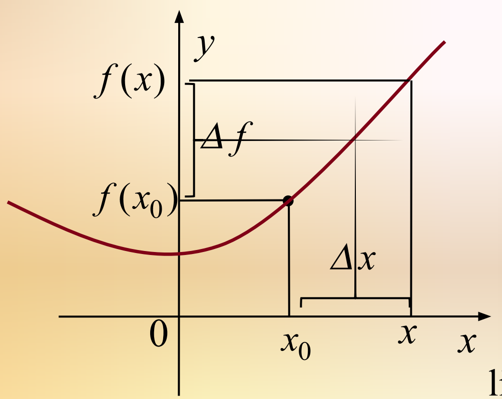
НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ И ТОЧКИ РАЗРЫВА

1. Непрерывность функции в точке

Определение 1

Функция $f(x)$, определенная в окрестности некоторой точки x_0, включая саму точку x_0, называется **непрерывной в точке** x_0, если предел функции и значение функции в этой точке равны:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$



$\Delta x = x - x_0$ - приращение аргумента

$\Delta f = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ - приращение функции

Заметим, что $x \to x_0 \Rightarrow x - x_0 \to 0 \Rightarrow \Delta x \to 0$

Следовательно,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) - f(x_0) = 0 \Rightarrow \lim_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0 \Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0$$

Определение 2

Функция $f(x)$, определенная в окрестности некоторой точки x_0, включая саму точку x_0, называется **непрерывной в точке** x_0, если предел приращения функции равен 0 при стремлении приращения аргумента к 0:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0$$

Итак, бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции в любой точке непрерывности функции:

$$\Delta x \to 0 \Rightarrow \Delta f \to 0$$

НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ И ТОЧКИ РАЗРЫВА

2. Непрерывность функции в интервале и на отрезке

Определение

Функция $f(x)$, называется непрерывной в интервале (a, b), если она непрерывна в каждой точке этого интервала.

Определение

Функция $f(x)$, называется непрерывной на отрезке $[a, b]$, если она непрерывна в интервале (a, b),

$\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$ (непрерывность справа), $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = f(b)$ (непрерывность слева).

Все простейшие элементарные функции непрерывны в своей области определения

$f(x) = C,$

$f(x) = x^n,$

$f(x) = a^x \ (a > 0, a \neq 1),$

$f(x) = \log_a x \ (a > 0, a \neq 1),$

$f(x) = \sin x,$

$f(x) = \cos x,$

$f(x) = tg\, x,$

$f(x) = ctg\, x,$

$f(x) = \arcsin x,$

$f(x) = \arccos x,$

$f(x) = arctg\, x,$

$f(x) = arcctg\, x$

НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ И ТОЧКИ РАЗРЫВА

3. Свойства непрерывных в точке функций

Пусть функции $f(x)$, $g(x)$ непрерывны в точке x_0, тогда функции

$$f(x) \pm g(x),$$

$$f(x) \cdot g(x),$$

$$\frac{f(x)}{g(x)}, \ (g(x_0) \neq 0),$$

$$f(g(x))$$

непрерывны в точке x_0.

Указанные свойства можно обобщить на случай непрерывности функций на некотором множестве

НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ И ТОЧКИ РАЗРЫВА

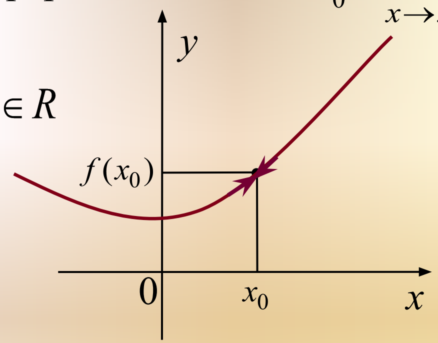
4. Классификация точек разрыва

Определение

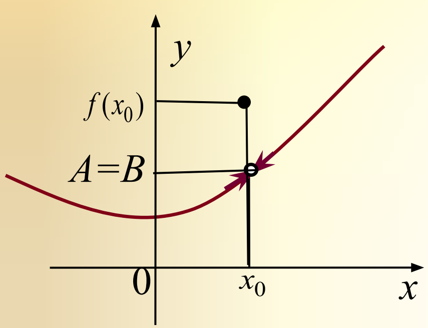
Если функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0, за исключением, может быть, самой точки x_0, но не является непрерывной в этой точке, то точка x_0 называется **точкой разрыва**.

Детализируем определение функции, непрерывной в точке x_0: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

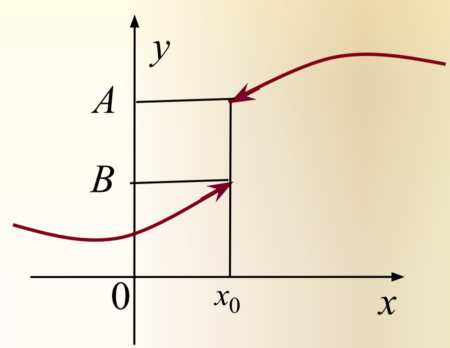
1. $\exists \lim\limits_{x\to x_0+} f(x) = A \in R, \quad \exists \lim\limits_{x\to x_0-} f(x) = B \in R$
2. $A = B$
3. $x_0 \in D(f), \quad A = B = f(x_0)$



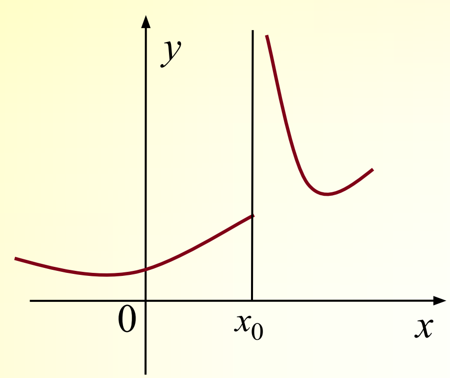
Если 1, 2 выполняются,
а 3 не выполняется,
то x_0 – **точка устранимого разрыва I рода**



Если 1 выполняется,
2 не выполняется,
то x_0 – **точка неустранимого разрыва I рода**



Если 1 не выполняется,
то x_0 – **точка разрыва II рода**



НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ И ТОЧКИ РАЗРЫВА

Пусть x_0 - внутренняя точка области определения

Рассмотрим условия:

1. $\exists \lim\limits_{x \to x_0+} f(x) = A \in R, \quad \exists \lim\limits_{x \to x_0-} f(x) = B \in R$
2. $A = B$
3. $x_0 \in D(f), \quad A = B = f(x_0)$

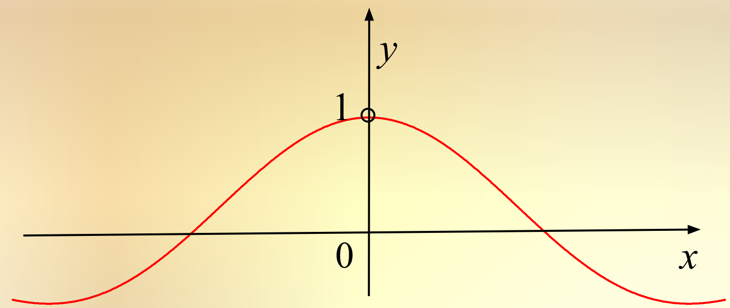
$1,2,3 \Rightarrow x_0 -$ точка непрерывности	$1,2,\cancel{3} \Rightarrow x_0 -$ точка устранимого разрыва I рода	$1,\cancel{2} \Rightarrow x_0 -$ точка неустранимого разрыва I рода	$\cancel{1} \Rightarrow x_0 -$ точка разрыва II рода

Пример 1

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

$$D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$$



$x = 0$ – точка устранимого разрыва I рода

НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ И ТОЧКИ РАЗРЫВА

Пусть x_0 - внутренняя точка области определения

Рассмотрим условия:

1. $\exists \lim\limits_{x\to x_0+} f(x) = A \in R, \quad \exists \lim\limits_{x\to x_0-} f(x) = B \in R$
2. $A = B$
3. $x_0 \in D(f), \quad A = B = f(x_0)$

$1,2,3 \Rightarrow x_0 -$ точка непрерывности	$1,2,\cancel{3} \Rightarrow x_0 -$ точка устранимого разрыва I рода	$1,\cancel{2} \Rightarrow x_0 -$ точка неустранимого разрыва I рода	$\cancel{1} \Rightarrow x_0 -$ точка разрыва II рода

Пример 2

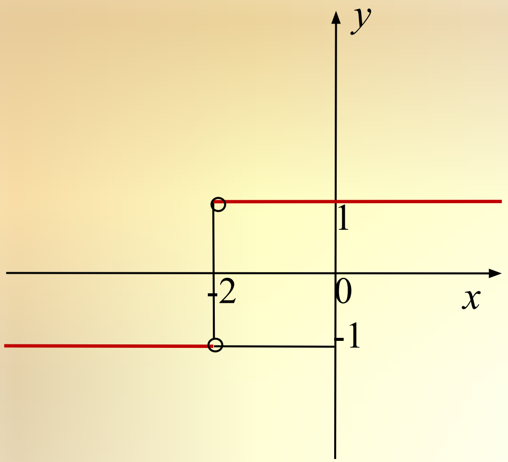
$$f(x) = \frac{|x+2|}{x+2} = \begin{cases} -1, \text{ если } x < -2; \\ 1, \text{ если } x > -2 \end{cases}$$

$$D(f) = (-\infty, -2) \cup (-2, +\infty)$$

$$\lim_{x\to -2^-} f(x) = \lim_{x\to -2^-} (-1) = -1 \in R$$

$$\lim_{x\to -2^+} f(x) = \lim_{x\to -2^+} (1) = 1 \in R$$

$$\lim_{x\to -2^-} f(x) \neq \lim_{x\to -2^+} f(x)$$



$x = -2$ – точка неустранимого разрыва I рода

НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ И ТОЧКИ РАЗРЫВА

Пусть x_0 - внутренняя точка области определения

Рассмотрим условия:

1. $\exists \lim\limits_{x \to x_0+} f(x) = A \in R, \quad \exists \lim\limits_{x \to x_0-} f(x) = B \in R$
2. $A = B$
3. $x_0 \in D(f), \quad A = B = f(x_0)$

$1,2,3 \Rightarrow x_0 -$ точка непрерывности	$1,2,\cancel{3} \Rightarrow x_0 -$ точка устранимого разрыва I рода	$1,\cancel{2} \Rightarrow x_0 -$ точка неустранимого разрыва I рода	$\cancel{1} \Rightarrow x_0 -$ точка разрыва II рода

Пример 3

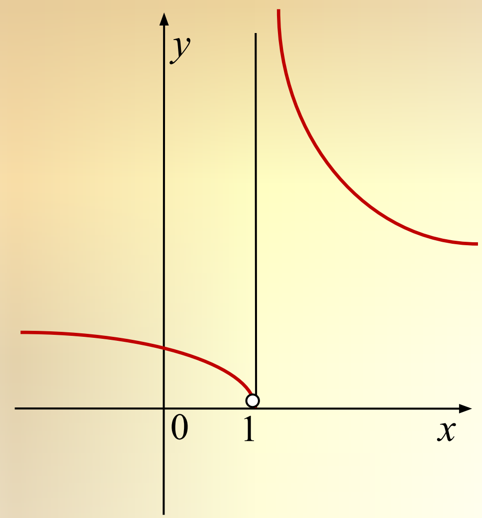
$$f(x) = 2^{\frac{1}{x-1}}$$

$$D(f) = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} 2^{\frac{1}{x-1}} = 0 \in R$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} 2^{\frac{1}{x-1}} = +\infty$$

$x = 1$ – точка разрыва II рода



НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ И ТОЧКИ РАЗРЫВА

Пусть x_0 - внутренняя точка области определения

Рассмотрим условия:

1. $\exists \lim\limits_{x \to x_0+} f(x) = A \in R, \quad \exists \lim\limits_{x \to x_0-} f(x) = B \in R$
2. $A = B$
3. $x_0 \in D(f), \quad A = B = f(x_0)$

$1,2,3 \Rightarrow x_0 -$ точка непрерывности	$1,2,\cancel{3} \Rightarrow x_0 -$ точка устранимого разрыва I рода	$1,\cancel{2} \Rightarrow x_0 -$ точка неустранимого разрыва I рода	$\cancel{1} \Rightarrow x_0 -$ точка разрыва II рода

Пример 4

$$f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ если } x \le 1; \\ 2 - x, \text{ если } x > 1 \end{cases}$$

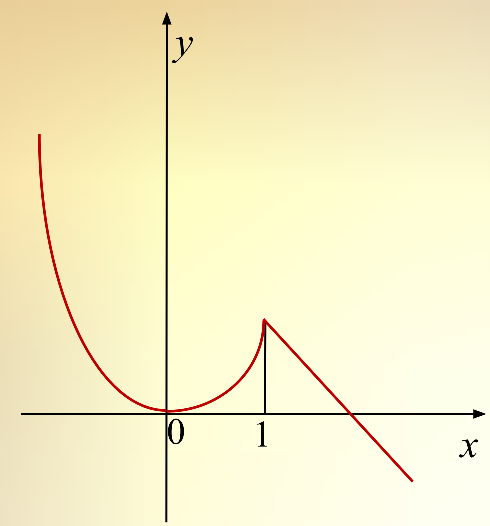
$$D(f) = (-\infty, +\infty)$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} x^2 = 1 \in R \qquad \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (2 - x) = 1 \in R$$

$$f(1) = 1^2 = 1$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = f(1) = 1$$

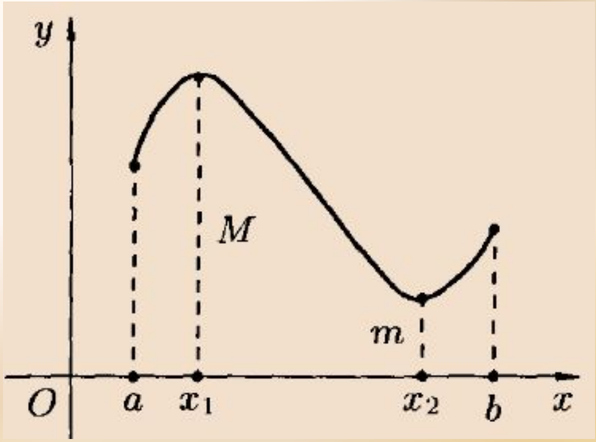
В точке x=1 функция непрерывна



НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ И ТОЧКИ РАЗРЫВА

5. Свойства функций, непрерывных на отрезке

Теорема Вейерштрасса
Если функция непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она принимает на нем свои наибольшее и наименьшее значения.



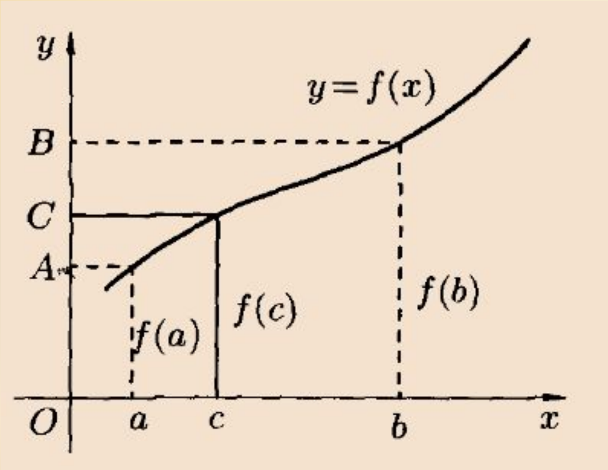
$$\exists\, x_1 \in [a, b]\ \forall x \in [a, b]\ (f(x) \le f(x_1) = M)$$

$$\exists\, x_2 \in [a, b]\ \forall x \in [a, b]\ (f(x) \ge f(x_2) = m)$$

Следствие
Если функция непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она ограничена на этом отрезке.

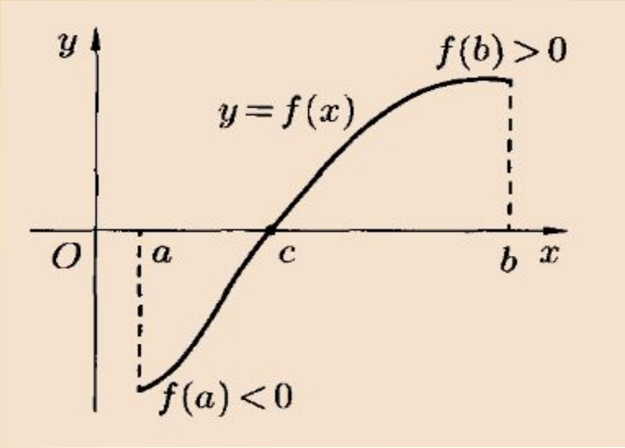
НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ И ТОЧКИ РАЗРЫВА

Теорема Больцано – Коши
Если функция непрерывна на отрезке [a, b] и принимает на концах отрезка не равные значения $f(a)=A$, $f(b)=B$, то на этом отрезке она принимает и все промежуточные значения между A и B.



$$A=f(a)\neq f(b)=B \Rightarrow \forall C\ (C\ \textit{между}\ A\ \textit{и}\ B)\ \exists\, c\in[a,b]\ (f(c)=C)$$

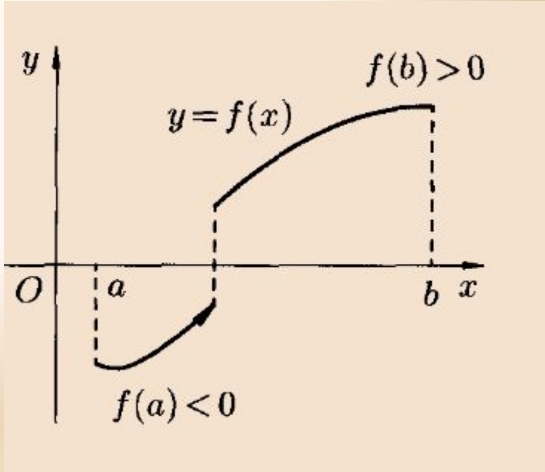
Следствие
Если функция непрерывна на отрезке [a, b] и принимает на концах отрезка значения разных знаков, то внутри отрезка [a, b] найдется хотя бы одна точка, в которой функция обращается в 0.



$$f(a)\cdot f(b)<0 \Rightarrow \exists\, c\in[a,b]\ (f(c)=0)$$

НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ И ТОЧКИ РАЗРЫВА

Утверждения указанных теорем могут не выполняться, если нарушены какие-либо из ее условий: например, функция непрерывна не на отрезке [a, b], а на интервале (a, b), или функция на отрезке [a, b] имеет разрыв.



Спасибо за внимание!