

# Лекция 10

---

## ***Лазеры сверхкоротких импульсов***

# Краткий обзор пройденного пути

Три базовых идеи: Стимулированное излучение - Инверсия населенностей – Положит. обратная связь в открытых резонаторах

Выяснили, как образуется инверсия и как она энергетически преобразуется (кинетические, или балансные уравнения) в лазерной среде

Ознакомились с основными временными режимами лазерного излучения – непрерывный, импульсный (свободная генерация – моноимпульсный – разгрузка резонатора – режим СКИ)

Ознакомились с понятием модовой структуры излучения в открытых резонаторах и различными типами резонаторов

Ознакомились с различными твердотельными лазерными средами и основными параметрами, их характеризующими (спектральная область накачки, рабочая длина волны, время жизни возбужденного состояния, сечение усиления, ширина спектра усиления... показатель преломления, теплопроводность,...)

# «...Куда ж нам плыть?...

## **Синтез сверхкоротких импульсов**

**Быстрорелаксирующие пассивные затворы для генерации СКИ**

**Эффекты дисперсии среды при формировании СКИ  
Само модуляция фазы и оптические солитоны**

**Усиление СКИ  
Измерение длительности СКИ**

# Лазеры сверхкоротких импульсов

---

Базовые идеи:

- Короткие импульсы синтезируются как специальным образом организованные биения мод лазерного резонатора
- Спектральная ширина контура усиления лазерной среды выбирается максимально широкой
- Дальнейшее укорочение импульса происходит при его усилении, сопровождаемом

Что это значит?

Ортогональные функции  
 $\varphi(x) \quad \psi(x) \quad [a, b] \quad \int_a^b \varphi(x) \psi(x) dx = 0$

■ Ортогональная система функций

$\{\varphi_n(x)\} \quad [a, b]$

$$\int_a^b \varphi_n(x) \varphi_m(x) dx = 0 \quad \int_a^b \varphi_n^2(x) dx = \lambda_n > 0$$

$(n, m = 0, 1, 2, \dots; n \neq m),$

Ортонормированная система функций

$$\lambda_n = 1 \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

— Ортогональную систему легко можно превратить в ортонормированную —

## Воспоминания о разложении функций (2)

---

В  $[a, b]$  определены  $f(x)$  и  $\{\varphi_n(x)\}$

$$f(x) = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \dots + c_n\varphi_n(x) + \dots$$

Определим коэффициенты разложения  $c_n$

$$\int_a^b f(x) \varphi_m(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_a^b \varphi_n(x) \varphi_m(x) dx$$

В  $[a, b]$  определены  $f(x)$  и  $\{\varphi_n(x)\}$

$$f(x) = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \dots + c_n\varphi_n(x) + \dots$$

Определим коэффициенты разложения  $c_n$

$$\int_a^b f(x) \varphi_m(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_a^b \varphi_n(x) \varphi_m(x) dx$$

## Воспоминания о разложении (3)

---

$$c_m = \frac{1}{\lambda_m} \int_a^b f(x) \varphi_m(x) dx$$

$(m = 0, 1, 2, \dots)$

в случае нормальной системы

$$c_m = \int_a^b f(x) \varphi_m(x) dx$$

$(m = 0, 1, 2, \dots)$ .

# Функции Бесселя

$$J_\alpha(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(m + \alpha + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\alpha}$$

Bessel functions



В [a,b] определены f(x) и {φ<sub>n</sub>(x)}

$$f(x) = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \dots + c_n\varphi_n(x) + \dots$$

Определим коэффициенты разложения c<sub>n</sub>

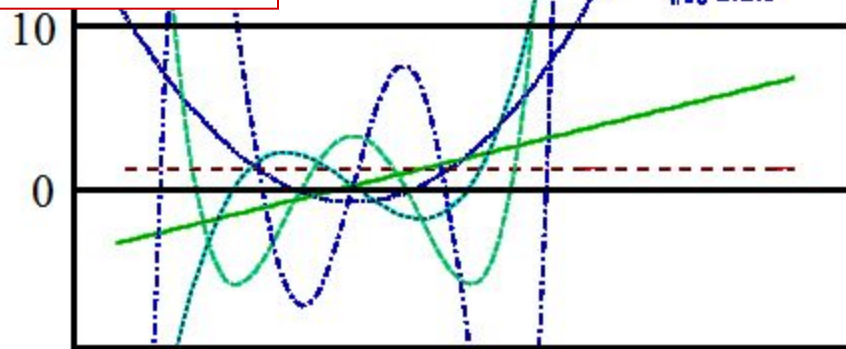
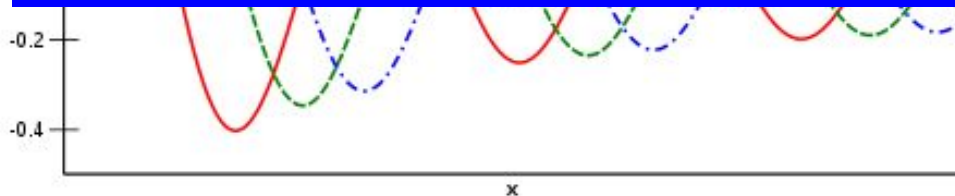
$$\int_a^b f(x) \varphi_m(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_a^b \varphi_n(x) \varphi_m(x) dx$$

рмита

Существует разложение функций в степенной ряд (всп. формулу Маклорена)

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$$

Вопрос: является ли система {x<sup>k</sup>} ортогональной (ортонормированной)?





Важнейшим примером ортогональной системы функций является тригонометрическая система

$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots$   
в промежутке  $[-\pi, \pi]$ .

Ортогональность:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\sin (n+m)x + \sin (n-m)x] dx = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos (n+m)x + \cos (n-m)x] dx = 0$$

если  $n \neq m$ , а если  $n=m$ , то

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 mx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 + \cos 2mx}{2} dx = \pi$$

Таким образом, разложение в тригонометрический ряд Фурье имеет вид:

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + (a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x) + \\ &\quad + (a_3 \cos 3x + b_3 \sin 3x) + \dots = \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \end{aligned}$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx.$$

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx$$

( $m = 1, 2, 3, \dots$ ).

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx dx$$

( $m = 1, 2, 3, \dots$ ).

# Воспоминания о разложении

## Комплексная форма тригонометрического ряда Фурье

$$\cos mx = \frac{1}{2} (e^{mxi} + e^{-mxi})$$

$$\sin mx = \frac{1}{2i} (e^{mxi} - e^{-mxi}) = \frac{i}{2} (e^{-mxi} - e^{mxi})$$

Получим:

так что

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2} (a_m - b_m i) e^{mxi} + \frac{1}{2} (a_m + b_m i) e^{-mxi}$$

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{kxi}$$

где  $c_0 = \frac{1}{2} a_0$

$$c_m = \frac{1}{2} (a_m - b_m i)$$

$$c_{-m} = \frac{1}{2} (a_m + b_m i)$$

$(m = 1, 2, 3 \dots)$

так что  $c_{-m} = \bar{c}_m$

Таким образом, разложение в тригонометрический ряд Фурье имеет вид:

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + (a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x) + \\ &\quad + (a_3 \cos 3x + b_3 \sin 3x) + \dots = \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \end{aligned}$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx,$$

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx$$

$(m = 1, 2, 3, \dots).$

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx dx$$

$(m = 1, 2, 3, \dots).$

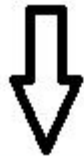
Таким образом, разложение в тригонометрический ряд Фурье имеет вид:

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + (a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x) + \\ &\quad + (a_3 \cos 3x + b_3 \sin 3x) + \dots = \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \end{aligned}$$

## Воспоминания о разложении

Если функция  $g(t)$  абсолютно интегрируема в некотором конечном промежутке  $[a, b]$ , то

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \int_a^b g(t) \sin pt \, dt = 0$$



Коэффициенты Фурье  $a_m, b_m$  абсолютно интегрируемой функции при  $m \rightarrow +\infty$  стремятся к нулю.

$mx \, dx$

# Воспоминания о разложении

Таким образом, разложение в тригонометрический ряд Фурье имеет вид:

$$f(x) = a_0 + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + (a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x) + (a_3 \cos 3x + b_3 \sin 3x) + \dots = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

Комплексная форма тригонометрического ряда

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx,$$

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx \quad (m=1, 2, 3, \dots).$$

$$\cos mx = \frac{1}{2} (e^{imx} + e^{-imx})$$

$$\sin mx = \frac{1}{2i} (e^{imx} - e^{-imx})$$

Получим:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2} (a_m - b_m i) e^{imx} + \frac{1}{2} (a_m + b_m i) e^{-imx}$$

**Как же всё это может нам помочь в деле получения сверхкоротких импульсов?**

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{kxi}$$

где  $c_0 = \frac{1}{2} a_0$

$$c_m = \frac{1}{2} (a_m - b_m i)$$

$$c_{-m} = \frac{1}{2} (a_m + b_m i)$$

$(m=1, 2, 3 \dots)$

\*

так что  $c_{-m} = \bar{c}_m$  \*

Как же всё это может нам  
помочь в деле получения  
сверхкоротких  
импульсов?

## Воспоминания о разложении

---

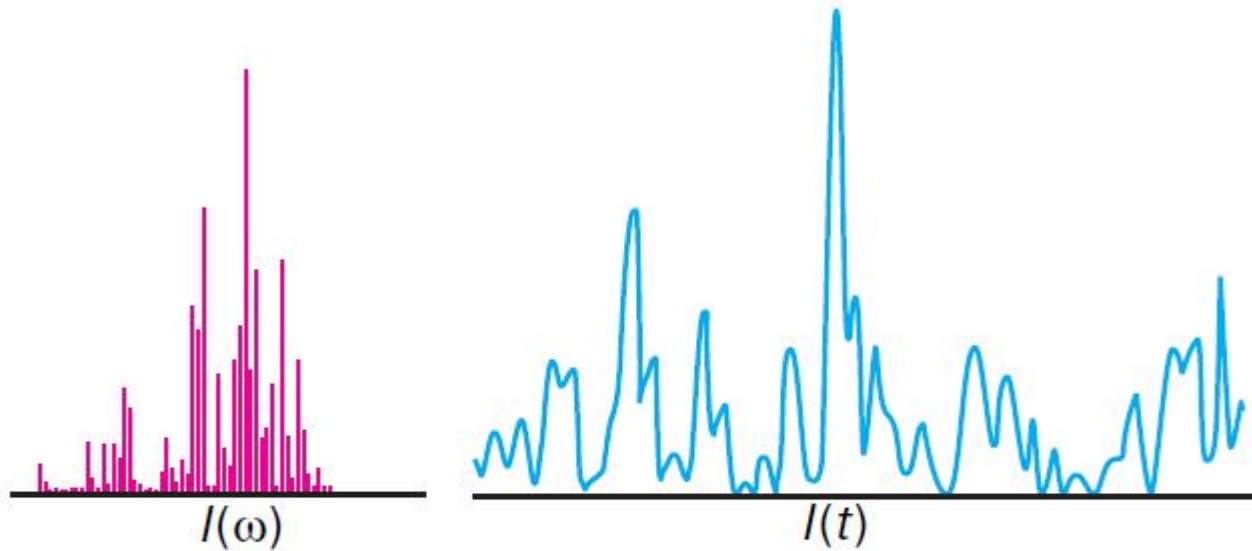
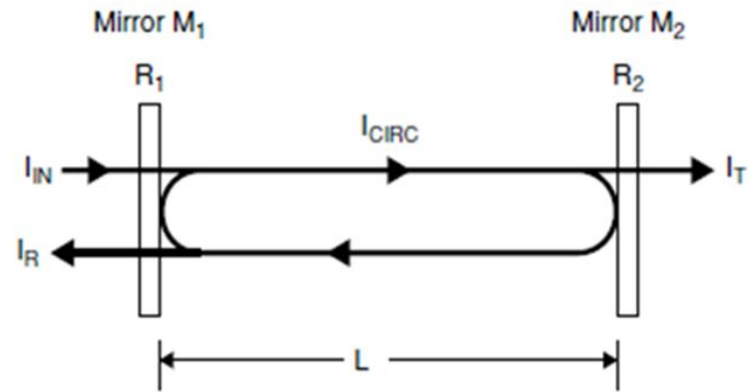
Если разложение периодической функции порождает набор спектральных амплитуд, связанных с соответствующими гармоническими составляющими, то и обратно, синтезируя сфазированные гармонические составляющие с соответствующими амплитудами, мы получим периодическую функцию, временные характеристики которой определяются спектральным составом компонент и их амплитудными и фазовыми значениями.

Многомодовый (по аксиальным модам) лазерный резонатор дает нам набор эквидистантных гармонических составляющих.

Осталось обеспечить их взаимную фазировку.



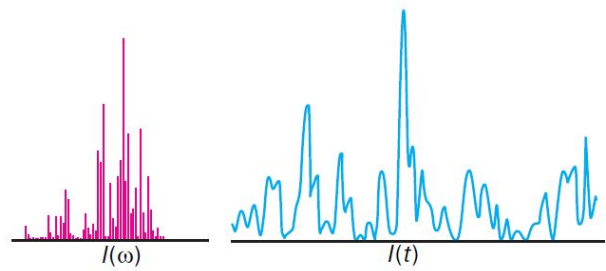
# Синхронизация мод. Продольные (аксиальные) м



Спектр

Интенсивность

Моды несинхронизованы

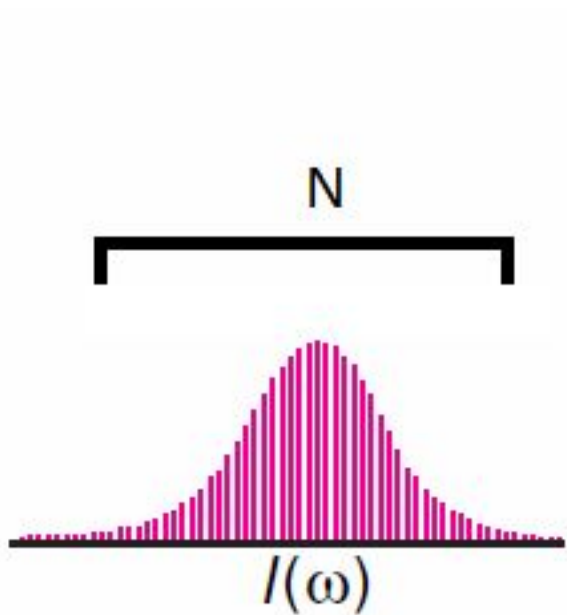
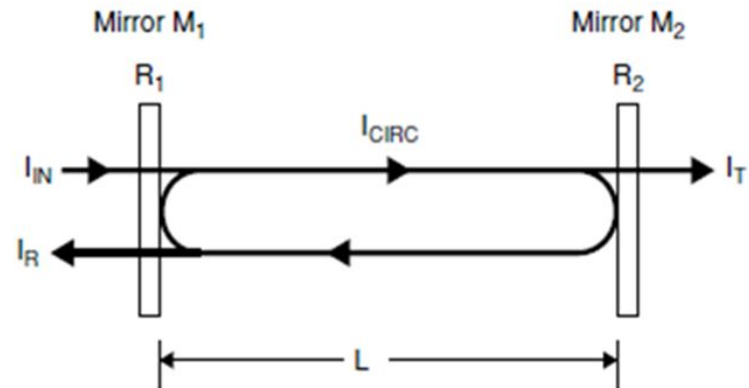


Спектр

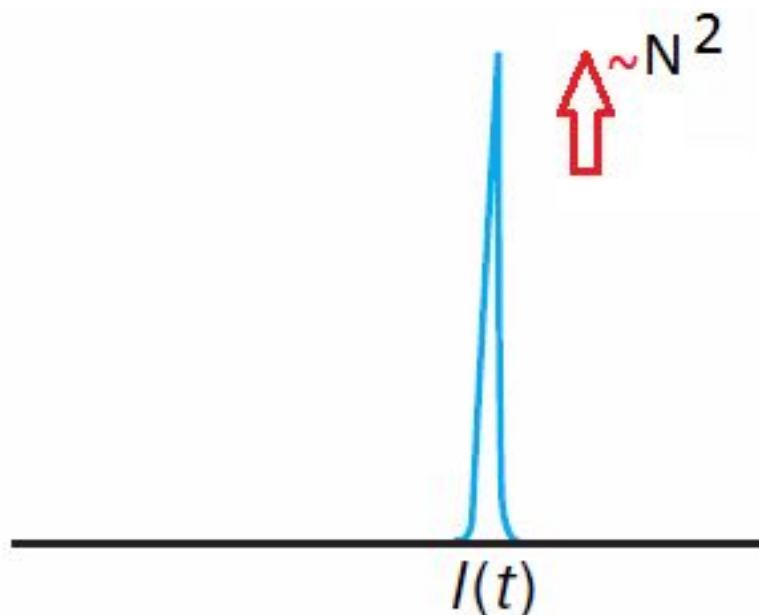
Интенсивность

Моды несинхронизованы

I мод.  
(аксиальные) м



Спектр



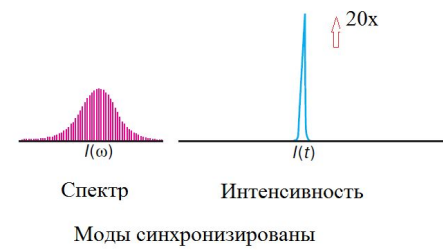
Интенсивность

Моды синхронизированы

\*



# Поле в резонаторе: набор аксиальных мод



$$E(t) = \sum_{n=-m}^m E_n \exp i \left( \omega_0 + n \frac{2\pi}{t_r} \right) t + \varphi_n$$

$$t_r = 2L/c$$

Пусть все фазы равны нулю, а спектральные амплитуды одинаковы:

$$\varphi_n = 0 \quad E_n = E_0$$



$$E(t) = E_0 \sum_{n=-m}^m \exp i \left( \omega_0 + n \frac{2\pi}{t_r} \right) t$$



$$E(t) = E_0 \left[ \frac{1 - \exp i N (2\pi/t_r) t}{1 - \exp i (2\pi/t_r) t} \right] \exp i \omega_0 t$$

Медленно  
меняющаяся  
амплитуда

несущая

# Сфазированные моды порождают цуг коротких импульсов

---

Интенсивность есть квадрат амплитуды:  $I = E \times E^*$

Для  $z=0$ :

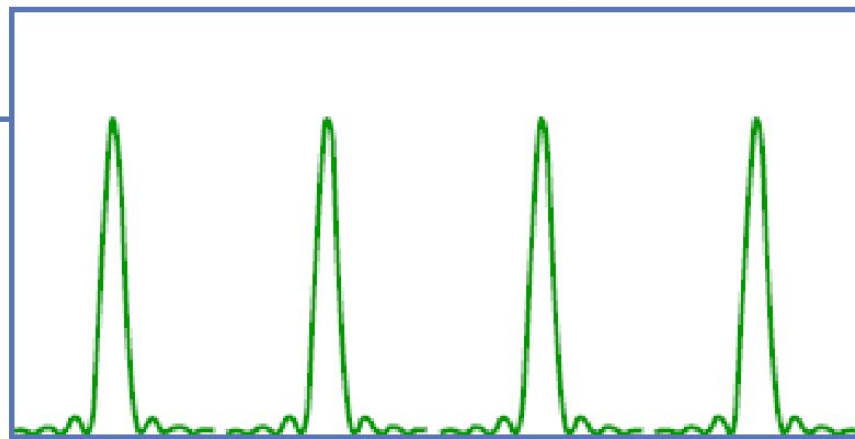
$$I(t) \sim |E_0|^2 \frac{\sin^2\left(\frac{N\Delta\omega t}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\Delta\omega t}{2}\right)}$$

## Огибающая для интенсивности:

а

Intensity

$\sim N^2$



Time

## Характеристики импульсов в цуге:

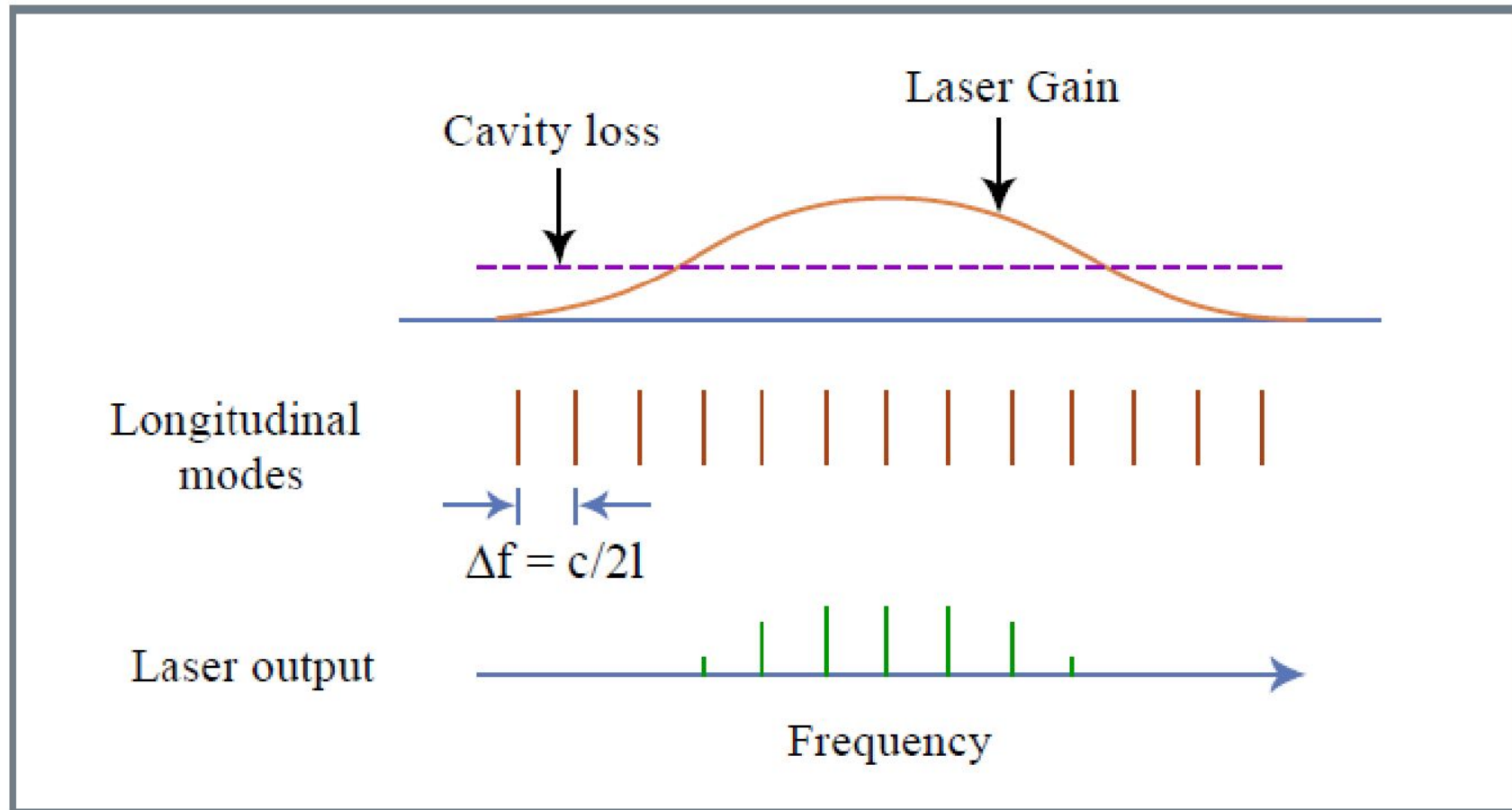
---

Длительность пичка  $\Delta t = \frac{2\pi}{N\Delta\omega} = \frac{1}{N\Delta f}$

Пиковая интенсивность:  $\sim N^2 |E_0|^2$

Средняя  
интенсивность:  $\sim N |E_0|^2$

# Количество генерируемых мод определяется шириной линии усиления лазерной среды



# Твердотельные среды и предел длительности импульсов

---

Задача:

В очень грубом предположении, что форма огибающей спектра лазерных сред – П-образная, определить предельную длительность импульса, определяемую шириной спектра.

# Твердотельные среды и предельные длительности импульсов

Laser Material	Average Emission $\lambda$	Band Width	Pulse Width ?
Nd:YAG	1064 nm	0.45 nm	~ ps
Nd:YLF	1047 nm	1.3 nm	~ ps
Nd:LSB	1062 nm	4 nm	~ ps
Nd:YVO <sub>4</sub>	1064 nm	2 nm	~ ps
Nd:fiber	1053 nm	22-28 nm	~ fs
Nd:glass	1053 nm	22-28 nm	~ fs
Yb:YAG	1030 nm	6 nm	~ fs
Yb:glass	1030 nm	30 nm	~ fs
Ti:Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	796 nm	200 nm	~ fs
Cr <sup>4+</sup> :Mg <sub>2</sub> SiO <sub>4</sub> :	1260 nm	200 nm	~ fs
Cr <sup>4+</sup> :YAG	1430 nm	180 nm	~ fs

Исп.

2

1

2

3

3

4

2

4

4

3

1

# Предельная длительность импульса: секансная огибающая

---

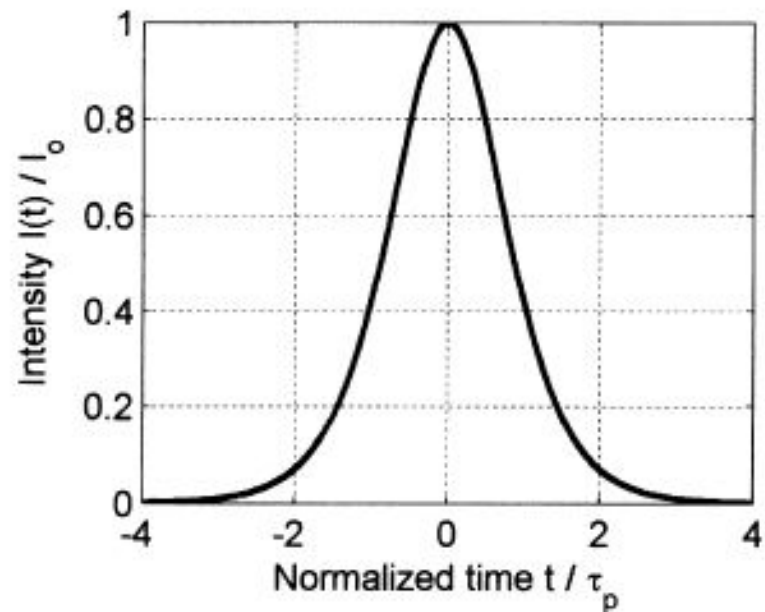
Для CW-лазера с синхронизацией мод показано (\*), что огибающая имеет вид

$$I(t) = I_0 \operatorname{sech}^2(t/\tau_p)$$

Ширина на половине высоты (

$$t_p = 1.76\tau_p$$

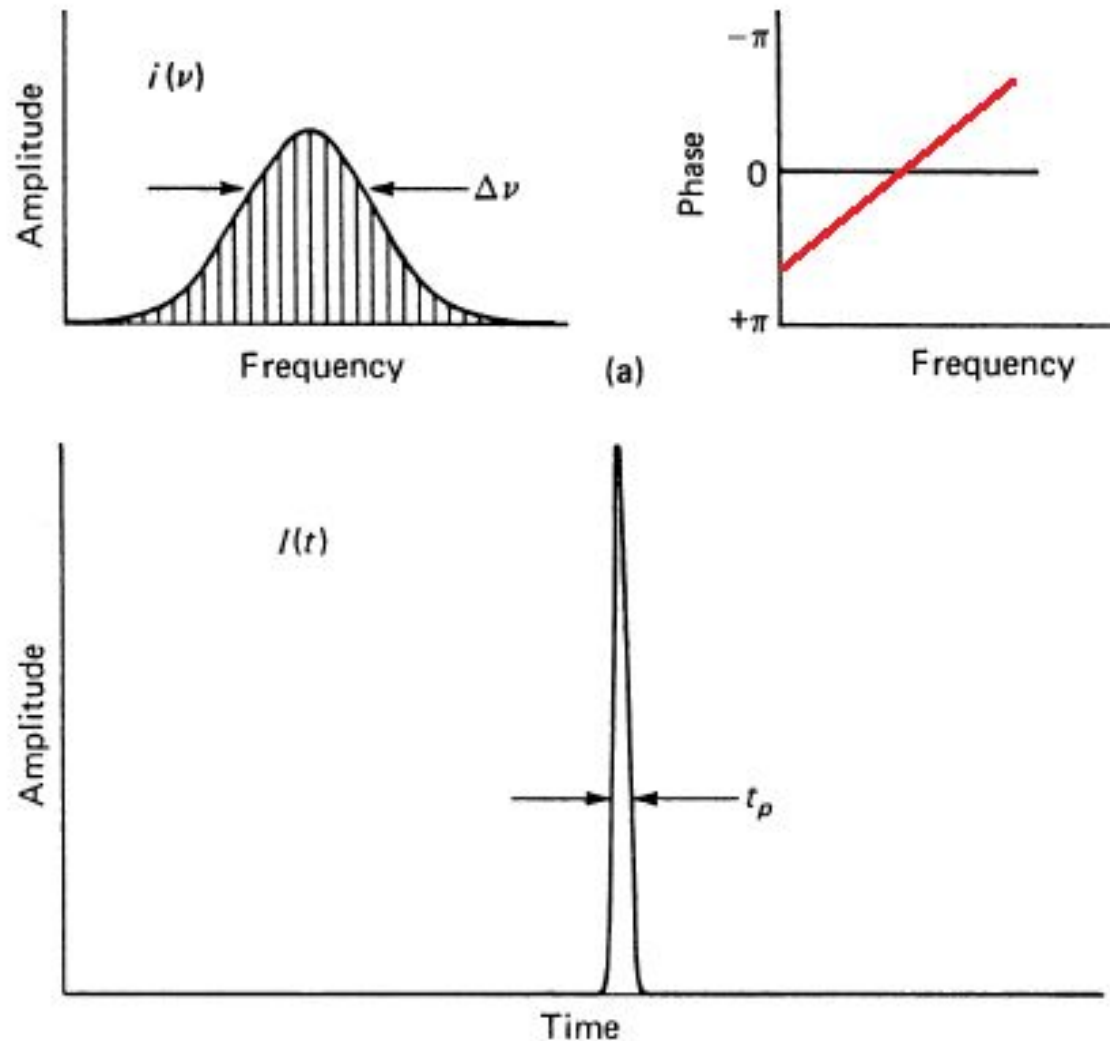
$$t_p \Delta\nu = 0.315$$



(\*) H.A. Haus, J.G. Fujimoto, E.P. Ippen: IEEE J. Quantum Electron.  
QE-28, 2086 (1992)



# Предельная длительность импульса: гауссова огибающая, чирп частоты



# Предельная длительность импульса: гауссова огибающая, чирп частоты

---

Для сигнала с гауссовской огибающей  
и чирпом частоты :

$$E(t) = \left(\frac{E_0}{2}\right) \exp(-\alpha t^2) \exp[j(\omega + \beta t)t]$$

Ширина огибающей на половине высоты:

$$t_p = \left(\frac{2 \ln 2}{\alpha}\right)^{1/2}$$

Полоса частот, действующая при синхронизации  
мод:

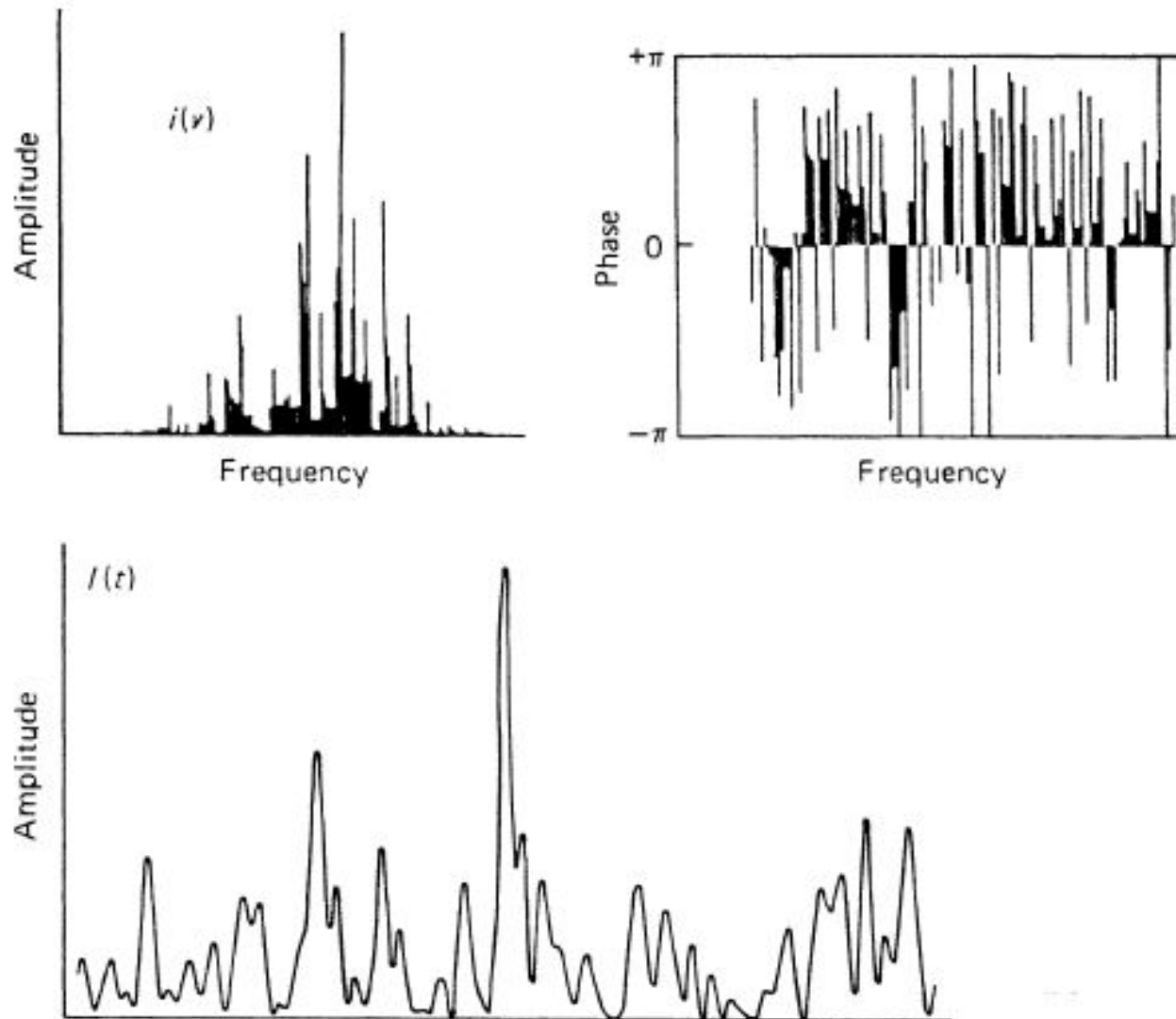
$$\Delta\nu = \frac{1}{\pi} \left[ \left(\frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha}\right) 2 \ln 2 \right]^{1/2}$$

При этом

$$t_p \Delta\nu = \left(\frac{2 \ln 2}{\pi}\right) \left[ 1 + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 \right]^{1/2}$$

$$\text{Для } \beta = 0 \quad t_p \Delta\nu = 0.44$$

# Несфазированные импульсы порождают шумоподобную огибающую (1)



# Несфазированные им- шумоподобную огибаю

Длительность пичка

$$\Delta t = \frac{2\pi}{N\Delta\omega} = \frac{1}{N\Delta f}$$

Пиковая интенсивность:

$$\sim N^2|E_0|^2$$

Средняя интенсивность:

$$\sim N|E_0|^2$$

Интенсивность флуктуирует относительно того же среднего значения:

$$\sim N|E_0|^2$$

Время корреляции

$$\Delta t = \frac{2\pi}{N\Delta\omega} = \frac{1}{N\Delta f}$$

Флуктуации периодичны с периодом

$$T = 1/\Delta f.$$

## Временная шкала

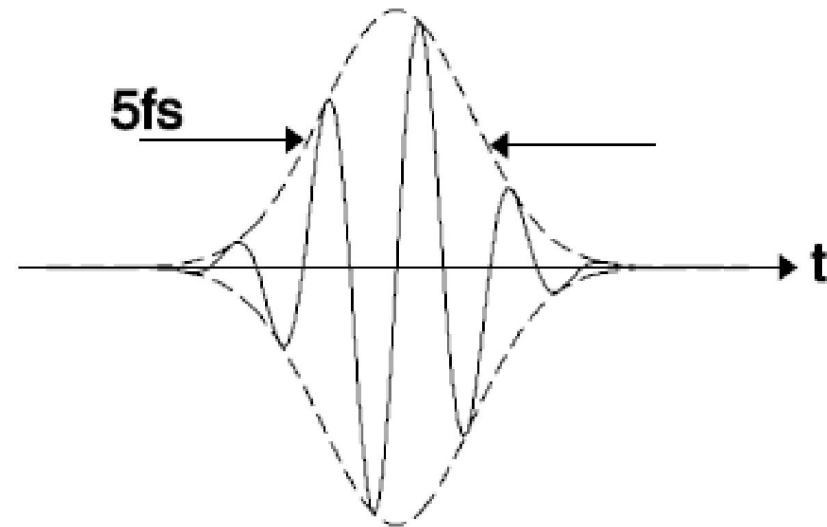
1 ns	~	30 cm
1 ps	~	300 $\mu\text{m}$
1 fs	~	300 nm
1 as = $10^{-18}$ s	~	0.3 nm = 3 $\text{\AA}$

На сегодня наименьшая  
длительность импульса:

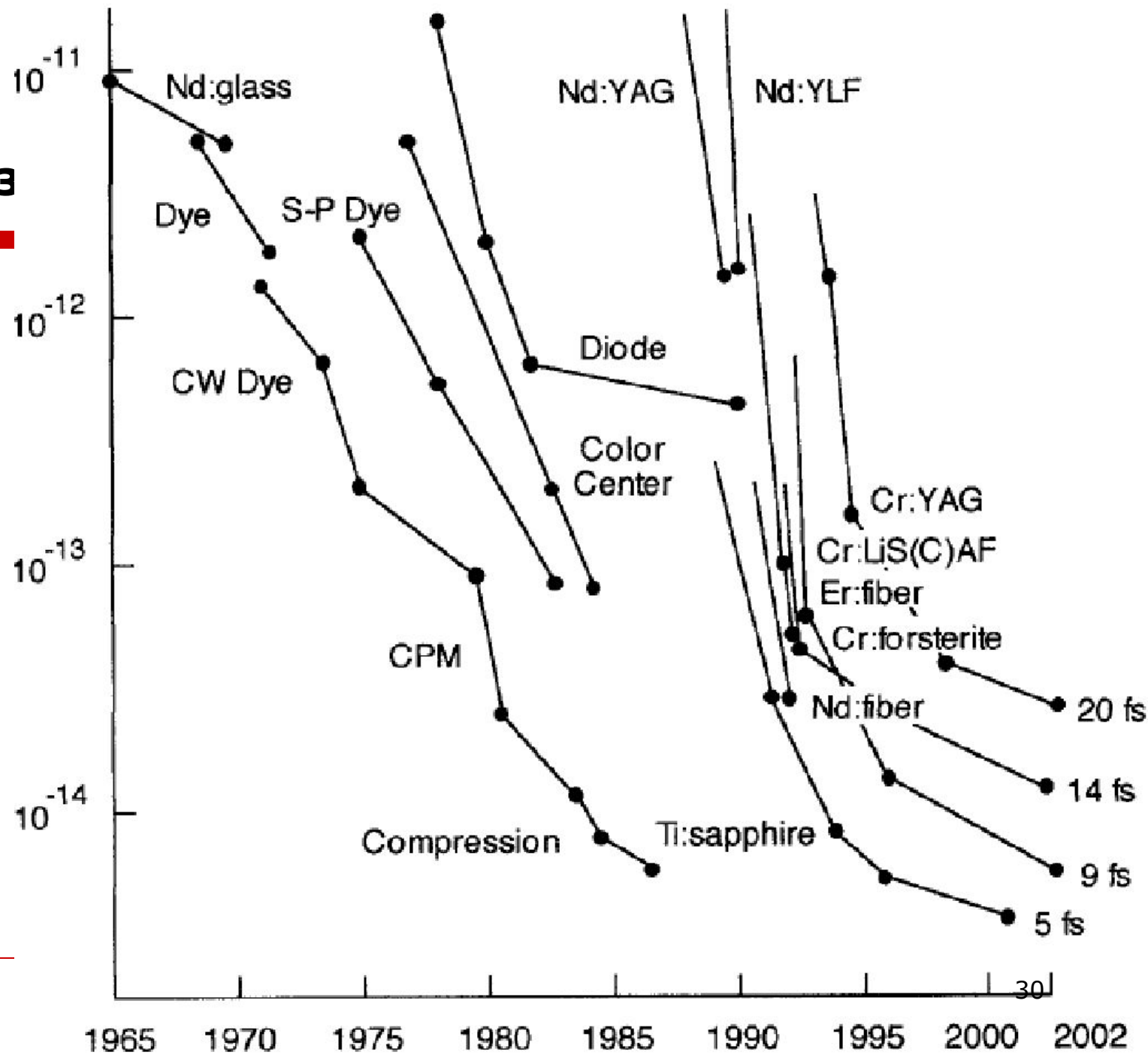
4-5 фс для средней длины  
волны несущей – 800 нм

$$(\lambda/c = 2.7 \text{ fs})$$

и  $\sim 100$  as для длины волны  
несущей 25 нм

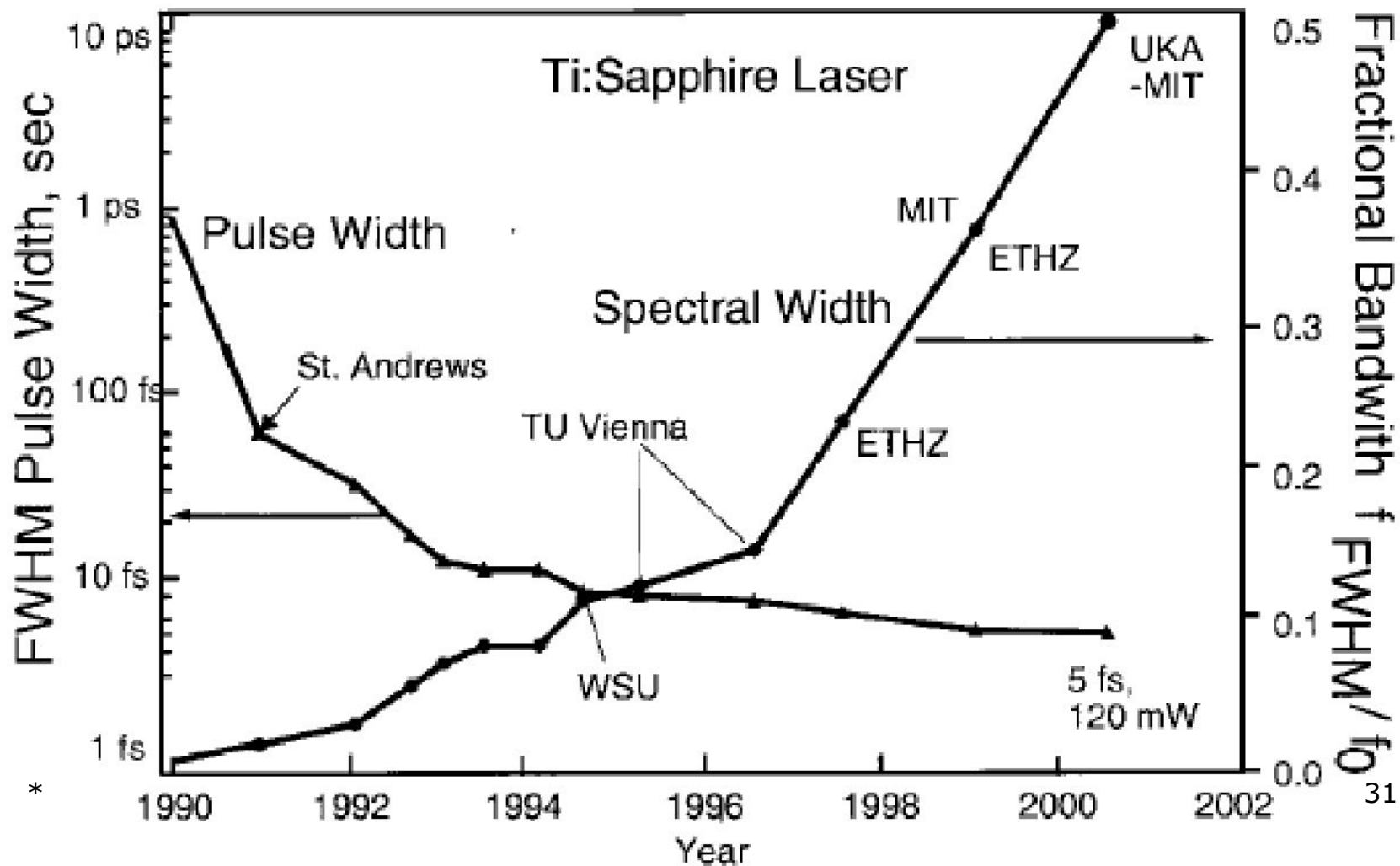


# Битва з



\*

# Битва за длительность: Ti:Sapphire



\*

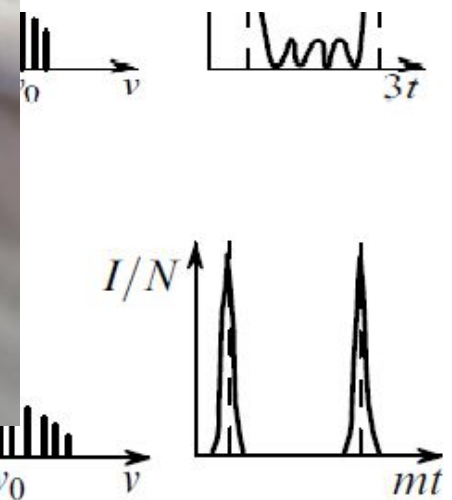
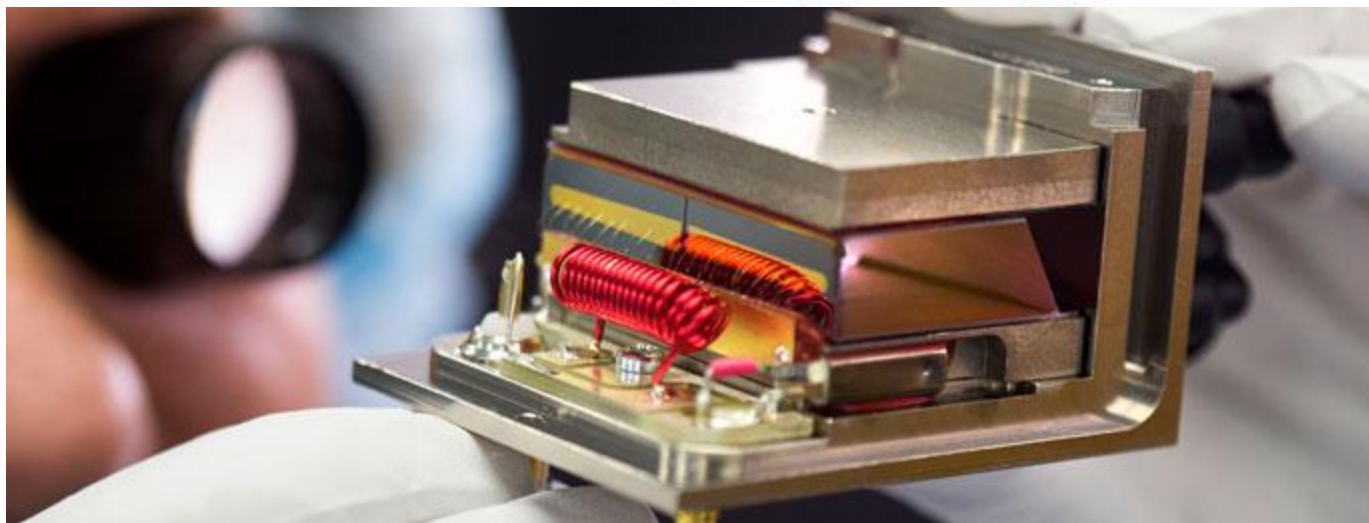
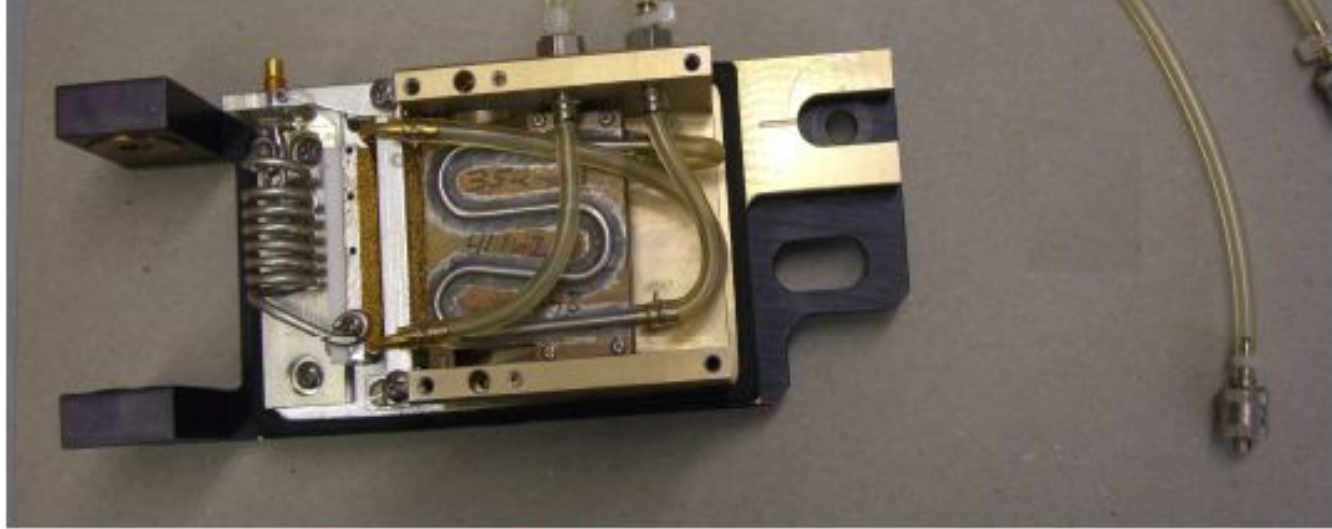
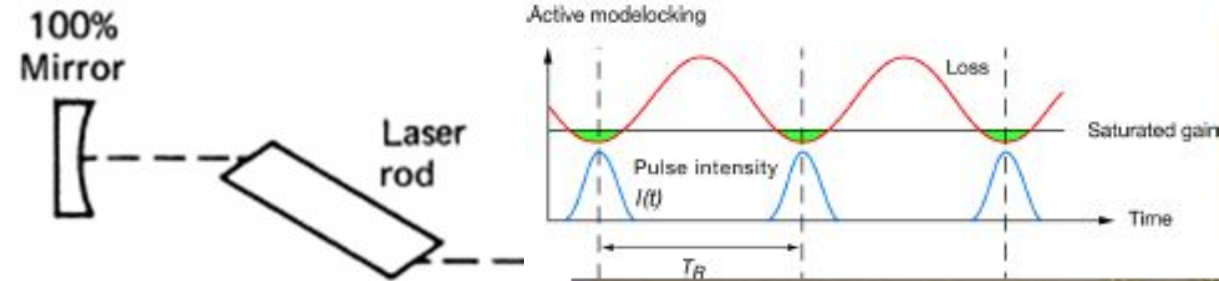
# Лазеры сверхкоротких импульсов

---

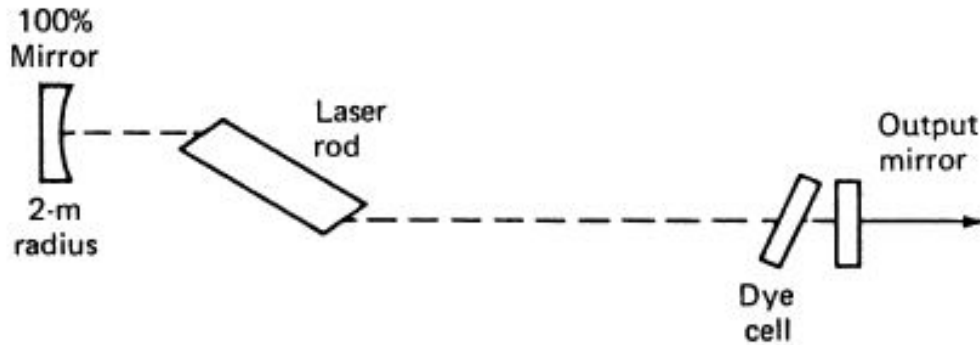
Базовые идеи:

- Короткие импульсы синтезируются как специальным образом организованные биения мод лазерного резонатора
  - Спектральная ширина контура усиления лазера выбирается максимально широкой
  - Дальнейшее укорочение импульса происходит при его усилении, сопровождаемом преобразованием спектра
-

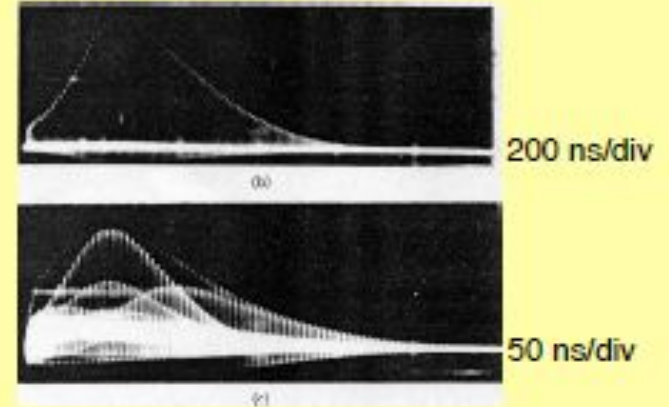




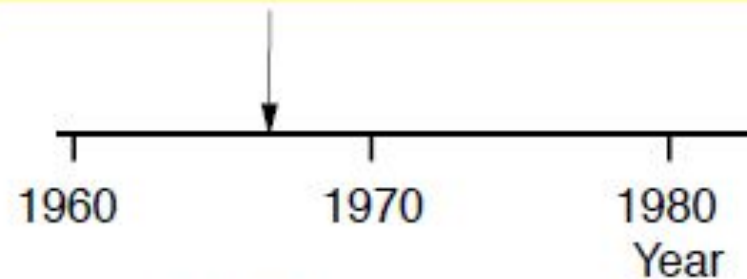
# Синхронизация мод в лазере с насыщающимся поглотителем (1)



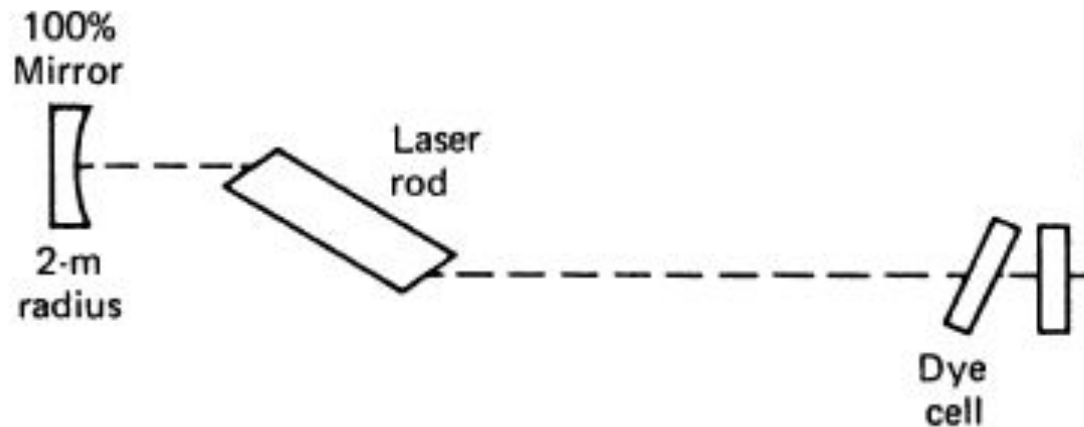
A. J. De Maria, D. A. Stetser, H. Heynau  
Appl. Phys. Lett. **8**, 174, 1966



Nd:glass  
first passively modelocked laser  
**Q-switched modelocked**



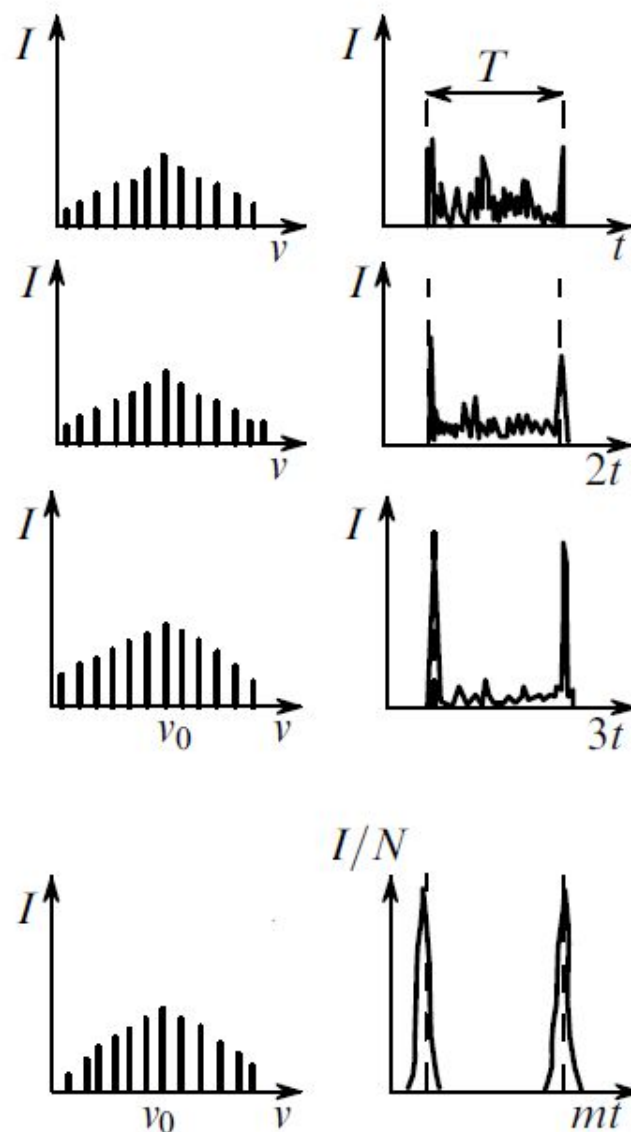
Flashlamp-pumped  
solid-state lasers

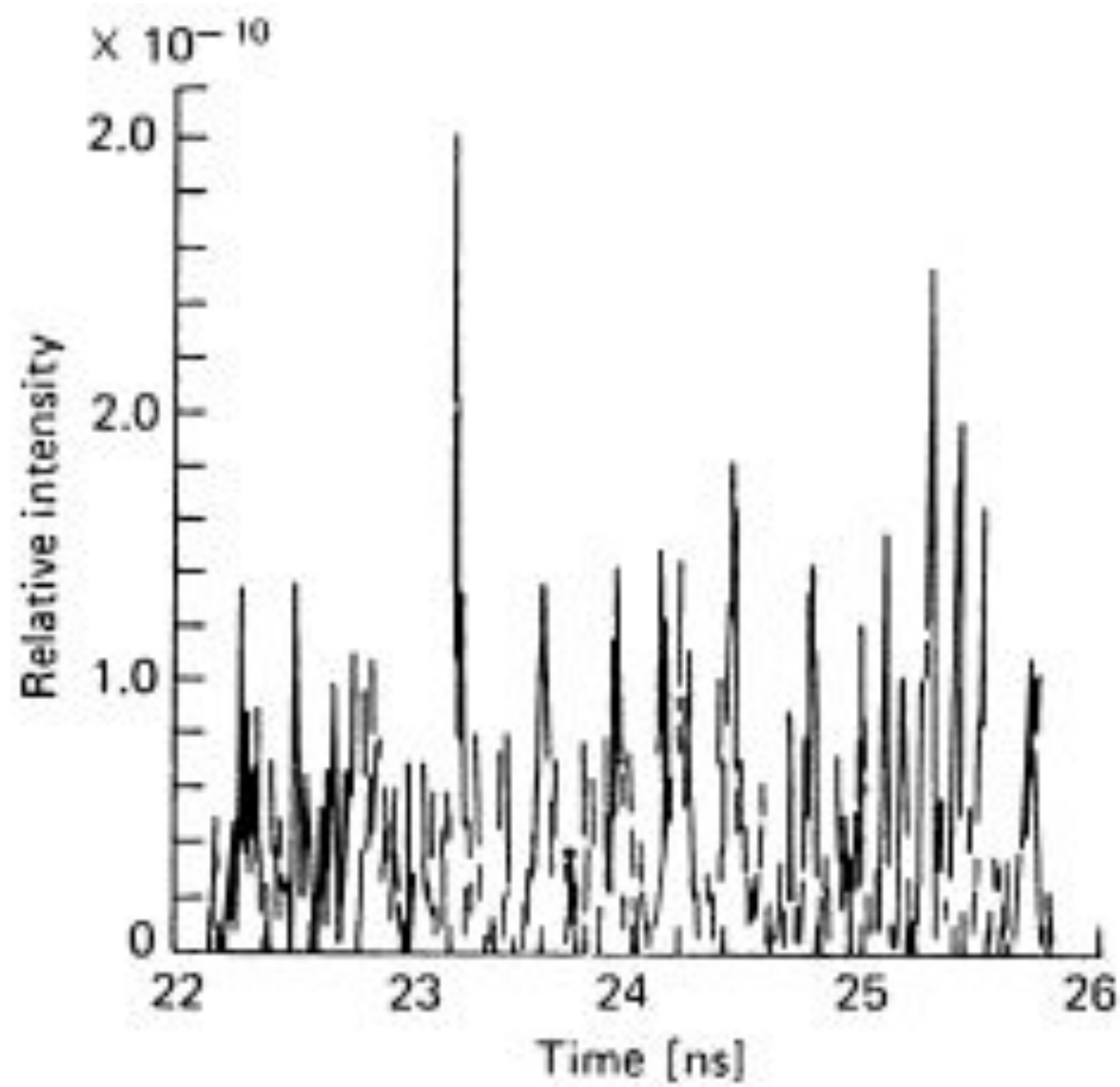


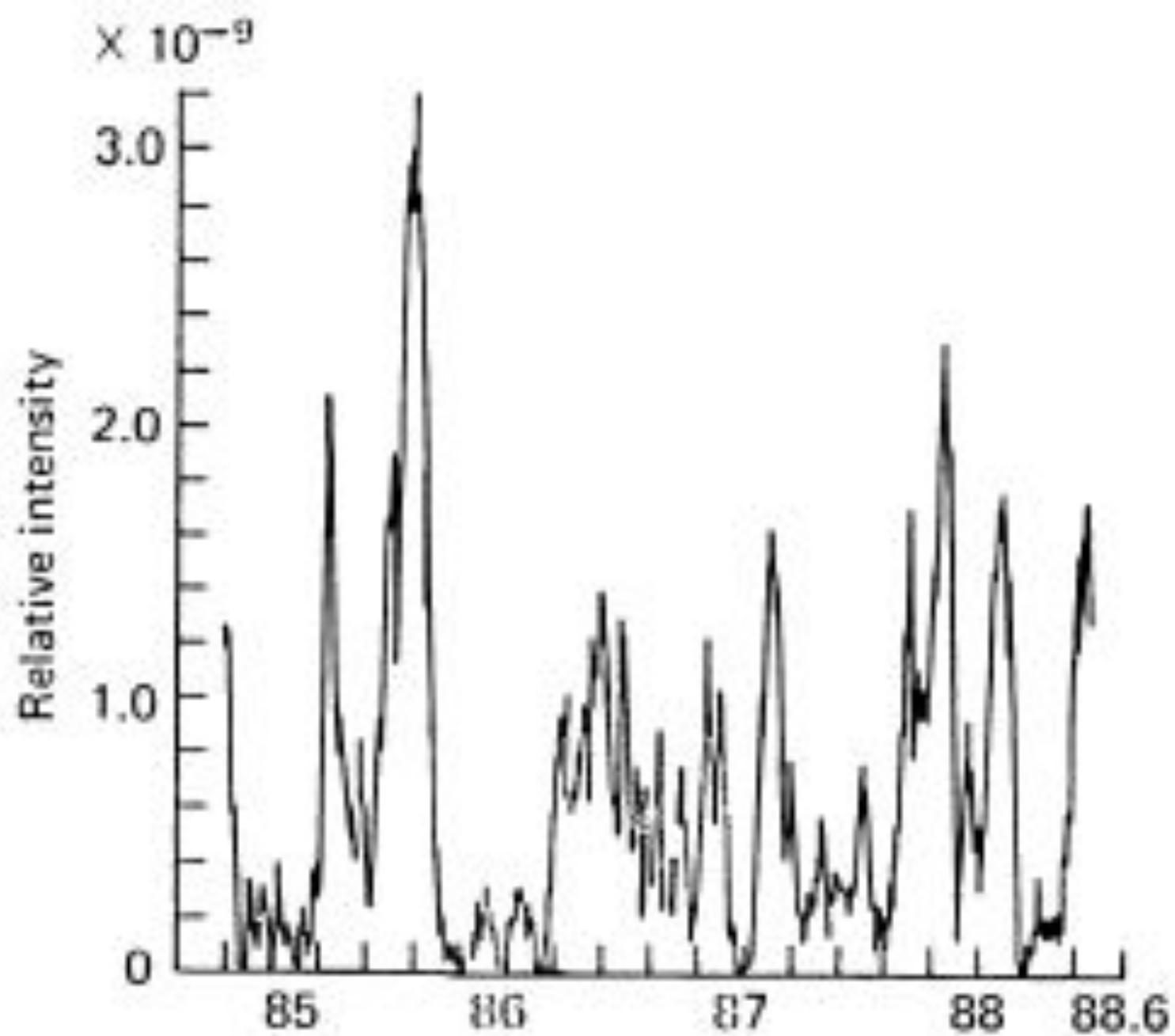
В шумоподобном сигнале присутствуют СКИ с длительностью  $\sim 1/\Delta\nu$

1. Стадия нелинейного поглощения. Усиление среды - линейно, а насыщающийся поглотитель способствует выделению лишь наиболее интенсивных флуктуаций

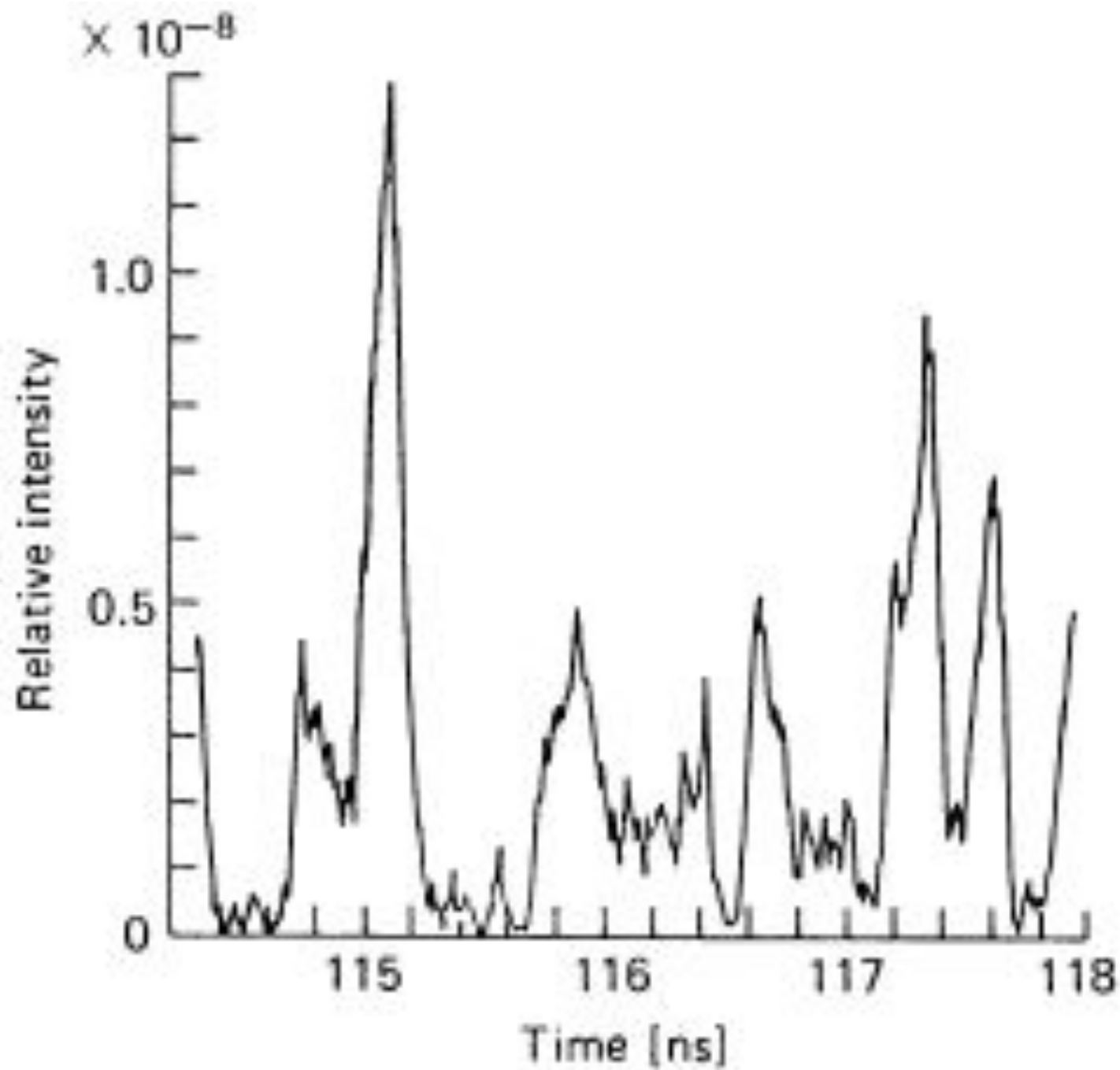
2. Стадия нелинейного усиления. Происходит съём инверсии наиболее интенсивными пиками - цугом СКИ и формирование результирующей формы СКИ (дисперсия и нелинейные эффекты в резонаторе)









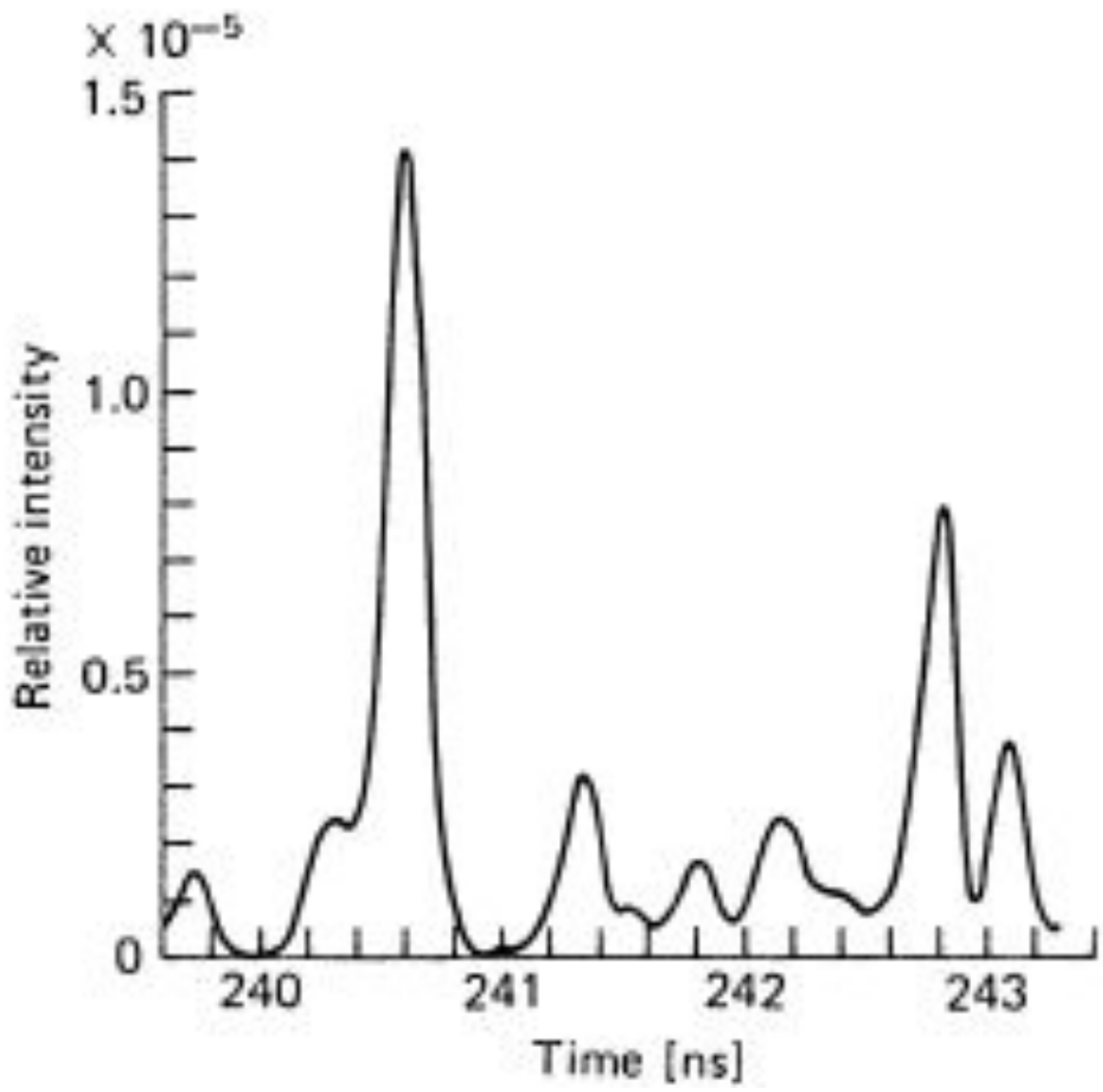


Я

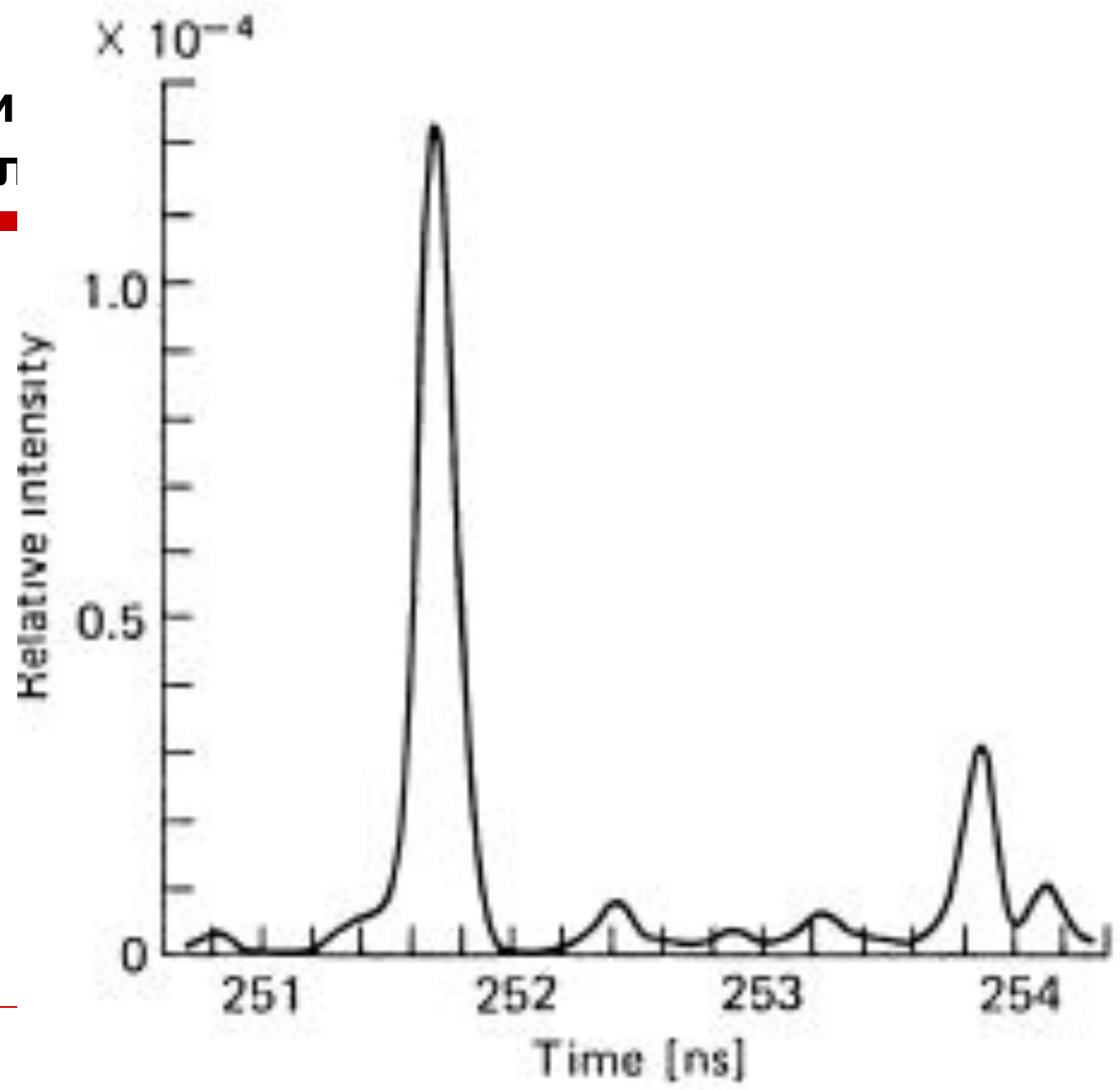
Си  
погл



ся



Си  
погл

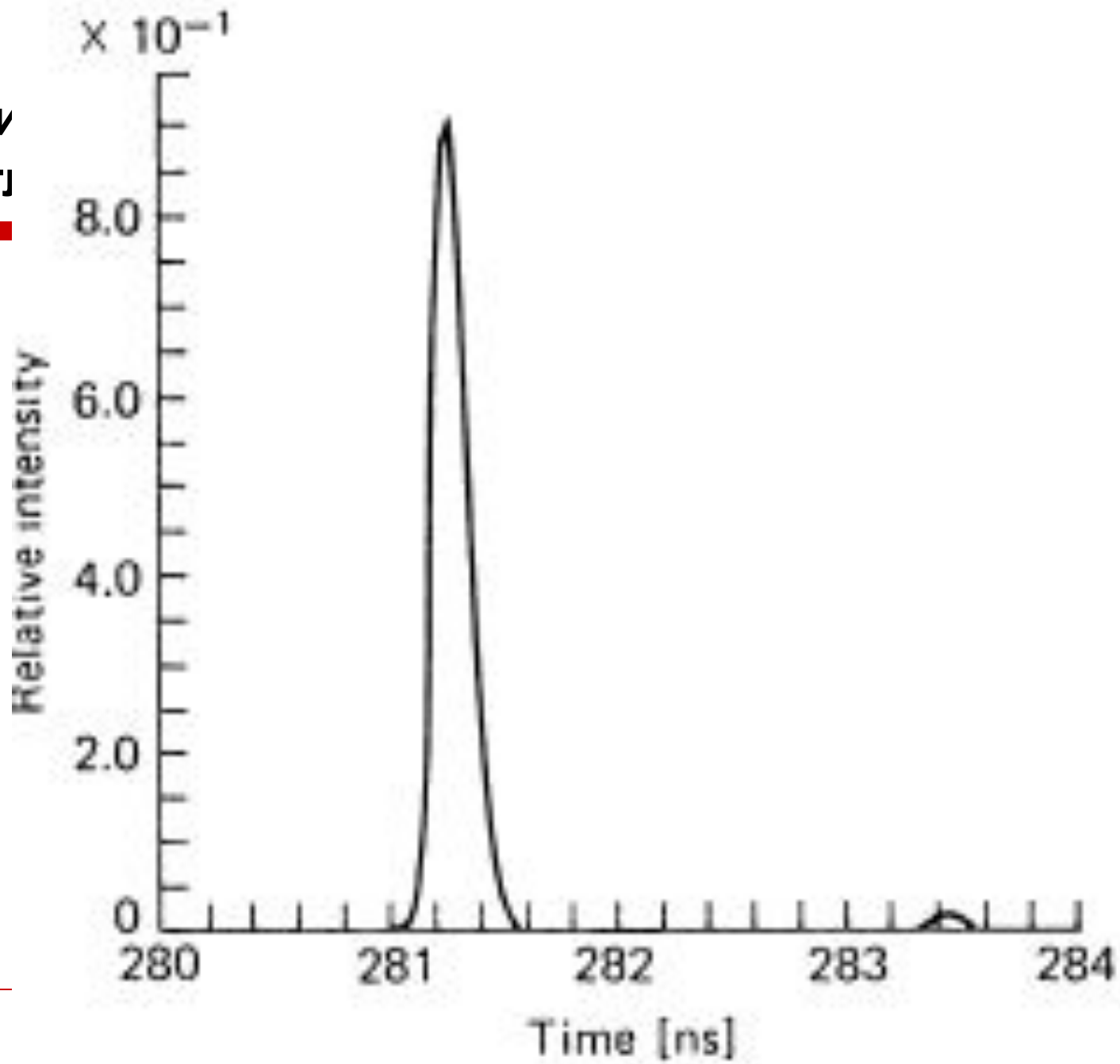


1



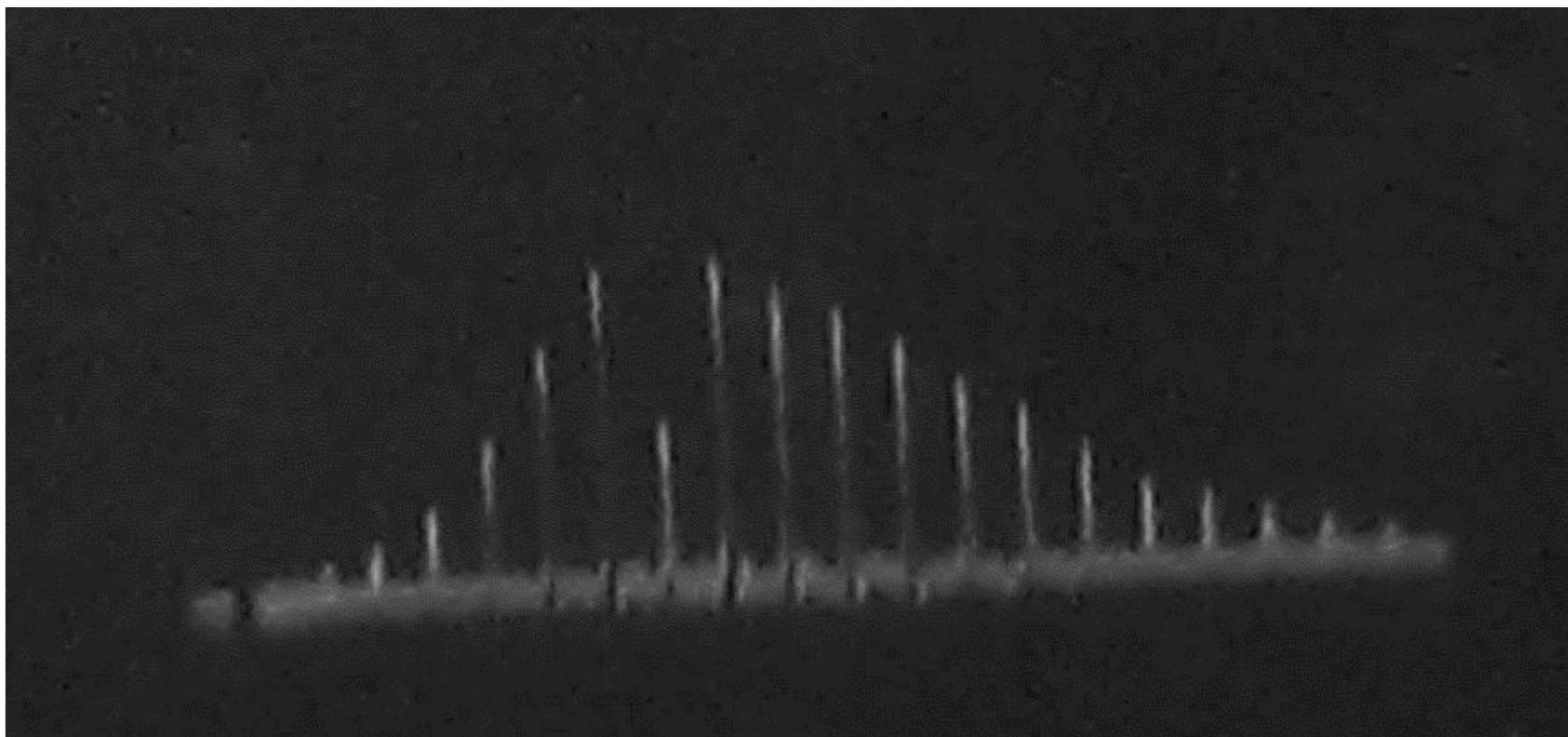
**C<sub>v</sub>**  
**пог**

**Я**



# Синхронизация мод в лазере с насыщающимся поглотителем

---



# Быстро релаксирующие нелинейные устройства

---

Режим работы лазера зависит от соотношения времени восстановления начального состояния просветляющейся среды и времени двойного прохода светом резонатора.

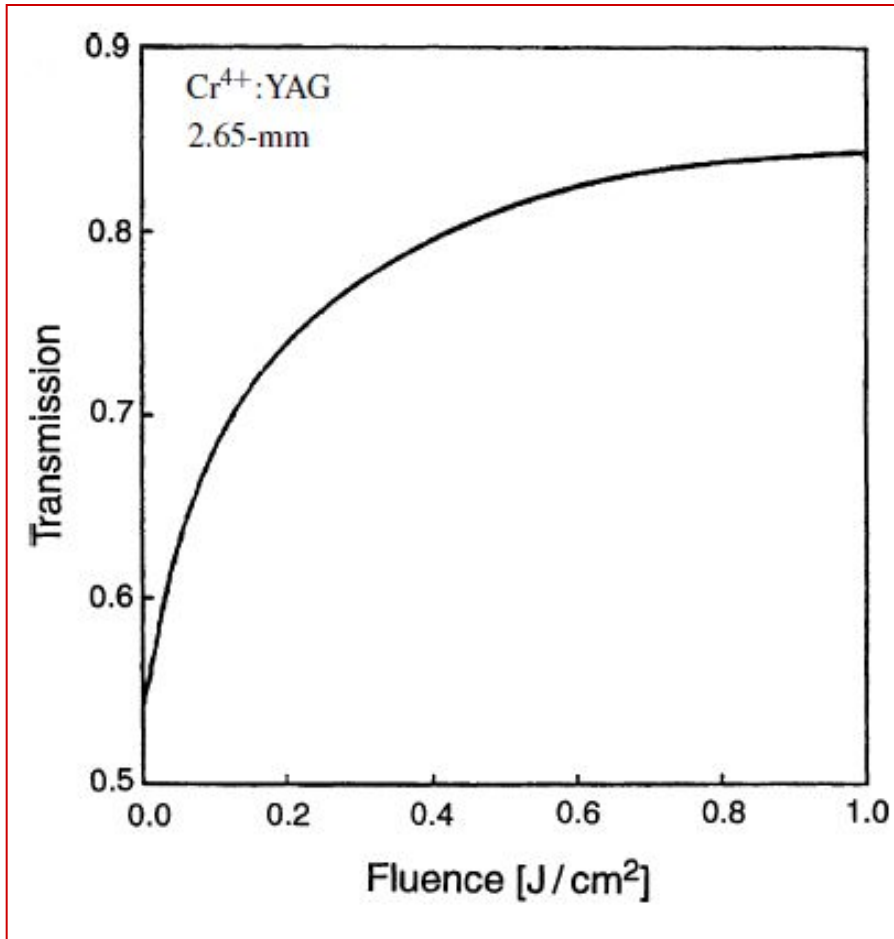
Если  $\tau \sim 2l/c$   Q-switch mode

Если  $\tau \sim 1/\Delta\nu$   режим самосинхронизации мод.



## Вспомним:

# Насыщающиеся поглотители (passive/saturable Q-switches)

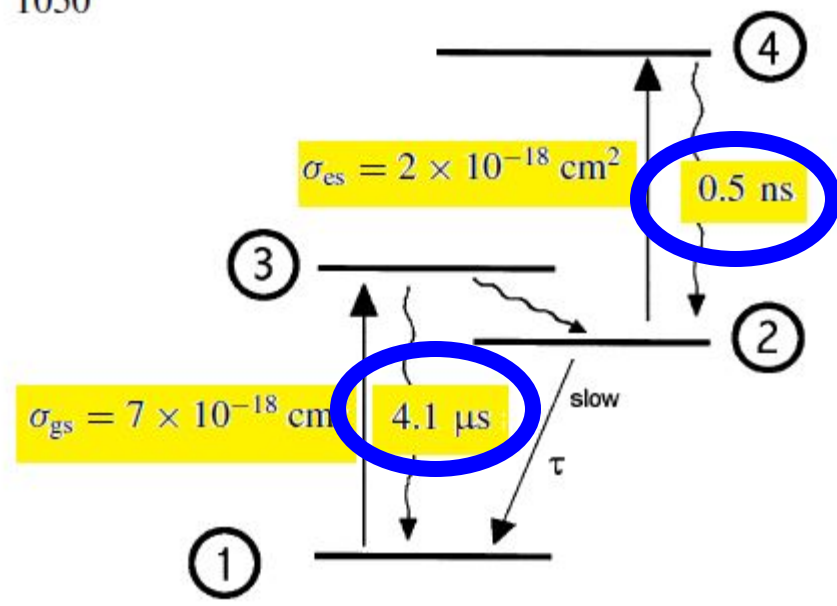


Cr<sup>4+</sup>:YAG

410  
480, nm  
640  
1050

Для YAG:Nd

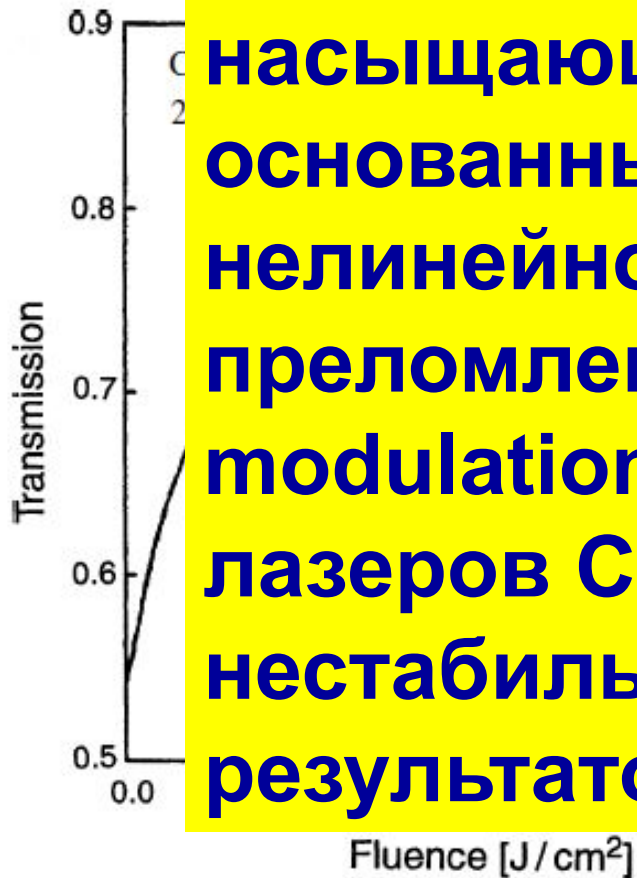
$E_s = 27 \text{ mJ/cm}^2$



*Вспомним:*

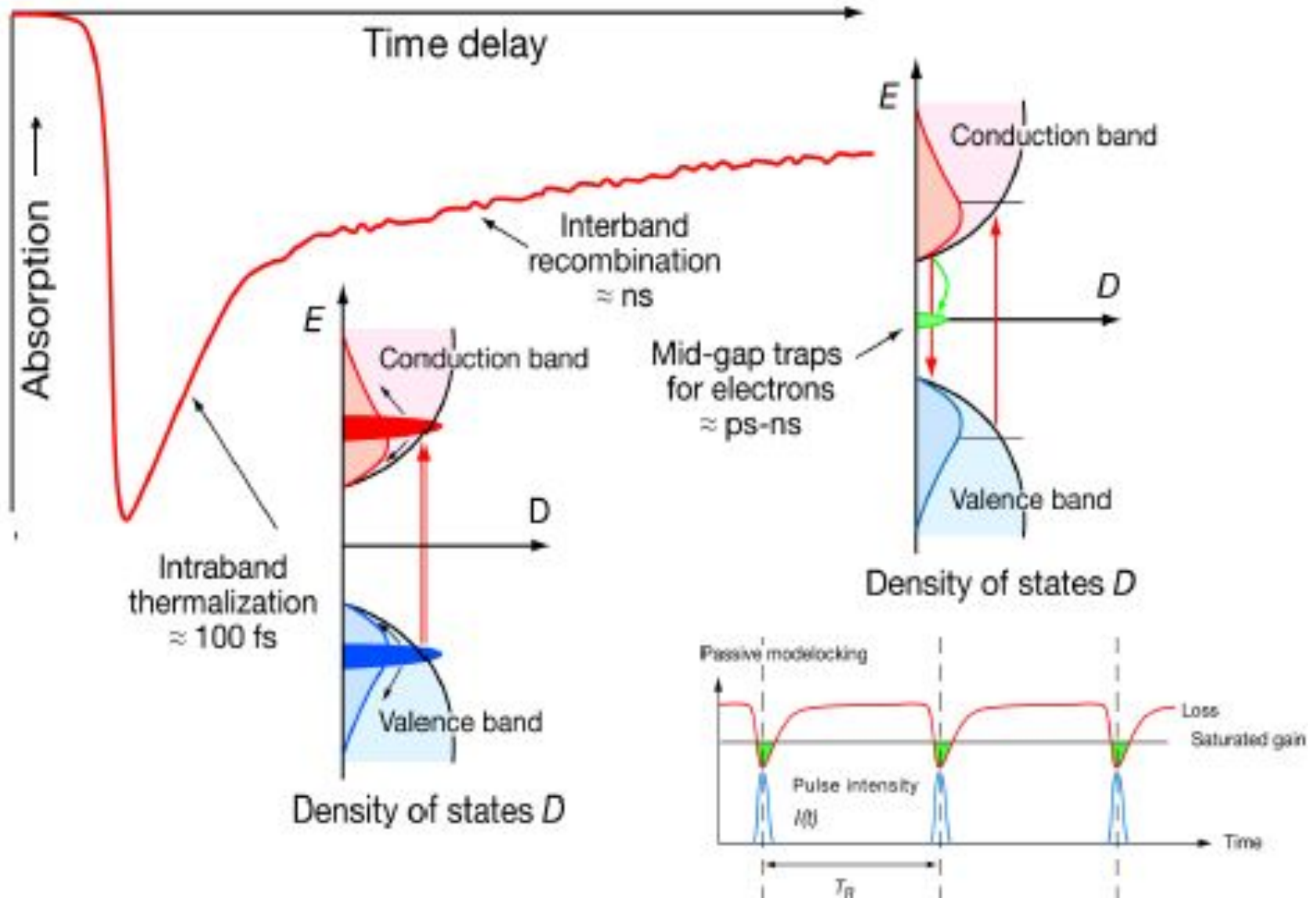
Насыщающиеся полупроводники (passive/ saturable)

**Вплоть до 1991 года, до появления быстрых насыщающихся устройств, основанных на керровской нелинейности показателя преломления (Kerr lens modulation, KLM), развитие лазеров СКИ сдерживалось нестабильностью получаемых результатов.**



# SEmiconductor Saturable Absorber

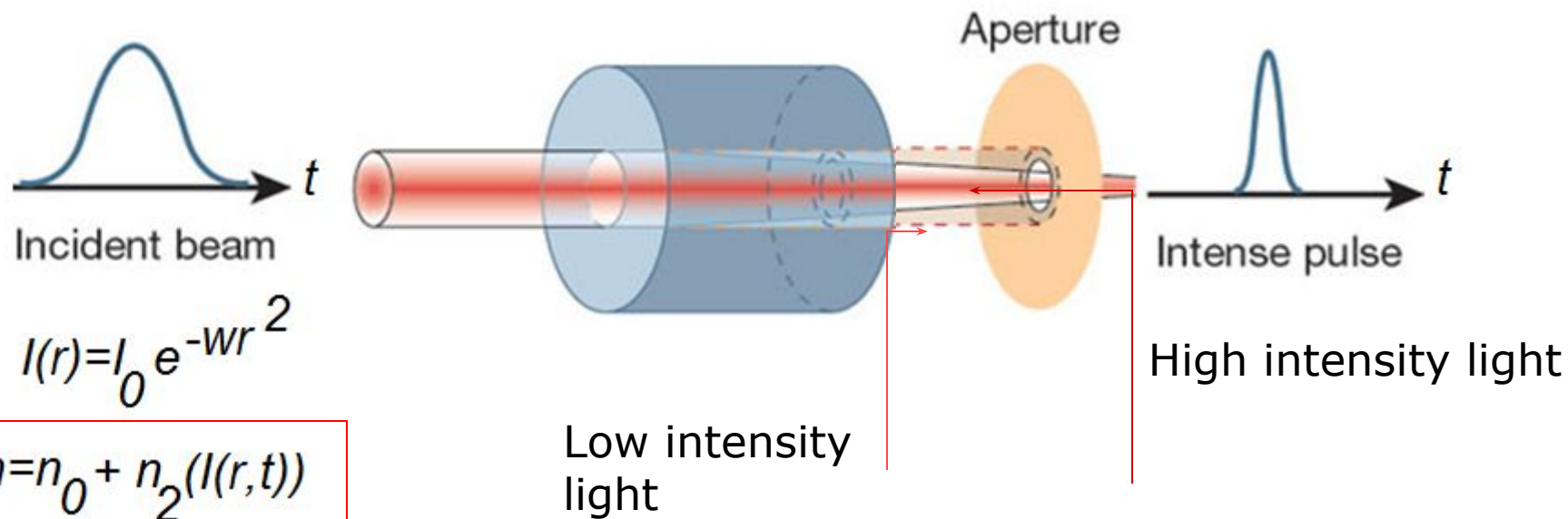
GaAs; AlInGaAs,  $\sim 10$  nm



# Быстро релаксирующие нелинейные устройства

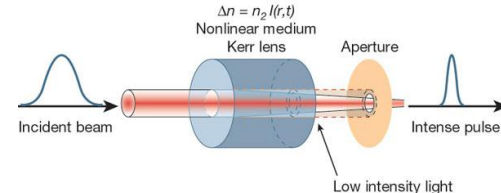
## Kerr lens mode locking (1)

---





# Kerr lens mode locking (2)



- Фокусное расстояние Керровской линзы для параболического профиля интенсивности

$$f = \frac{w^2}{4\gamma I_0 l}$$

Роль керровской среды часто выполняет активная среда.

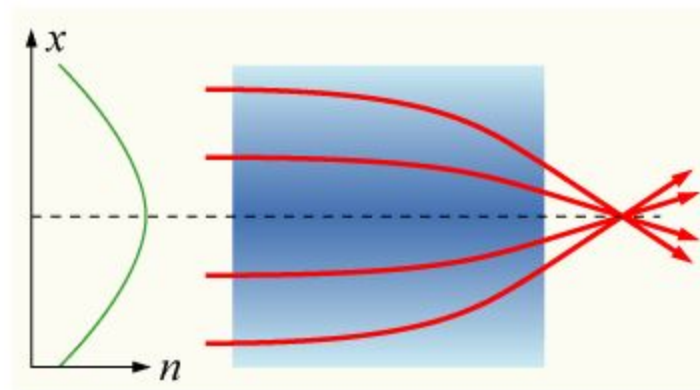
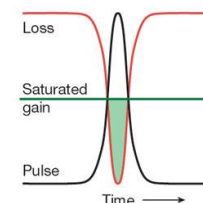
Для  $\text{Ti:Al}_2\text{O}_3$   $\gamma = 3.45 \times 10^{-16} \text{ cm}^2/\text{W}$

Пример: если область перетяжки (beam waist radius) в АЭ составляет  $50 \text{ }\mu\text{m}$ , то для  $I_0 = 150 \text{ kW}$  фокусное расстояние составит  $f = 24 \text{ cm}$  для длины АЭ  $4 \text{ mm}$

Важно: интенсивность падающего сигнала должна быть НИЖЕ порога самофокусировки

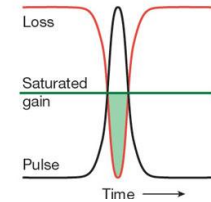
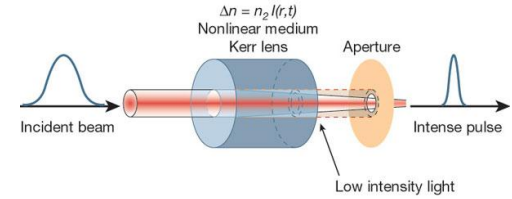
$$P_{\text{cr}} = \frac{a\lambda_0^2}{8\pi n_0 \gamma} \quad a \sim 3.77 \text{ — } 4$$

Обычно  $P_{\text{cr}} \sim 2 - 3 \text{ MW}$





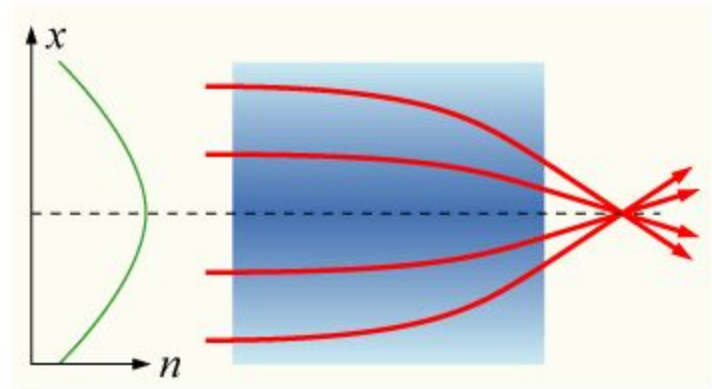
# Kerr lens mode locking (3)



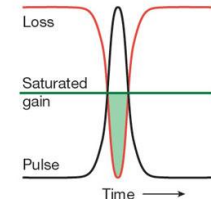
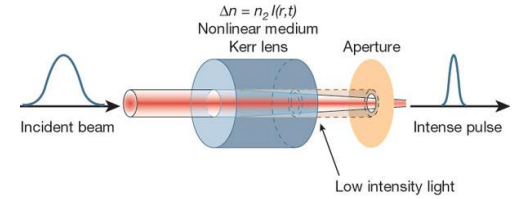
Потери в резонаторе чувствительны к доле площади пучка, обрезаемого диафрагмой при керровской фокусировке:

$$\delta = \delta_0 - \left( \frac{1}{w} \right) \frac{dw}{dP} P = \delta_0 + sP$$

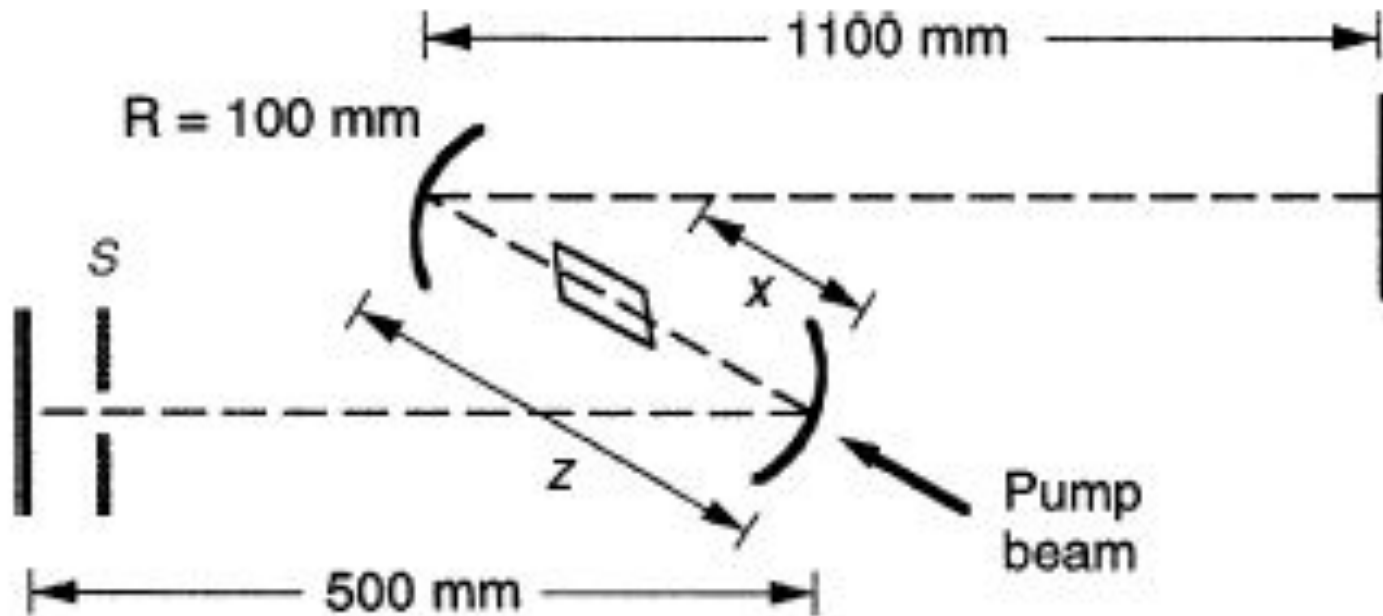
Конфигурация резонатора должна выбираться так, чтобы (a) размер перетяжки внутри керровской среды был мал (для обеспечения высокой плотности  $I$ ); (b) изменения оптической силы керровской линзы приводили к существенному изменению добротности резонатора – т.е. он должен находиться на границе области устойчивости.



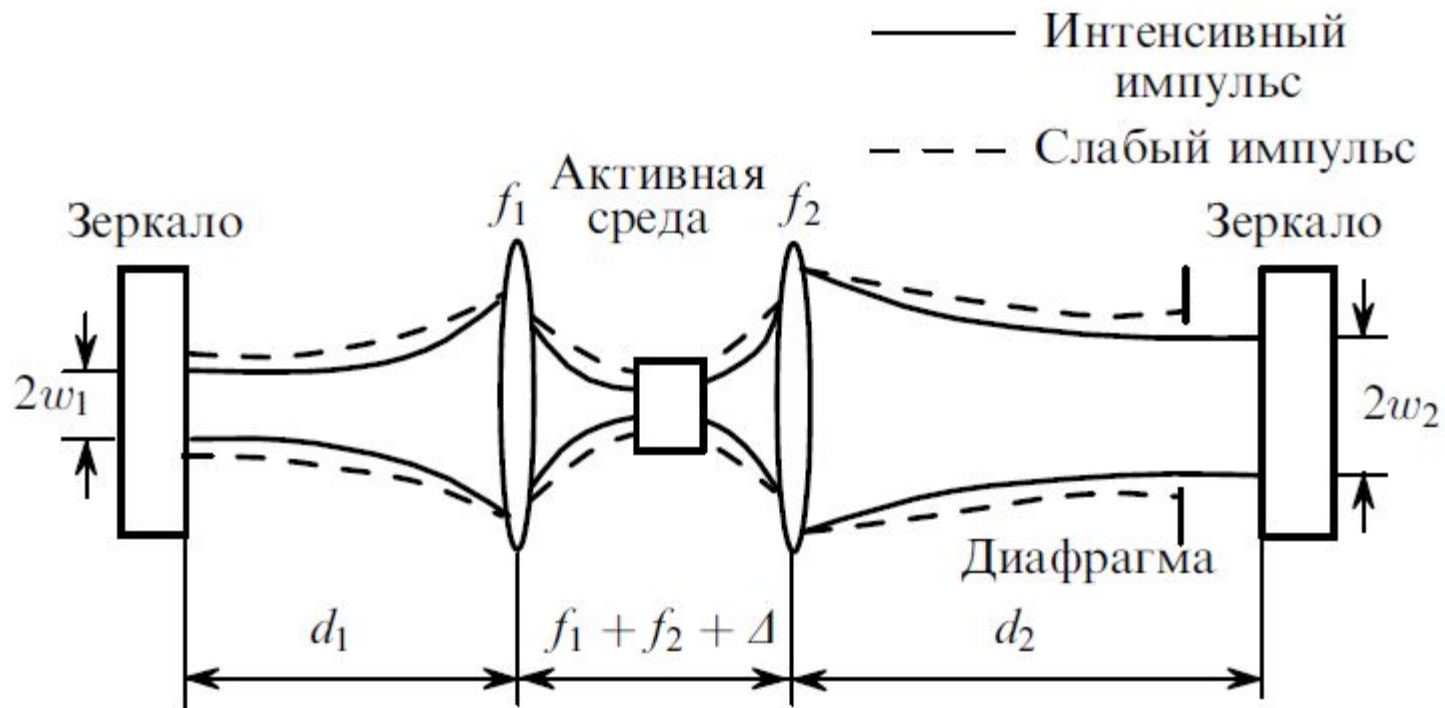
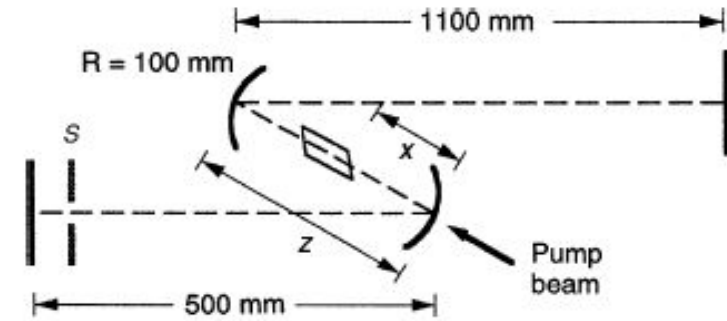
# Kerr lens mode locking (4)



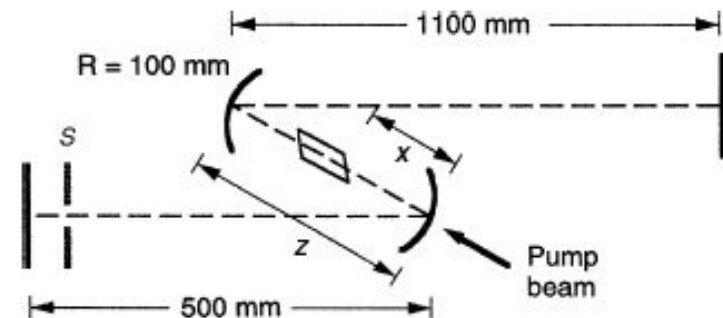
Простейший лазер СКИ с керровской линзой (Kerr lens mode locking, KLM)



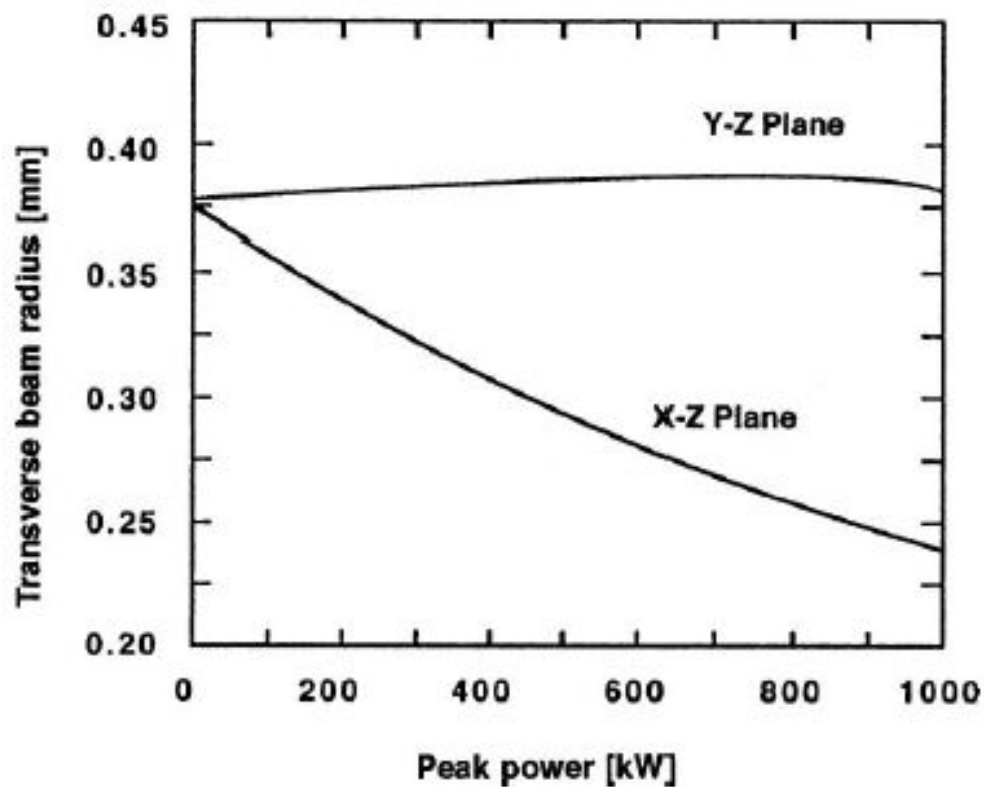
# Kerr lens mode locking (5)



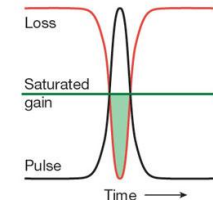
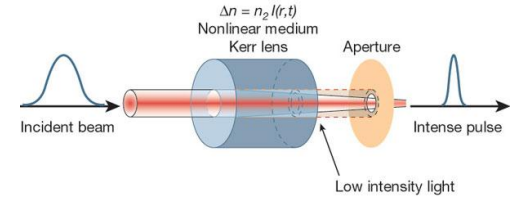
# Kerr lens mode locking (6)



Ситуация осложняется отсутствием осевой симметрии, т.к. в лазерах СКИ систематически используется наклон поверхностей раздела под углом Брюстера



# Kerr lens mode locking (7)

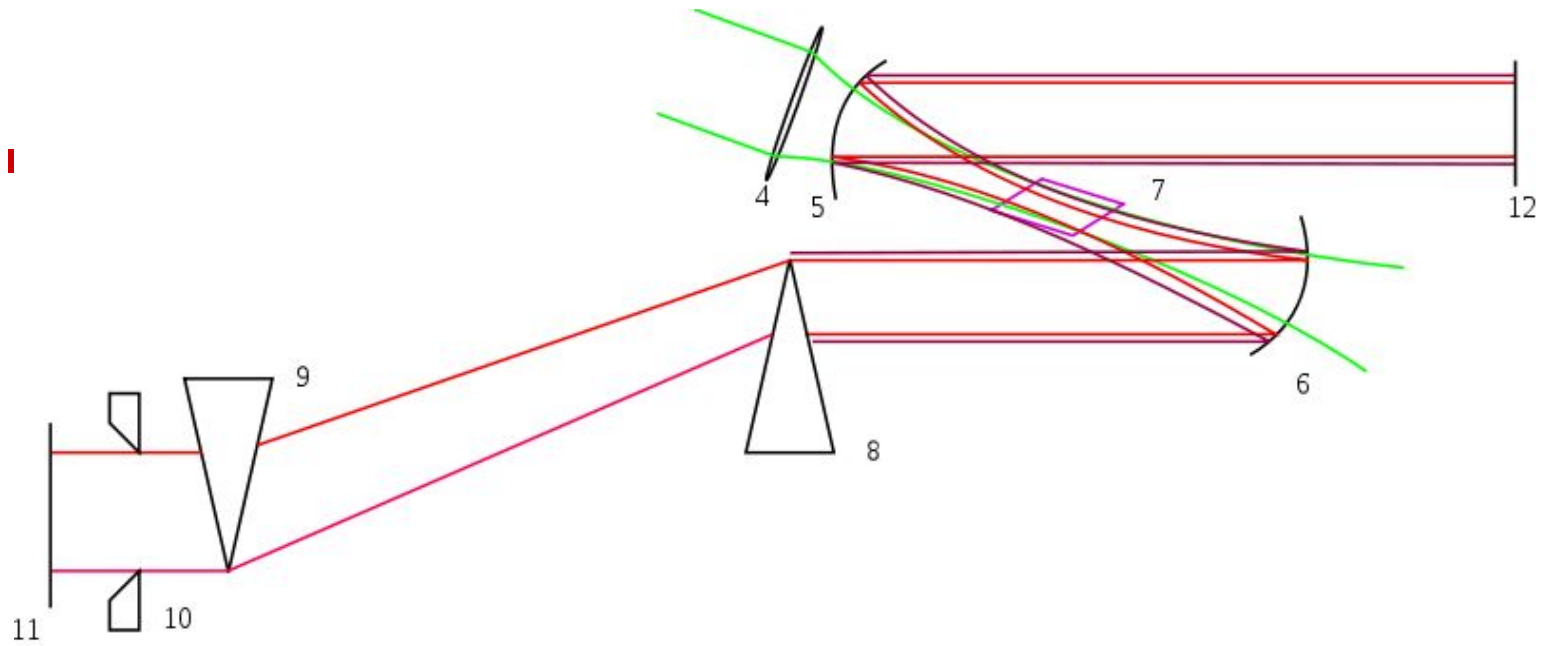


Проблема старта лазера СКИ на основе KLM: чтобы заработал Керр-эффект, уже нужен высокомоощный сверхкороткий импульс.

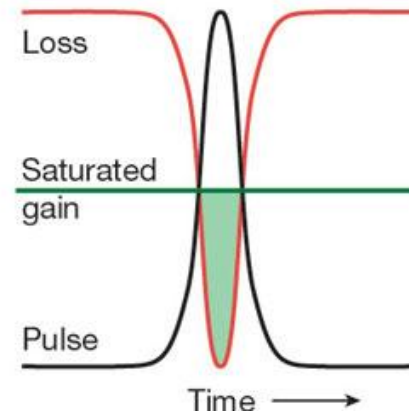
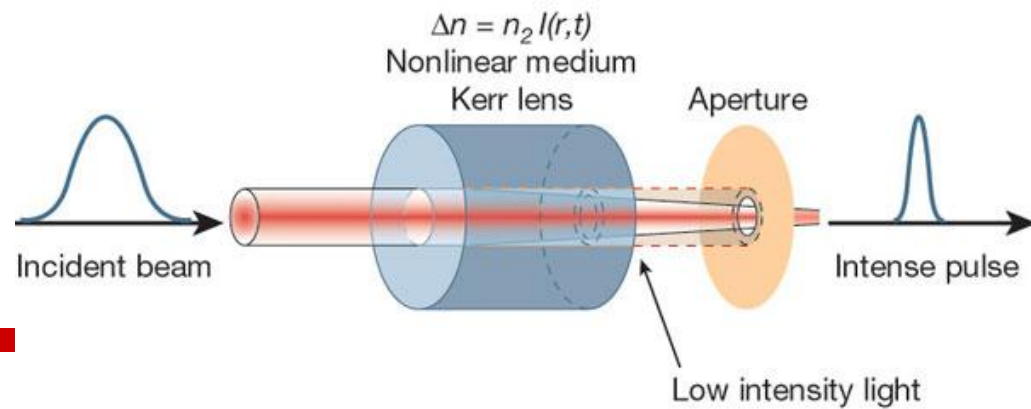
Решения:

- активная модуляция длины резонатора (зеркало на пьезокерамике)
- накачка лазера СКИ другим лазером СКИ (например,  $\text{Ti:Al}_2\text{O}_3$  накачивают mode-locked SH-YAG:Nd лазером)

# Kerr lens mode locking (9)

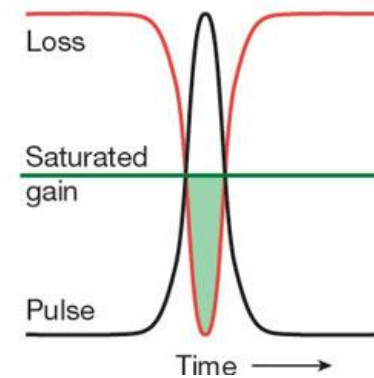
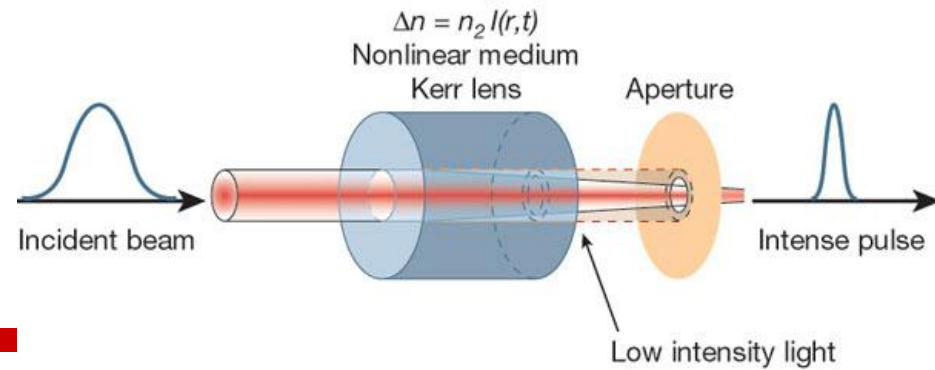






**Таким образом, в нашем распоряжении имеется насыщающийся поглотитель с нужными свойствами.**

**Однако прежде, чем переходить к описанию конструкции и работы лазеров СКИ, рассмотрим некоторые важные условия, необходимые для достижения предельно коротких длительностей импульсов, определяемых их спектральной шириной (Fourier-determined pulse duration).**



**И для развлечения: пусть бригада №5 к следующему занятию  
прореферирует статью  
N. Tolstik et al., “Kerr-lens mode-locked Cr:ZnS laser”,  
Opt. Lett. 38 (3), 299 (2013)**