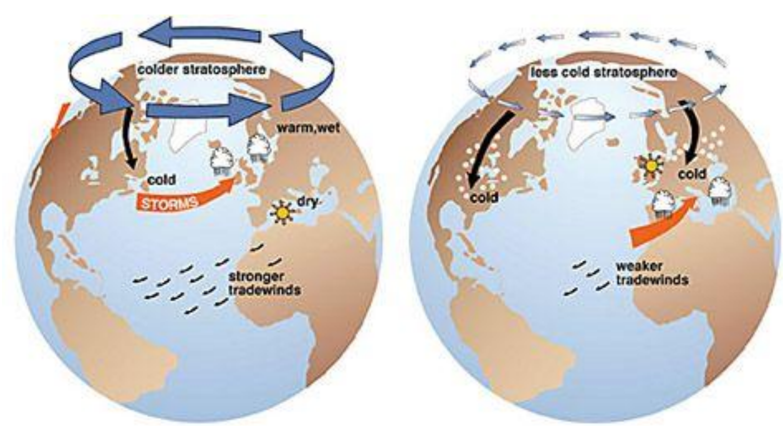
ЛЕКЦИЯ № 7 Физика колебаний

Элементы содержания: Понятие о колебательных процессах. Гармонические колебания. Амплитуда, период, частота, циклическая частота и фаза гармонических колебаний. Свободные (собственные) колебания. Дифференциальное уравнение свободных гармонических колебаний и его решение. Основные типы гармонических осцилляторов; их периоды и частоты колебаний. Свободные затухающие колебания. Коэффициент затухания. Условный период затухающих колебаний. Вынужденные колебания. Амплитуда и начальная фаза вынужденных колебаний. Резонанс.

Литература: Трофимова Т.И. Курс физики: Учеб. пособие для вузов. М.: Высшая школа, 2000. **С. 219-243**.



Кинематика гармонических колебаний

Колебания - движения или процессы, обладающие той или иной степенью повторяемости во времени.

Гармоническими называются колебания, при которых колеблющаяся величина изменяется с течением времени по синусоидальному закону:

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0) \quad , \qquad (5.1)$$

где A - амплитуда колебаний – наибольшее по модулю отклонение колеблющейся величины от её среднего значения;

$$\varphi = \omega t + \varphi_0 \qquad (5.2)$$

- фаза колебаний - аргумент функции описывающей величину, изменяющуюся по закону гармонического колебания;

ω - циклическая (угловая) частота.

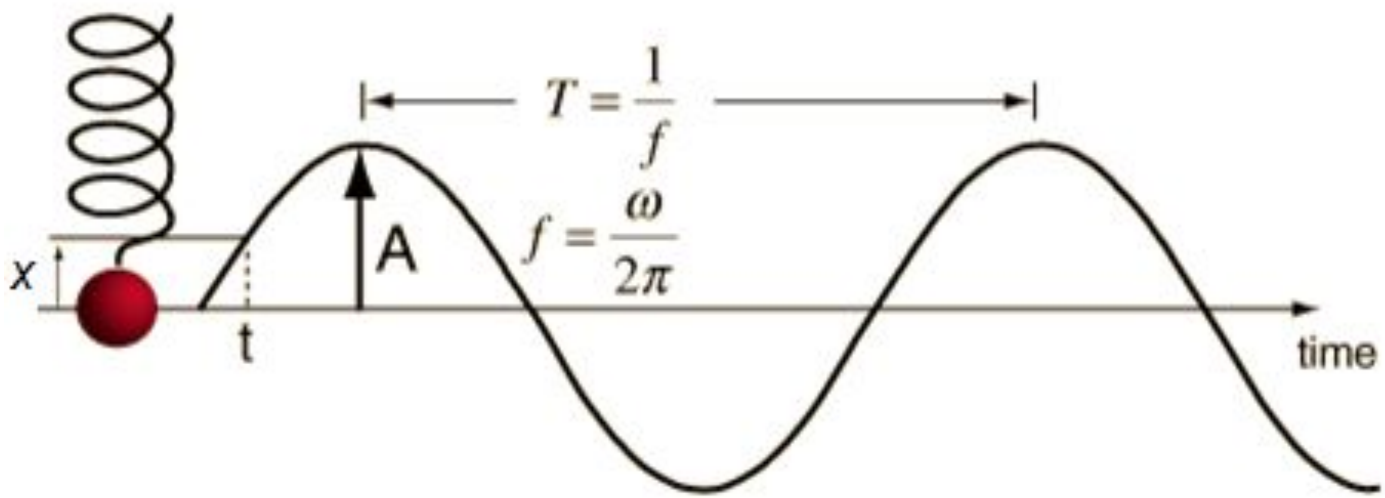
Частота колебаний - число колебаний в единицу времени, [f]=с$^{-1}$=Гц :

$$f = \frac{N}{t} = \frac{\omega}{2\pi} \quad . \qquad (5.3)$$

Период колебаний - наименьший промежуток времени, через который значения колеблющей величины начинают повторяться (время одного колебания), [T]=с:

$$T = \frac{t}{N} = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega} \quad . \qquad (5.4)$$

Графическое представление гармонических колебаний:



Мгновенная скорость при гармоническом колебательном движении

$$V(t) = \frac{dx}{dt} = -A\omega\sin(\omega t + \varphi_0) \qquad (5.5)$$

Мгновенное ускорение при гармоническом колебательном движении

$$a(t) = \frac{dV}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 x \qquad (5.6)$$

Из (5.6) легко получить дифференциальное уравнение свободного гармонического колебания в каноническом виде

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \qquad (5.7)$$

Решением уравнения (5.7) является уравнение гармонического колебания $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)$ (5.1), из которого оно и получено.

Гармонический осциллятор

Свободными (собственными) называются колебания, возникающие в физической системе при внешнем воздействии, сводящимся лишь к начальному отклонению системы из состояния устойчивого равновесия.

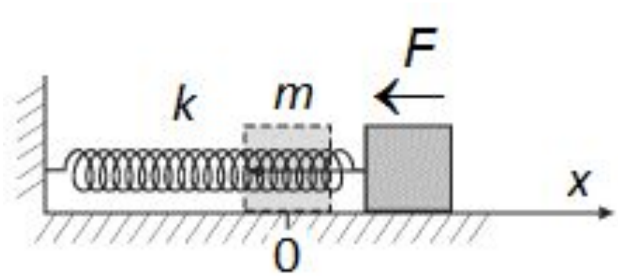
Колебательной называется физическая система, способная совершать свободные колебания.

Необходимые условия: 1) упругость и 2) инертность.

Гармонический осциллятор – колебательная система, способная совершать свободные гармонические колебания.

Примеры гармонических осцилляторов

1) пружинный маятник – колебательная система, состоящая из пружины, один конец которой закреплен, а на другом конце закреплен груз, совершающий колебания под действием упругой силы пружины.



Уравнение движения: $ma = F$, (5.8)

где

(5.9) $a = d^2x/dt^2$ - ускорение груза,

(5.10) $F = -kx$ - сила упругости.

Подставив (5.9) и (5.10) в уравнение (5.8), получим

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$$ или

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \quad - \qquad (5.11)$$

- дифференциальное уравнение свободных гармонических колебаний,

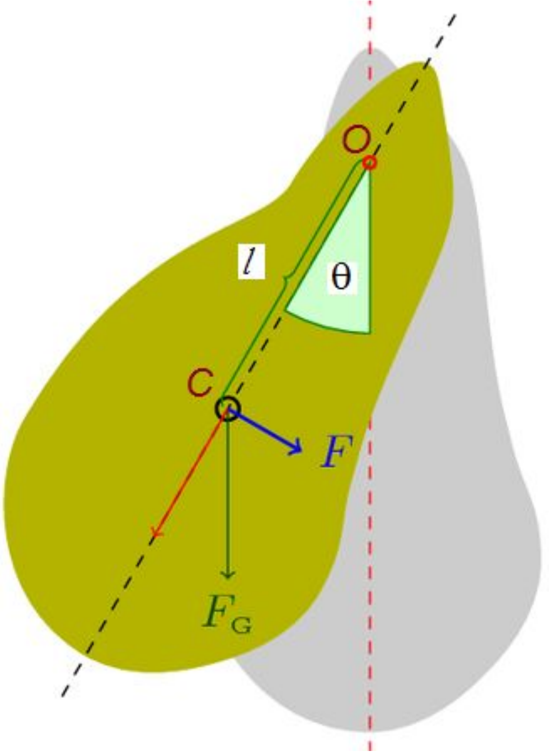
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad - \qquad (5.12)$$

- циклическая частота пружинного маятника.

2) физический маятник – твердое тело, совершающее под действием силы тяжести колебания вокруг горизонтальной оси, не проходящей через его центр тяжести.

Циклическая частота физического маятника:

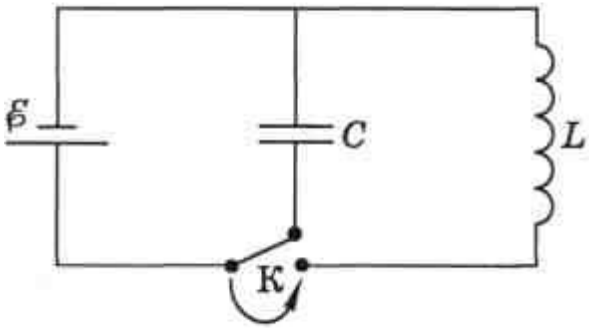
$$\omega = \sqrt{\frac{lmg}{I}} , \qquad (5.13)$$



где l – расстояние от точки подвеса до центра тяжести маятника; I – момент инерции маятника.

3) колебательный контур - электрическая цепь, состоящая из конденсатора и катушки индуктивности.

При замыкании ключа К в контуре возникают электромагнитные колебания.



Циклическая частота электромагнитных колебаний в колебательном контуре:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} - \qquad (5.14)$$

- формула Томсона.

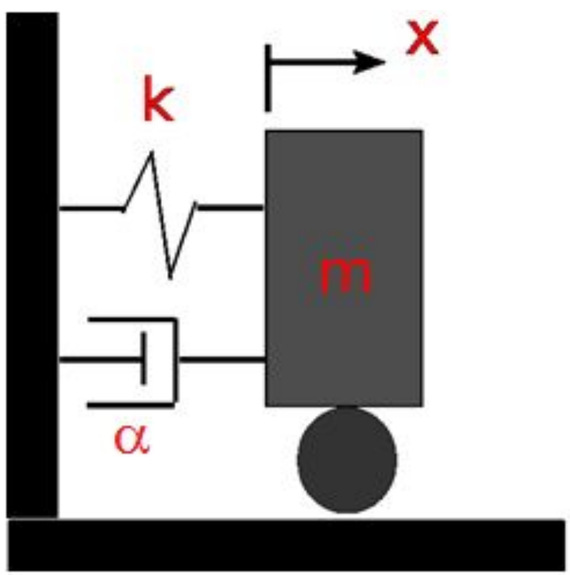
Свободные затухающие колебания

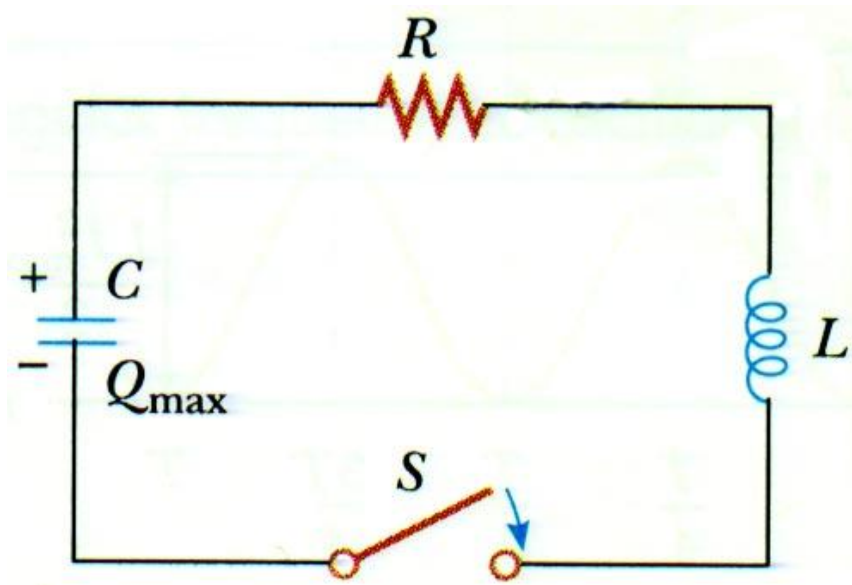
В реальных осцилляторах происходит рассеяние (диссипация) запасенной энергии, в результате свободные колебания затухают.

При механических колебаниях колебания затухают в результате действия сил трения.

При электромагнитных колебаниях колебания затухают благодаря наличию электрического сопротивления цепи колебательного контура.

Затухающими называются колебания, амплитуда которых с течением времени уменьшается.





Дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний:

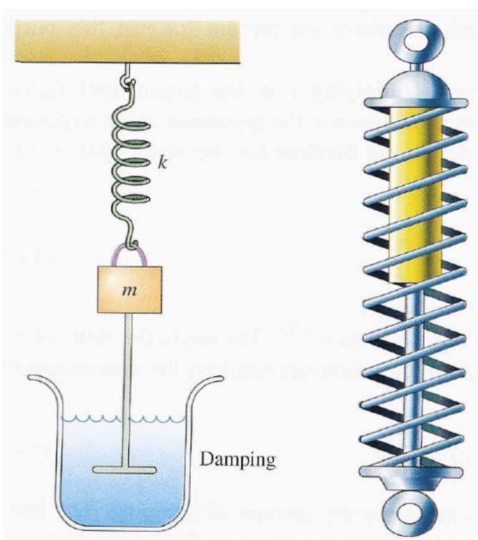
$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\alpha\frac{dx}{dt}+\omega^2x=0 \quad , \qquad (5.15)$$

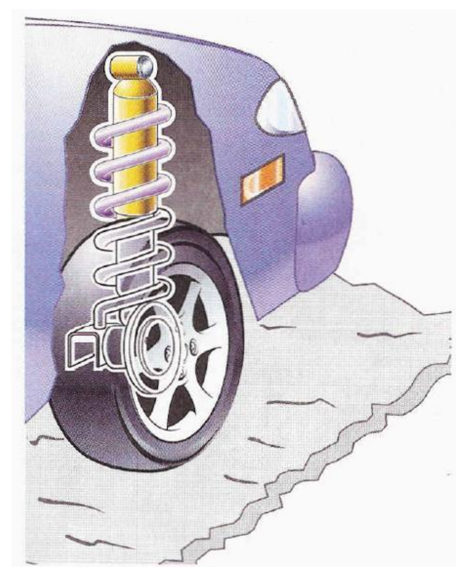
где α - коэффициент затухания – величина, характеризующая быстроту затухания колебаний во времени; ω - циклическая частота собственных колебаний при отсутствии сил трения (электрического сопротивления).

Условие отсутствия затухающих колебаний: α>ω.

Демпфирование колебаний – принудительное гашение колебаний.

Демпфер – устройство для предотвращения вредных колебаний.





Условие существования затухающих колебаний: $\alpha<\omega$. В этом случае решение дифференциального уравнения (5.15) имеет вид

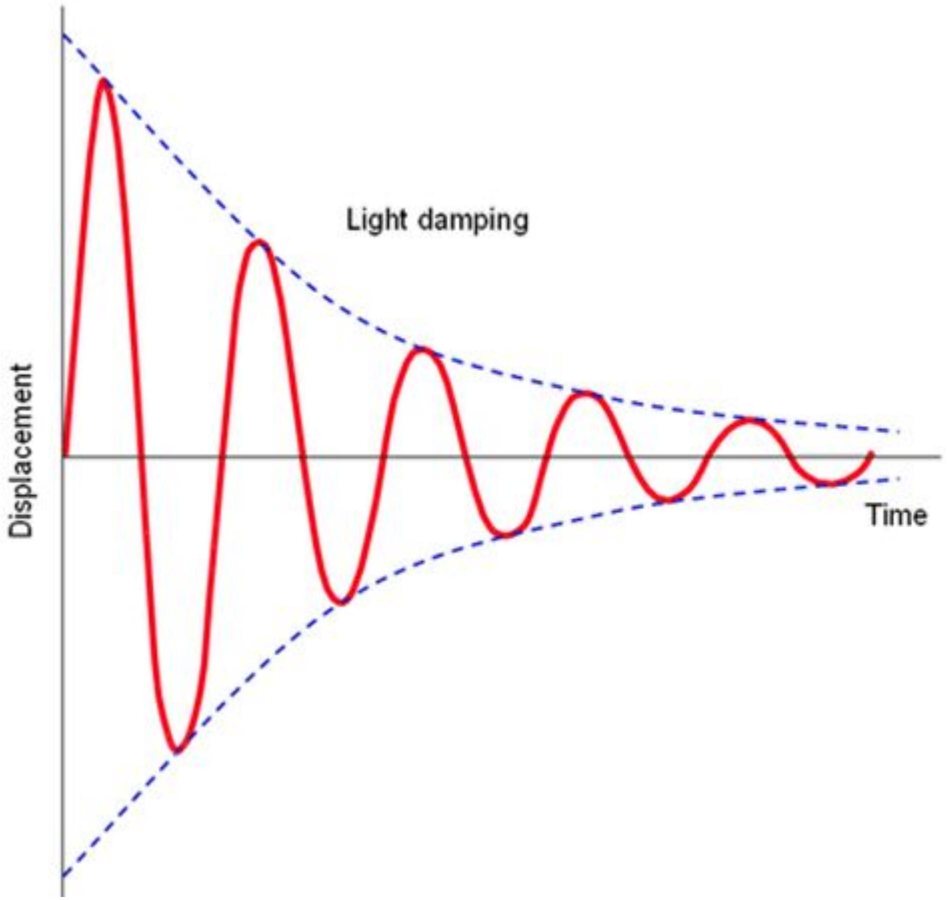
$$x(t)=A(t)\cos(\omega' t+\varphi_0)=A_0 e^{-\alpha t}\cos(\omega' t+\varphi_0) \quad , \qquad (5.16)$$

где ω' - условная циклическая частота затухающих колебаний

$$\omega'=\sqrt{\omega^2-\alpha^2} \quad , \qquad (5.17)$$

$$T'=\frac{2\pi}{\omega'}=\frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2-\alpha^2}} \quad - \qquad (5.18)$$

- условный период затухающих колебаний – промежуток времени между последовательными прохождениями системой, совершающей затухающие колебания, состояния равновесия в одном и том же направлении.



Время затухания:

$$\tau = \frac{1}{\alpha} \quad - \qquad (5.19)$$

- промежуток времени, в течение которого амплитуда затухающих колебаний уменьшается в $e \approx 2{,}7$ раз.

Логарифмический декремент колебаний – безразмерная величина, характеризующая относительное уменьшение амплитуды затухающих колебаний за условный период и равная натуральному логарифму отношения двух последовательных максимальных или минимальных значений колеблющейся величины:

$$\Lambda = \ln\frac{A(t)}{A(t+T')} = \alpha T'. \qquad (5.20)$$

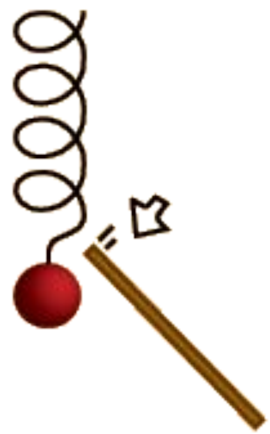
Например, если $\Lambda = 0{,}01$, то амплитуда затухающих колебаний уменьшается в e раз после 100 колебаний.

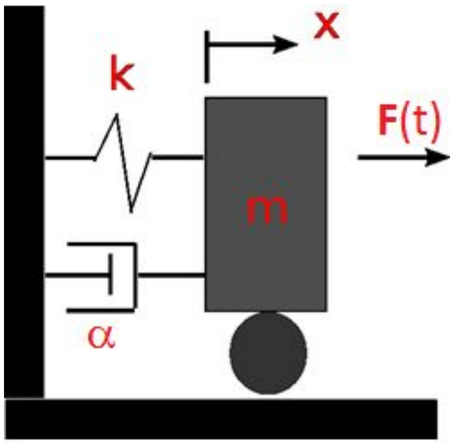
Добротность колебательной системы – величина, характеризующая способность колебательной системы сохранять запасенную энергию.

Вынужденные колебания

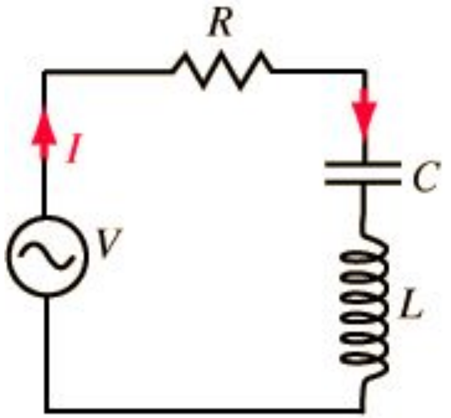
Вынужденными называются колебания, возникающие в физической системе под действием периодически изменяющегося внешнего воздействия.

Вынужденные механические колебания возникают под действием периодически изменяющейся внешней силы.





Вынужденные электромагнитные колебания возникают при включении в электрическую цепь колебательного контура источника периодически изменяющейся ЭДС.



Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний при гармоническом внешнем воздействии :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\alpha\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = \varepsilon_{max}\cos\left(\Omega t + \Phi_0\right) \quad , \qquad (5.21)$$

где ε_{max} , Ω и Φ_0 – максимальное значение, циклическая частота и начальная фаза внешнего воздействия, изменяющегося по гармоническому закону.

В установившемся режиме решение дифференциального уравнения (5.18) имеет вид

$$x(t) = A(\Omega)\cos\left[\Omega t + \varphi_0(\Phi_0, \Omega)\right] \quad . \qquad (5.22)$$

При свободных гармонических колебаниях:

а) колебания происходят с собственной частотой осциллятора, зависящей от его внутренних характеристик [например, для пружинного маятника ω=f(k,m)];

б) амплитуда и начальная фаза определяются результатом первоначального воздействия на осциллятор.

При вынужденных колебаниях:

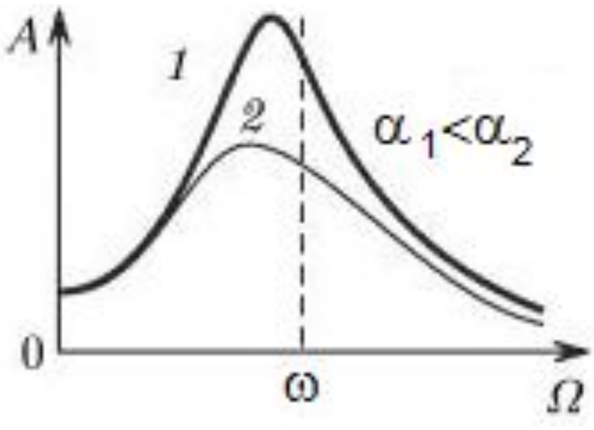
а) осциллятор совершает колебания с частотой изменения внешнего воздействия;

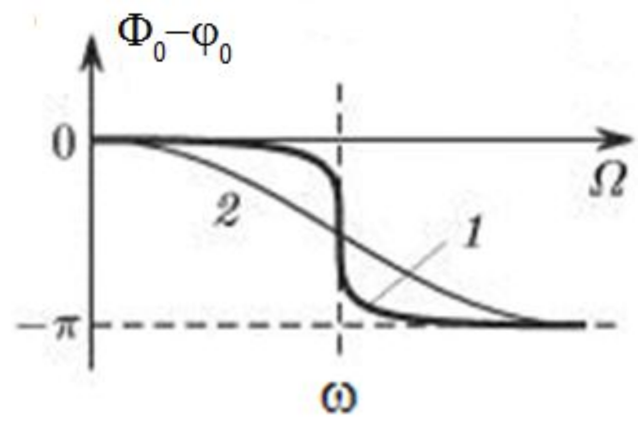
б) амплитуда и начальная фаза определяются как особенностями внешнего воздействия, так и собственными характеристиками осциллятора:

$$A(\Omega) = \frac{\varepsilon_{\max}}{\sqrt{\left(\Omega^2 - \omega^2\right)^2 + 4\alpha^2\Omega^2}} , \qquad (5.23)$$

$$\varphi_0(\Phi_0, \Omega) = \Phi_0 + \operatorname{arctg}\left(\frac{2\alpha\Omega}{\Omega^2 - \omega^2}\right) . \qquad (5.24)$$

Графики зависимостей амплитуды и начальной фазы вынужденных колебаний от частоты внешнего воздействия





Резонанс - явление резкого возрастания амплитуды вынужденных колебаний при приближении частоты вынуждающей силы к резонансной частоте:

$$\Omega_r = \sqrt{\omega^2 - 2\alpha^2} \quad . \qquad (5.25)$$

Амплитуда вынужденных колебаний при резонансе:

$$A_r = \frac{\varepsilon_{max}}{2\alpha\sqrt{\omega^2 - \alpha^2}} \quad . \qquad (5.26)$$