Алгебра и геометрия

1 семестр 2013

Разделы курса

1. Матрицы, определители, системы линейных уравнений.
2. Векторная алгебра.
3. Аналитическая геометрия.

Шмагунов Олег Александрович

1. Матрицы и действия на ними

Матрицы.

МАТРИЦЕЙ НАЗЫВАЕТСЯ ПРЯМОУГОЛЬНАЯ ИЛИ КВАДРАТНАЯ ТАБЛИЦА, ЗАПОЛНЕННАЯ ЧИСЛАМИ.

ЧИСЛА, ЗАПОЛНЯЮЩИЕ МАТРИЦУ, НАЗЫВАЮТСЯ ЕЁ **ЭЛЕМЕНТАМИ**

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} \phantom{a_{11}} & \text{Второй столбец} & & \end{array} \\ A = & \left(\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \text{Вторая строка} \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

$a_i - i$ - я строка

$a_j - j$ - й столбец

$A - m \times n$ матрица

a_{ij} – элемент матрицы

Виды матриц : $m = n$ – квадратная; $m \neq n$ – прямоугольная

$m = 1$ – вектор-столбец; $n = 1$ – вектор-строка

побочная диагональ

Главная диагональ

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Виды квадратных матриц :

$a_{ij} = 0$, при $1 \le i,j \le n$ – нулевая матрица

$\begin{cases} a_{ij} = 0, \text{ при } 1 \le i,j \le n,\ i \neq j \\ a_{ii} = 1, \text{ при } 1 \le i \le n \end{cases}$ – единичная матрица

$a_{ij} = a_{ji}$, при $1 \le i,j \le n$ – симметричная

$a_{ij} = 0$, при $i > j$ – треугольная

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & \dots & e & k \\ 0 & 2 & \dots & 3 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & g & f \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Действия с матрицами.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} = \left(a_{ij}\right)_{\substack{i=\overline{1,n} \\ j=\overline{1,m}}}$$

а) умножение матрицы на число : $$\lambda \cdot A = \left(\lambda \cdot a_{ij}\right)_{\substack{i=\overline{1,n} \\ j=\overline{1,m}}}$$

б) сложение матриц : $$A = \left(a_{ij}\right)_{\substack{i=\overline{1,n} \\ j=\overline{1,m}}}, \quad B = \left(b_{ij}\right)_{\substack{i=\overline{1,n} \\ j=\overline{1,m}}}$$

Матрицы разного размера складывать нельзя

$$\boxed{C = A + B = \left(a_{ij} + b_{ij}\right)_{\substack{i=\overline{1,n} \\ j=\overline{1,m}}}}$$

Вычитание — это тоже сложение

Лирическое отступление…

скалярное произведение векторов

$$\boxed{(a_1,a_2,\ldots,a_n)\cdot(b_1,b_2,\ldots,b_n)=a_1b_1+a_2b_2+..a_nb_n}$$

в) умножение матриц :

$$A=\left(a_{ij}\right)_{\substack{i=\overline{1,n}\\ j=\overline{1,m}}},\quad B=\left(b_{ij}\right)_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,k}}}$$

i-я строка A

j-й столбец B

$$C=AB=\left(a_i\cdot b^j\right)_{\substack{i=\overline{1,n}\\ j=\overline{1,m}}}$$

$$\boxed{\begin{cases}A-n\times m\\ B-m\times k\end{cases}\Rightarrow AB-n\times k}$$

$$C=\left(c_{ij}\right)_{\substack{i=\overline{1,n}\\ j=\overline{1,k}}}$$

г) транспонирование матриц :

$$A=\left(a_{ij}\right)_{\substack{i=\overline{1,n}\\ j=\overline{1,m}}},\quad A^T=\left(a_{ji}\right)_{\substack{j=\overline{1,m}\\ i=\overline{1,n}}}$$

Примеры

$$a)\quad 5\cdot\begin{pmatrix}3 & -1 & 2\\ 4 & 2 & 0\\ -5 & 6 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15 & -5 & 10\\ 20 & 10 & 0\\ -25 & 30 & 5\end{pmatrix}$$

$$б)\quad \begin{pmatrix}3 & -1 & 2\\ 4 & 2 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}8 & -5 & 5\\ 7 & 3 & 14\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3+8 & -1+(-5) & 2+5\\ 4+7 & 2+3 & 0+14\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11 & -6 & 7\\ 11 & 5 & 14\end{pmatrix}$$

$$в)\quad \begin{pmatrix}3 & -1 & 2\\ 4 & 2 & 0\\ -5 & 6 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}8\\ 7\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cdot 8+(-1)\cdot 7+2\cdot 2\\ 4\cdot 8+2\cdot 7+0\cdot 2\\ (-5)\cdot 8+6\cdot 7+1\cdot 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}21\\ 46\\ 4\end{pmatrix}$$

$$3\times 3 \qquad 3\times 1 \qquad\qquad 3\times 1$$

$$\begin{pmatrix}2 & -5 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}7\\ 0\\ -4\end{pmatrix}=2\cdot 7+(-5)\cdot 0+3\cdot(-4)=\begin{pmatrix}2\end{pmatrix}$$

$$1\times 1$$

$$1\times 3 \qquad 3\times 1$$

$$г)\quad \begin{pmatrix}11 & -6 & 7\\ 11 & 5 & 14\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}11 & 11\\ -6 & 5\\ 7 & 14\end{pmatrix}$$

скалярное произведение векторов "по - матричному"

Свойства операций над матрицами.

линейная комбинация : $\alpha \cdot A + \beta \cdot B$

$$A = \left(a_{ij}\right)_{\substack{i=\overline{1,n}\\ j=\overline{1,m}}}, \quad B = \left(b_{ij}\right)_{\substack{i=\overline{1,n}\\ j=\overline{1,m}}}, \quad 0 = (0)_{\substack{i=\overline{1,n}\\ j=\overline{1,m}}}$$

свойства линейных операций :

1) коммутативность сложения : $A + B = B + A$

2) ассоциативность сложения : $A + (B + C) = (A + B) + C$

3) существование нуля : $A + 0 = 0 + A = A$

Доказать самостоятельно, используя определения действий (операций) свойства умножения :

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$ единичная матрица

3) существование нуля : $A \cdot 0 = 0 \cdot A = 0$

4) НЕкоммутативность умножения : $\boxed{AB \neq BA}$

5) существование единицы : $AE = EA = A$

E выбираем подходящего размера

6) ассоциативность : $A(BC) = (AB)C = ABC$

A, B, C подходящего размера

7) дистрибутивность :

$(A+B)C = AC + BC$ – справа

$A(B+C) = AB + AC$ – слева

свойства транспонирования :

8) инволютивность : $$\left(A^T\right)^T = A$$

Обратная самой себе операция называется инволютивной

9) линейность : $$\left(A + B\right)^T = A^T + B^T$$

$$\left(\lambda A\right)^T = \lambda A^T$$

10) $$\left(AB\right)^T = B^T A^T$$

11) $$A^T = A \Rightarrow A$$ *симметричная*

Докажем что-нибудь…

$A - n\times m \Rightarrow E - n\times n$

5) существование единицы : $AE = EA = A$

$A - n\times m \Rightarrow E - m\times m$

Требуется доказать, что *ij-й* элемент произведения *AE* такой же, как и *ij-й* элемент *A*

$$AE = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & * \\ * & * & \dots & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ * & * & \dots & * \end{pmatrix}$$

$(a_{11}a_{12}\dots a_{1m})\cdot(1\,0\,0\dots0) = a_{11}\cdot1 + a_{12}\cdot0 + \dots + a_{1m}\cdot0 = a_{11}$

$(a_{11}a_{12}\dots a_{1m})\cdot(0\,1\,0\,0\dots0) = a_{11}\cdot0 + a_{12}\cdot1 + \dots + a_{1m}\cdot0 = a_{12}$

$a_i\cdot e^j = (a_{i1}\; a_{i2}\dots a_{im})\cdot(\underbrace{0\dots 0\overset{\overset{j}{\downarrow}}{1}0\dots0}_{m})^T =$

$\Rightarrow AE = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,n}\\ j=\overline{1,m}}} = A$

$= a_{i1}0 + a_{i2}0 + \dots a_{i(j-1)}0 + a_{ij}1 + a_{i(j+1)}0 + \dots a_{im}0 = a_{ij}$

Докажем еще что-нибудь…

9) линейность : $\left(A+B\right)^{T}=A^{T}+B^{T}$ $\boxed{A,B-n\times m}$

Требуется доказать, что *ji-й* элемент суммы *A+B* равен сумме *ji-го* элемента *A и ji-го* элемента *B*

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & a_{ij} & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \dots & \dots & b_{ij} & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nm} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1m}+b_{1m} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2m}+b_{2m} \\ \dots & \dots & a_{ij}+b_{ij} & \dots \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & \dots & a_{nm}+b_{nm} \end{pmatrix}$$

$$\left(A+B\right)^{T}=\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1m}+b_{1m} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2m}+b_{2m} \\ \dots & \dots & a_{ij}+b_{ij} & \dots \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & \dots & a_{nm}+b_{nm} \end{pmatrix}^{T} & \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ \end{array} \end{array} \\ \begin{array}{cccc} \quad & \quad & j & \quad \end{array} \end{array}=\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{21}+b_{21} & \dots & a_{n1}+b_{n1} \\ a_{12}+b_{12} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{n2}+b_{n2} \\ \dots & \dots & a_{ij}+b_{ij} & \dots \\ a_{1m}+b_{1m} & a_{2m}+b_{2m} & \dots & a_{nm}+b_{nm} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ j \\ \\ \end{array} \end{array} \\ \begin{array}{cccc} \quad & \quad & i & \quad \end{array} \end{array}$$

$$(A+B)^T = C, \quad c_{ji} = a_{ij} + b_{ij} \Rightarrow c_{ij} = a_{ji} + b_{ji}$$

$$A^T = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & a_{ij} & \cdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}, & \begin{array}{c} \\ \\ j \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{cccc} \quad & \quad & i & \quad \end{array} & \end{array} \qquad B^T = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & \cdots & b_{n1} \\ b_{12} & b_{22} & \cdots & b_{n2} \\ \cdots & \cdots & b_{ij} & \cdots \\ b_{1m} & b_{2m} & \cdots & b_{nm} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ j \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{cccc} \quad & \quad & i & \quad \end{array} & \end{array}$$

$$A^T + B^T = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{21}+b_{21} & \cdots & a_{n1}+b_{n1} \\ a_{12}+b_{12} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{n2}+b_{n2} \\ \cdots & \cdots & a_{ij}+b_{ij} & \cdots \\ a_{1m}+b_{1m} & a_{2m}+b_{2m} & \cdots & a_{nm}+b_{nm} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ j \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{cccc} \quad & \quad & i & \quad \end{array} & \end{array}$$

Обратная матрица.

Обратная (по умножению) матрица — это матрица, произведение с которой равно единице: $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$

Бывает еще обратная по сложению: $\left(-A\right) + A = A + \left(-A\right) = 0$

свойства обратимости :

1) Обратная бывает у квадратных, и то не у всех. $A, A^{-1} - n \times n$

2) Обратная к обратной равна исходной. $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$

3) Обратная к транспонированной равна транспонированной обратной. $\left(A^{T}\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{T}$

4) Обратная произведения равна произведению обратных в обратном порядке. $\left(AB\right)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

5) Обратная к умноженной на число равна обратной, разделенной на это число $\left(\lambda A\right)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}$

Пример на умножение….

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \\ -5 & 6 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 7 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 8+(-1)\cdot 7+2\cdot 2 & 3\cdot 1+(-1)\cdot 2+2\cdot(-3) \\ 4\cdot 8+2\cdot 7+0\cdot 2 & 4\cdot 1+2\cdot 2+0\cdot(-3) \\ (-5)\cdot 8+6\cdot 7+1\cdot 2 & (-5)\cdot 1+6\cdot 2+1\cdot(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & -5 \\ 46 & 8 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Найдем обратную матрицу….

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}^{-1} = ? \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 1\cdot x + 1\cdot z = 1 \\ 1\cdot y + 1\cdot t = 0 \\ 2\cdot x - 3\cdot z = 0 \\ 2\cdot y - 3\cdot t = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+z=1 \\ y=-t \\ x=1,5z \\ 2\cdot y-3\cdot t=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1,5z+z=1 \quad \Rightarrow \quad z=0,4 \\ y=-t \\ x=1,5z \\ 2\cdot(-t)-3\cdot t=1 \quad \Rightarrow \quad t=-0,2 \end{cases}$$

$$\boxed{\Leftrightarrow \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,2 \\ 0,4 & -0,2 \end{pmatrix}}$$

Выполним проверку….

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,6 & 0,2 \\ 0,4 & -0,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6+0,4 & 0,2-0,2 \\ 1,2-1,2 & 0,4+0,6 \end{pmatrix} = E$$

Более сложный пример на нахождение обратной матрицы

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = ? \qquad \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2y_1 + 7y_2 + 3y_3 = 0 \\ 2z_1 + 7z_2 + 3z_3 = 0 \\ 3x_1 + 9x_2 + 4x_3 = 0 \\ 3y_1 + 9y_2 + 4y_3 = 1 \\ 3z_1 + 9z_2 + 4z_3 = 0 \\ 1x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 0 \\ 1y_1 + 5y_2 + 3y_3 = 0 \\ 1z_1 + 5z_2 + 3z_3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2y_1 + 7y_2 + 3y_3 = 0 \\ 2z_1 + 7z_2 + 3z_3 = 0 \\ 3x_1 + 9x_2 + 4x_3 = 0 \\ 3y_1 + 9y_2 + 4y_3 = 1 \\ 3z_1 + 9z_2 + 4z_3 = 0 \\ x_1 = -5x_2 - 3x_3 \\ y_1 = -5y_2 - 3y_3 \\ z_1 = 1 - 5z_2 - 3z_3 \end{cases}$$

Подставляем и упрощаем:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -10x_2 - 6x_3 + 7x_2 + 3x_3 = 1 \\ -10y_2 - 6y_3 + 7y_2 + 3y_3 = 0 \\ 2 - 10z_2 - 6z_3 + 7z_2 + 3z_3 = 0 \\ -15x_2 - 9x_3 + 9x_2 + 4x_3 = 0 \\ -15y_2 - 9y_3 + 9y_2 + 4y_3 = 1 \\ 3 - 15z_2 - 9z_3 + 9z_2 + 4z_3 = 0 \\ x_1 = -5x_2 - 3x_3 \\ y_1 = -5y_2 - 3y_3 \\ z_1 = 1 - 5z_2 - 3z_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x_2 - 3x_3 = 1 \\ -3y_2 - 3y_3 = 0 \\ -3z_2 - 3z_3 = -2 \\ -6x_2 - 5x_3 = 0 \\ -6y_2 - 5y_3 = 1 \\ -6z_2 - 5z_3 = -3 \\ x_1 = -5x_2 - 3x_3 \\ y_1 = -5y_2 - 3y_3 \\ z_1 = 1 - 5z_2 - 3z_3 \end{cases}$$

Перегруппируем уравнения…

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3x_2-3x_3=1 \\ -3y_2-3y_3=0 \\ -3z_2-3z_3=-2 \\ -6x_2-5x_3=0 \\ -6y_2-5y_3=1 \\ -6z_2-5z_3=-3 \\ x_1=-5x_2-3x_3 \\ y_1=-5y_2-3y_3 \\ z_1=1-5z_2-3z_3 \end{cases}$$

и система разобьётся на четыре:

$$\begin{cases} -3x_2-3x_3=1 \\ -6x_2-5x_3=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3y_2-3y_3=0 \\ -6y_2-5y_3=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3z_2-3z_3=-2 \\ -6z_2-5z_3=-3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1=-5x_2-3x_3 \\ y_1=-5y_2-3y_3 \\ z_1=1-5z_2-3z_3 \end{cases}$$

Решаем их по отдельности:

$$\begin{cases} x_2=5/3 \\ x_3=-2 \end{cases} \quad \begin{cases} y_2=-1 \\ y_3=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z_2=-1/3 \\ z_3=1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1=-7/3 \\ y_1=2 \\ z_1=-1/3 \end{cases}$$

И получаем:

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -7/3 & 2 & -1/3 \\ 5/3 & -1 & -1/3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Литература

Теория:

1. **Зеленцов Б.П. Алгебра и геометрия. Учебное пособие, Новосибирск, 2009.**
2. Письменный Д. Конспект лекций по высшей математике. (Есть в библиотеке.)

Задачники:

1. **Зеленцов Б.П. Линейная и векторная алгебра. Новосибирск, 2005.**
2. Рычков, Захарова. Основы линейной алгебры и аналитической геометрии. (Есть на сайте и в библиотеке.)