Основы теории возраста

Рябева Е.В.

2015

Летаргия

Определение летаргии

$$u = ln\frac{E_0}{E}$$

Безразмерная величина

В процессе замедления
- Энергия уменьшается
- Летаргия растет

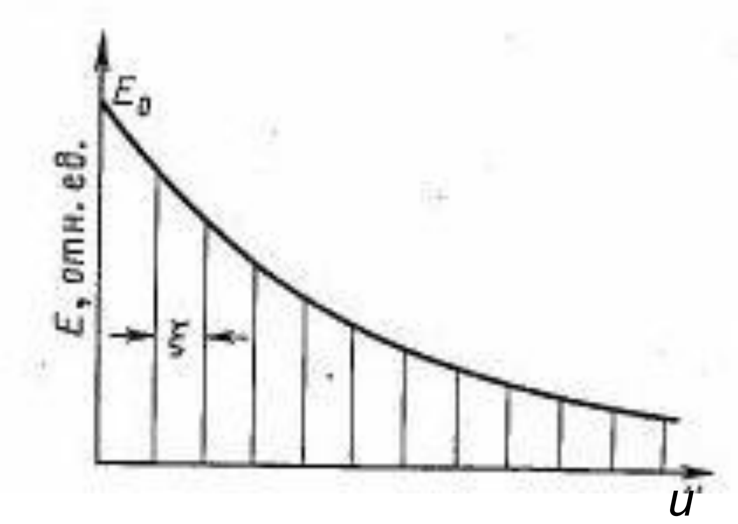
E_0 – произвольная энергия, выбираемая за начальную

В случае источника деления E_0 = 2 МэВ или E_0 = 10 МэВ
Для нейтронов с энергией E_0 летаргия равна нулю:

$$u = \ln(\frac{E_0}{E_0}) = 0$$

для изменения энергии, используя понятие летаргии:

$$E = E_0 e^{-u}$$



Средняя логрифмическая потеря энергии на одно столкновение

$$\xi = \overline{\ln\frac{E_0}{E_1}} = \overline{\ln\frac{E_n}{E_{n+1}}} = \overline{\Delta u}$$

Выражения теории замедления в переменной летаргии имеют более простой вид

Плотность потока

$$\boxed{\Phi_0(u)du = -\Phi_0(E)dE}$$

$$\boxed{\frac{dE}{du} = -E}$$

$$\boxed{\Phi_0(u) = E\Phi_0(E).}$$

Плотность столкновений

$$\boxed{\psi(u) = \psi(E) \Big/ \left|\frac{du}{dE}\right| = \psi(E)\cdot E.}$$

Но для $q(E)$ соотношение другое, так как плотность замедления характеризует не единичный интервал, а интегральный интервал от 0 до $E(u)$

Основное уравнение замедления записывается через летаргию

$$\boxed{q(E) = q(u)}$$

$$\boxed{\Sigma(u)\Phi_0(u) = \int_{u-\Delta u}^{u} du'\Sigma_s(u')g(u' \to u)\Phi_0(u) + q_0(u)}$$

$$\boxed{g(u' \to u) = \frac{\exp\left[-(u-u')\right]-\alpha}{1-\alpha}.}$$

Изменение плотности замедления

Плотность замедления

$$\boxed{q(u) = \int_{u-\Delta u}^{u} du'\Sigma_s(u')G(u' \to u)\Phi_0(u'),}$$

$$\boxed{\frac{dq}{du} + \Sigma_a\Phi_0(u) = q_0(u)}$$

$$\boxed{G(u' \to u) = \int_{u}^{u+\Delta u} g(u'' \to u)du''}$$

Формула Вигнера

$$\boxed{\begin{aligned}\Phi_0(u) &= \frac{q(u)}{\xi\Sigma(u)};\\ q(u) &= q_0 \exp\left[-\int_0^u \Sigma_a(u')\frac{du'}{\xi\Sigma(u')}\right].\end{aligned}}$$

Уравнение возраста

баланс нейтронов в теории замедления

$$\frac{dq}{du} + \Sigma_a \Phi_0(u) = q_0(u)$$

баланс нейтронов в диффузионной теории

$$\nabla \vec{J}(\vec{r}) + \Sigma_a(\vec{r})\varphi_0(\vec{r}) = q_0(\vec{r}).$$

$$\frac{\partial q(\vec{r},u)}{\partial u} + \Sigma_a \varphi_0(\vec{r},u) + \nabla \vec{J}(\vec{r},u) = q_0(\vec{r},u).$$

Для решения такого уравнения надо связать плотность замедления *q* с плотностью тока *J* и плотностью потока φ_0

Из определения плотности замедления *q(u)* через плотность потока

$$q(\vec{r},u) = \int\limits_{u-\Delta u_r}^{u} \Sigma_s(u')\varphi_0(\vec{r},u')g(u' \to u)du.$$

Для среды, состоящей из ядер с большим и средним атомным номером из-за малости Δu_r, можно аппроксимировать величину $\Sigma_s(u')$ и $\phi_0(r,u')$ их значением в точке $u' = u$ и вынести за знак интеграла

$$q(\vec{r},u) = \Sigma_s(u)\varphi_0(\vec{r},u) \int\limits_{u-\Delta u}^{u} g(u' \to u)du = \xi\Sigma_s\varphi_0(\vec{r},u).$$

Таким образом, взаимосвязь между плотностью потока нейтронов и плотностью замедления такая же, как и для усредненных значений в бесконечной среде, т.е. эквивалентна приближению Ферми

$$\varphi_0(\vec{r},u) = \frac{q(\vec{r},u)}{\xi\Sigma_s}.$$

Установим теперь связь между потоком и током.
Будем считать справедливым закон Фика

$$\vec J(\vec r) = -D(\vec r)\nabla\varphi_0(\vec r).$$

$$\frac{\partial q(\vec r,u)}{\partial u} + \Sigma_a\varphi_0(\vec r,u) + \nabla\vec J(\vec r,u) = q_0(\vec r,u).$$

$$\varphi_0(\vec r,u) = \frac{q(\vec r,u)}{\xi\Sigma_s}$$

$$\frac{\partial q(\vec r,u)}{\partial u} + \Sigma_a\varphi_0(\vec r,u) - \nabla D(u)\nabla\varphi_0(\vec r,u) = q_0(\vec r,u).$$

Уравнение баланса в теории возраста

для плотности потока

$$-\nabla D\nabla\varphi_0(\vec r,u) + \Sigma_a\varphi_0(\vec r,u) = -\frac{\partial\xi\Sigma_s\varphi_0(\vec r,u)}{\partial u} + q_0(\vec r,u)$$

для плотности замедления

$$\frac{\partial q}{\partial u} = \frac{D}{\xi\Sigma_s}\nabla^2 q(\vec r,u) - \frac{\Sigma_a(u)q(\vec r,u)}{\xi\Sigma_s(u)} + q_0(\vec r,u).$$

$$\frac{\partial q}{\partial u} = \frac{D}{\xi\Sigma_s}\nabla^2 q(\vec{r},u) - \frac{\Sigma_a(u)q(\vec{r},u)}{\xi\Sigma_s(u)} + q_0(\vec{r},u).$$

Введем новую переменную – **возраст**
Фермиевский возраст

$$\tau(u) = \int_0^u \frac{D(u')}{\xi\Sigma_s(u')}du'$$

$$\tau(E) = \int_E^{E_0} \frac{D(E')dE'}{\xi\Sigma_s(E')E'}$$

$$\frac{\partial q(\vec{r},\tau)}{\partial\tau} = \nabla^2 q(\vec{r},\tau) - \frac{\Sigma_a}{D}q(\vec{r},\tau) + q_0(\vec{r},\tau).$$

Выражение *q*(τ*)* представляет собой число нейтронов, которые замедляются ниже энергии *E*, соответствующей возрасту *τ*.

Имеется формальная аналогия между уравнением возраста (особенно для непоглощающей среды) и классическим уравнением теплопроводности, где *q* – температура, а τ - время. Это сходство и явилось причиной появления термина «возраст», хотя размерность возраста – [см^2].

По аналогии с односкоростной диффузионной теорией можно ввести понятие длины диффузии нейтронов с энергией, соответствующей возрасту *τ*:

Возраст увеличивается в процессе замедления.

$$L(\tau) = \left[\frac{D(\tau)}{\Sigma_a(\tau)}\right]^{1/2}.$$

$$\frac{\partial q(\vec{r},\tau)}{\partial\tau} - \nabla^2 q(\vec{r},\tau) + \frac{q(\vec{r},\tau)}{L^2(\tau)} = q_0(\vec{r},\tau).$$

$$\frac{\partial q(\vec{r},\tau)}{\partial\tau} - \nabla^2 q(\vec{r},\tau) + \frac{q(\vec{r},\tau)}{L^2(\tau)} = q_0(\vec{r},\tau).$$

Первый член в этом уравнении характеризует изменение плотности нейтронов при замедлении, второй – изменение в результате утечки нейтронов из данного объема; третий – изменение вследствие поглощения.

В случае слабого поглощения нейтронов функцию можно представить в виде

$$q(\vec{r},\tau) = \tilde{q}(\vec{r},\tau)\,p(\tau)$$

$$p(\tau) = p(u) = \exp\left(-\int_0^u \frac{\Sigma_a(u')du'}{\xi\Sigma_s(u')}\right) = \exp\left(-\int_0^\tau \frac{d\tau}{L^2(\tau)}\right) -$$

Тогда при слабом поглощении $\Sigma \approx \Sigma_s$ уравнение для будет таким же, как и для q, но без слагаемого, отвечающего за поглощение.

Далее для простоты будем рассматривать только непоглощающую среду, а в решение вводить соответствующую поправку.

Уравнение возраста для плоского изотропного источника

$$\frac{\partial q(\vec{r},\tau)}{\partial \tau} - \nabla^2 q(\vec{r},\tau) + \frac{q(\vec{r},\tau)}{L^2(\tau)} = q_0(\vec{r},\tau).$$

Рассмотрим уравнение возраста для конкретной геометрии: для плоского изотропного моноэнергетического источника в бесконечной однородной среде

$$\frac{\partial q}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + q_0 \delta(x)\delta(\tau).$$

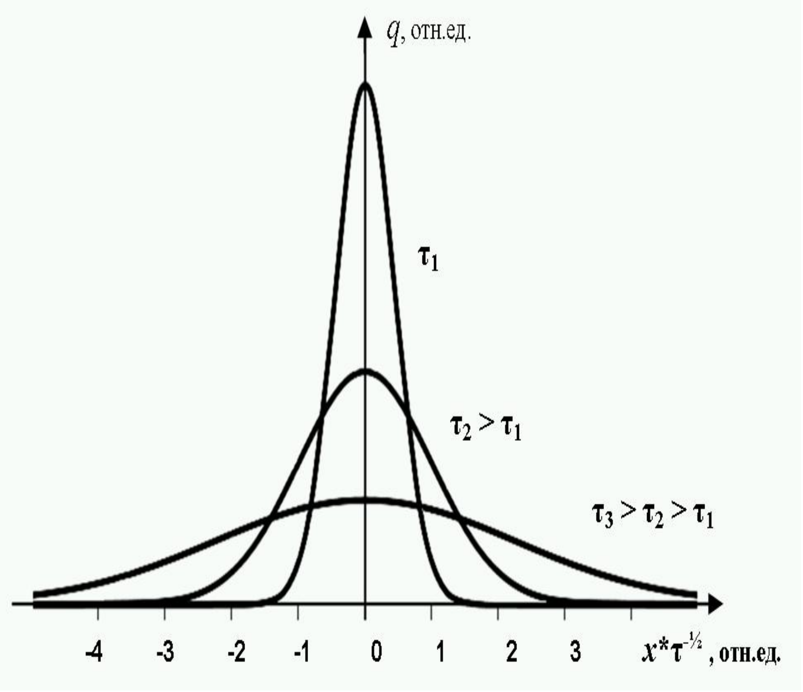
Решение этого уравнения с учетом ограниченности на бесконечности имеет вид распределения Гаусса, которое расплывается с увеличением возраста τ:

$$q(x,\tau) = \frac{q_0 p(\tau)}{\sqrt{4\pi\tau}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\tau}\right)$$

Плотность потока нейтронов в этом случае

$$\varphi_0(x,\tau) = \frac{q(x,\tau)}{\xi \Sigma_s \left[u(\tau)\right]} = \frac{q_0 p(\tau) \exp\left(-\frac{x^2}{4\tau}\right)}{\xi \Sigma_s(\tau)\sqrt{4\pi\tau}}$$

Нейтроны «малого возраста» потеряли небольшую часть своей энергии и в соответствии с этим не успели продиффундировать далеко от источника. Пространственное распределение таких нейтронов описывается высокой и узкой кривой . Напротив, большой возраст τ - случай сильно замедленных нейтронов, успевших продиффундировать далеко от источника. Кривая распределения таких нейтронов оказывается низкой и широкой.



$$\boxed{\varphi_0(x,\tau) = \frac{q(x,\tau)}{\xi\Sigma_s\left[u(\tau)\right]} = \frac{q_0 p(\tau)\exp\left(-\dfrac{x^2}{4\tau}\right)}{\xi\Sigma_s(\tau)\sqrt{4\pi\tau}}.}$$

Решение уравнения возраста для точечного изотропного моноэнергетического источника

$$q_0(r,\tau) = \frac{q_0 \delta(r)\delta(\tau)}{4\pi r^2}$$

Решение уравнения возраста описывается формулой

$$q(r,\tau) = \frac{q_0 p}{(4\pi\tau)^{\frac{3}{2}}} \exp(-\frac{r^2}{4\tau})$$

Для точечного изотропного источника спектра $q_0(u)$ решение уравнения возраста в непоглощающей среде

$$q(r,\tau) = \frac{\int_0^u q_0(u') \exp\left\{-r^2/4[\tau(u)-\tau(u')]\right\} du'}{\left\{4\pi[\tau(u)-\tau(u')]\right\}^{3/2}}.$$

Поскольку т плавно увеличивается с *u*, функция *q*(*x*,т) имеет две особенности:

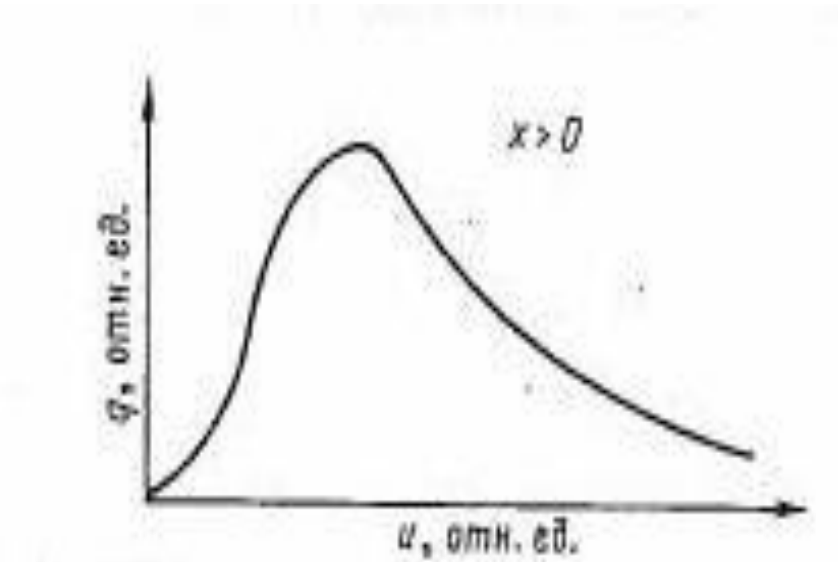
1) для любой летаргии (любого возраста) плотность замедления имеет максимум в координате источника *x* = 0;

2) для любой летаргии (любого возраста) плотность замедления имеет максимум в координате источника *x* = 0;

Вероятность резонансного поглощения *p*(*u*) всегда снижает *q*(*x*,*u*) для данной *u* или т.

Рассмотрим *q(x,u)* как функцию летаргии. В некоторой точке пространства $x > 0$ плотность замедления нейтронов имеет характер кривой, представленной на рисунке.

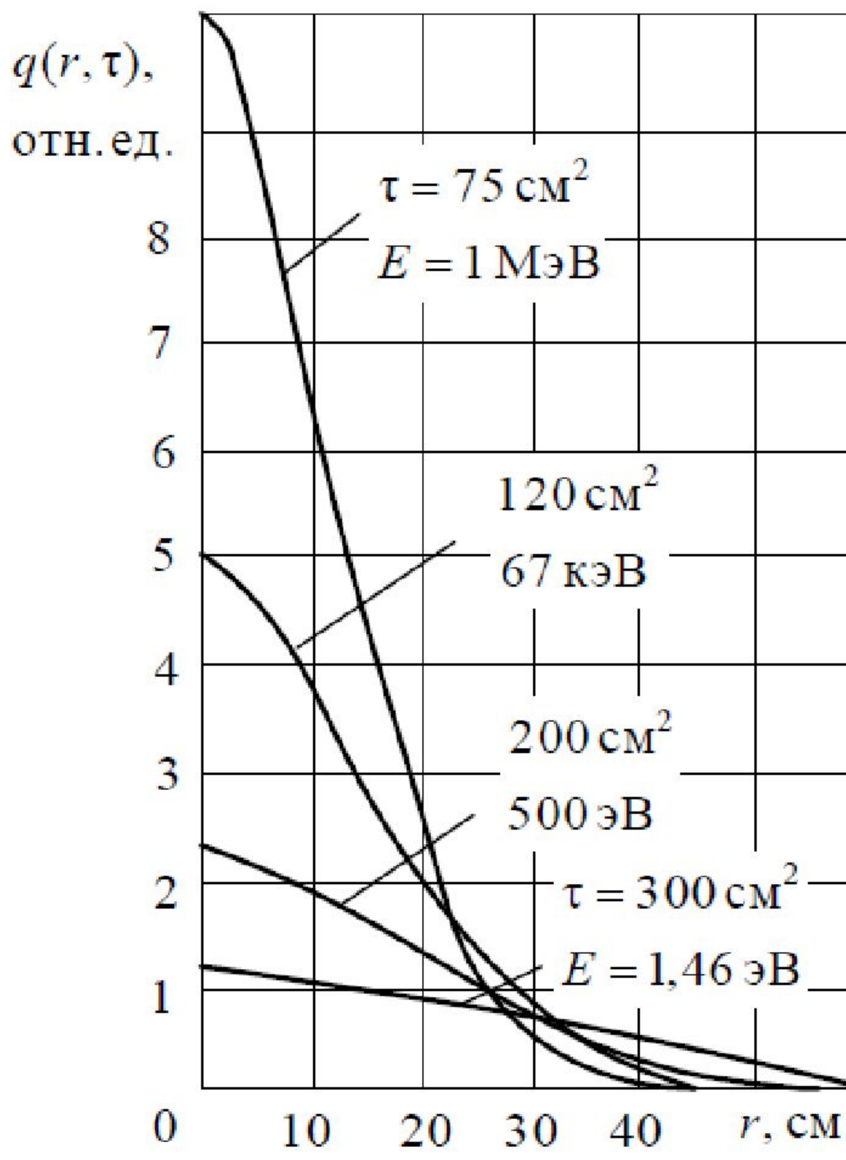
Плотность замедления (а значит, и плотность потока нейтронов) для высокой энергии (близка к 0) невелика вследствие того, что большинство нейтронов, доходящих до координаты *x*, успевают испытать некоторое количество соударений, поэтому их кинетическая энергия уменьшается (и, следовательно, летаргия отличается от 0).



Плотность замедления нейтронов для данной точки пространства в зависимости от летаргии

Плотность замедления для нейтронов низкой энергии в точке *x* также невелика из-за:

1) влияния резонансного поглощения, в результате которого все меньшее число нейтронов достигает точки *x*;
2) удаления нейтронов с малой энергией на значительные расстояния от источника в процессе диффузии.



Пространственное распределение плотности замедления в графите от точечного источника, испускающего нейтроны с энергией E=2 МэВ

Физический смысл возраста

Найдем средний квадрат удаления нейтронов от точечного изотропного моноэнергетического источника в процессе замедления (при этом используем полученное ранее решение для такого источника)

$$\overline{r^2(\tau)} = \int_0^\infty r^2[r^2 q(r,\tau)]dr \Big/ \int_0^\infty r^2 q(r,\tau)dr = 6\tau,$$

$$\overline{x_i^2} = 2\tau.$$

Таким образом, возраст нейтронов характеризует средний квадрат расстояния между местом рождения нейтрона (отвечающим нулевому возрасту) и местом, где нейтрон достигнет данной энергии, отвечающей τ(*E*)

$$\overline{r^2} = 6L^2$$

средний квадрат смещения нейтрона от рождения до поглощения, а τ играет ту же роль, что L^2 для тепловых нейтронов.

$$L = \sqrt{\frac{D}{\Sigma_a}}$$

$$\tau = \int_0^u \frac{D(u')du'}{\xi\Sigma_s(u')} = \frac{D \cdot u}{\xi\Sigma_s}$$

если Σ*s* не зависит от энергии , то величина ξ*Σs/u* играет роль сечения поглощения. Оно равно Σ*s*, деленному на среднее число столкновений *u*/ξ, в результате которых нейтроны покидают рассматриваемый интервал энергий

Длина замедления

Величину $\sqrt{\tau}$ для тепловых нейтронов называют длиной замедления и обозначают *Ls*.
Среды, состоящие из более тяжелых ядер (малых ξ), имеют большой возраст и длину замедления. При этом, чем сильнее степень поглощения в среде, тем меньше длина замедления

Возраст тепловых нейтронов для источника деления, длина замедления и длина диффузии тепловых нейтронов

Материал	τ_m, см^2	L_s, см	L, см
Вода – замедлитель	27,7	5,25	2,85
Графит	364	19,0	54,5
Железо	9400	97,0	16,8
Свинец	7100	84,0	13,5
Карбид бора – поглотитель	174	13,2	0,02

Properties of moderators and shielding materials†

(At 20° C unless stated otherwise)

Material	Density 10^3 kg m^{-3}	Σ m^{-1}	ξ	$\tau/(10^3\ mm^2)$	$t_s/\mu s$	$\bar{n}$
H_2O	1.00	9.0[a]	0.948	2.67[c]	6	20
D_2O (pure)	1.10	9.1[a]	0.570	11.7[c]	53	33
Diphenyl ($C_{12}H_{10}$) 85 °C	0.99	7.1[b]	0.812	4.6[d]	13	23
Paraffin Wax ($C_{30}H_{62}$)	0.89	10.9[b]	0.913	1.8	7	21
Be	1.85	13.0[a]	0.209	7.32[e]	50	90
BeO	3.00	14.3[b]	0.173	9.38[e]	102	109
Graphite	1.67	8.1[a]	0.158	29.8[c]	140	119
Concrete‡ (бетон)	2.3	8.8[b]	0.55	10.0	30	30
Al	2.70	7.9[a]	0.072	430	900	262
Fe	7.86	16.8[a]	0.035	33.0	360	540
Pb	11.35	11.6[a]	0.0096	600	2720	1960
Bi	9.75	9.8[a]	0.0095	800	3000	1990
U	18.9	1.7[a]	0.0084	§	2040	2250

† The data in this table are obtained from old sources as they are not needed in modern calculations though they remain valuable in compilations like this: a, experimental value; b, derived from components; c, UK Nuclear Data File (see for example Report AEEW-M 1208); d, taken from ANL 5800; e, ENDF/B data (see BNL 50274). Values not marked are obtained from approximate formulae.

‡ Composition in 103 kg m^{-3}: H, 0.023; O, 1.22; C, 0.0023; Mg, 0.005; Al, 0.078; Si, 0.775; K, 0.03; Ca, 0.1; Fe, 0.03; Na, 0.037.

§ Because of its large absorption resonance integral and its small value of ξ, almost no neutrons slowing down in uranium reach thermal energies.

The slowing down time, t_s, is the time taken for neutrons to slow down from an energy E to the thermal energy E_0 and is independent of E when $E \gg E_0$.

Для среды, состоящей из смеси ядер, возраст определяется по формуле

$$\boxed{\tau(u) = \int_0^u D(u') \frac{du'}{\overline{\xi}\Sigma_s(u')}}$$

Условия применимости возрастной теории

1) Ограничение на поглощающие свойства среды:

$\Sigma a(u) << \xi\Sigma s(u)$.

2) Ограничение на расстояние от источника. Возрастную теорию можно применять только на небольшом расстоянии от источника

$x << 2\tau/D = 6\tau\Sigma tr$ -

и на достаточном удалении от границ среды $x > 1/\Sigma s$. Иначе угловое распределение будет сильно анизотропно

3) При вводе зависимости $q(\vec{r},u)=\xi\Sigma_s\varphi_0(\vec{r},u)$

предполагалось, что сечение Σs мало изменяется на интервале упругого замедления Δur (или ΔEзам)

Там же считали, что плотность замедления q мало изменяется на интервале летаргии (энергии), равной средней логарифмической потере энергии при упругом рассеянии, т.е

$$\boxed{\frac{dq}{du} << \frac{q}{\xi}}$$

$$\boxed{\frac{\xi}{q}\frac{dq}{du} << 1}$$

Т.е. число столкновений в интервале от энергии источника до интересующей нас энергии должно быть много больше 1. Такая ситуация возможна для тяжелой среды

Уточнения возрастной теории

1)В возрастной теории при резонансных изменениях сечений можно использовать не формулу Ферми, а формулу Вигнера

$$\boxed{q(\vec{r},u)=\xi\Sigma(u)\varphi(\vec{r},u)}$$

2) Учитывать пространственное распределение нейтронов, не испытавших ни одного столкновения

3) Для сред с поглощением можно использовать вместо рассчитанного по формуле возраста т*(E)* можно использовать значение экпериметально измеренное-

одной шестой части значения $\overline{r^2}$ для точечного изотропного источника.