = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

Ответ: 24 способа.

Задача. Сколько различных нечетных пятизначных чисел, в которых нет одинаковых цифр, можно записать с помощью цифр 1, 2, 4, 6, 8?

Решение

Т.к. числа должны быть нечётными, то на последнем пятом месте может быть только нечётная цифра — это **1**.

Осталось **4-е** цифры(2, 4, 6, 8) и **4-е** разряда.

Используя теорему о перестановках имеем: $P_n = 4! = 24$

Ответ: 24 числа.

Задача. Сколько различных чётных пятизначных чисел, все цифры которых различны, можно записать с помощью цифр 1, 2, 3, 4, 5?

Решение

Т. к. числа должны быть чётными, значит на последнем пятом месте должна стоять чётная цифра – это **2** или **4**.

Найдем сколько пятизначных чётных чисел, которые оканчиваются цифрой **2**.

Осталось **4-е** цифры (1, 3, 4, 5) и **4-е** разряда. Применяя теорему о перестановках имеем: $P_n = 4! = 24$ числа.

Рассуждая аналогично, получим, что пятизначных чётных чисел, оканчивающихся цифрой **4**, тоже **24**.

Получаем: $24 + 24 = 48$.

Ответ: 48 чисел.