



Математическое моделирование

Содержание

- Предмет математического моделирования. Основы моделирования.
- Понятие модели. Принцип моделирования. Моделирование как метод научного познания.
- Этапы моделирования. Характеристика 1 – 2 этапов.
- Этапы моделирования. Характеристика 3 – 4 этапов.
- Классификация моделей. Общий обзор.
- Классификация экономико-математических моделей.
- Этапы экономико-математического моделирования. Математическая модель.
- Линейное программирование.
- Постановка задачи линейного программирования.
- Геометрическая интерпретация и графическое решение задачи линейного программирования.
- Симплексный метод. Построение начального опорного плана. Симплексные таблицы.
- Симплексные таблицы. Признак оптимальности опорного плана.
- Понятие двойственности. Построение двойственных задач и их свойства.
- Транспортная задача. Построение исходного опорного плана.
- Транспортная задача. Метод потенциалов.

Содержание

- Основные понятия и определения теории графов.
- Упорядочение элементов орграфа. Алгоритм Фалкерсона.
- Решение задач о нахождении кратчайших путей в графе.
- Задача о максимальном потоке и ее приложения.
- Транспортная задача в сетевой постановке.
- Элементы сетевого планирования.
- Принципы динамического программирования, вычислительная процедура метода.
- Метод Монте-Карло. Суть метода.
- Решение задач методом Монте-Карло.
- Элементы теории матричных игр. Парные матричные игры с нулевой суммой.
- Методы решения матричных игр.
- Игры с природой. Критерии для принятия решения.
- Пакет Maple 7.
- Общий обзор пакета. Его возможности.
- Интерфейс программы, работа с командами. Использование переменных. Работа с таблицами.
-

Предмет математического моделирования. Основы моделирования

Математическое моделирование - это исследование явлений, процессов, систем или объектов путем построения и изучения их моделей и использования последних для определения или уточнения характеристик и рациональных способов построения вновь конструируемых технологических процессов, систем и объектов.

Математическая модель - это абстракция реального мира, в которой интересующие исследователя отношения между реальными элементами заменены подходящими отношениями между математическими категориями. Эти отношения, как правило, представлены в форме уравнений и (или) неравенств, характеризующих функционирование моделируемой реальной системы. Искусство построения математических моделей состоит в том, чтобы совместить как можно большую лаконичность в ее математическом описании с достаточной точностью модельного воспроизводства именно тех сторон анализируемой реальности, которые интересуют исследователя.

Моделирование - творческий процесс, требующий серьезной подготовки и переработки большого объема информации, сочетающий в себе трудоемкость и эвристические начала и носящий вероятностный характер.

Понятие модели. Моделирование как метод научного познания

Модель - это некоторое упрощенное подобие реального объекта, явления или процесса.

Модель - это такой материальный или мысленно представляемый объект, который замещает объект-оригинал с целью его исследования, сохраняя некоторые важные для данного исследования типичные черты и свойства оригинала.

Хорошо построенная модель, как правило, доступнее для исследования, чем реальный объект (например, такой, как экономика страны, Солнечная система и т.п.). Другое, не менее важное назначение модели состоит в том, что с ее помощью выявляются наиболее существенные факторы, формирующие те или иные свойства объекта. Модель также позволяет учиться управлять объектом, что важно в тех случаях, когда экспериментировать с объектом бывает неудобно, трудно или невозможно (например, когда эксперимент имеет большую продолжительность или когда существует риск привести объект в нежелательное или необратимое состояние).

Таким образом, можно сделать вывод, что модель необходима для того, чтобы:
понять, как устроен конкретный объект - каковы его структура, основные свойства, законы развития и взаимодействия с окружающим миром;

научиться управлять объектом или процессом и определить наилучшие способы управления при заданных целях и критериях (оптимизация);

прогнозировать прямые и косвенные последствия реализации заданных способов и форм воздействия на объект, процесс.

Этапы моделирования

Характеристика I этапа

I этап. Постановка задачи

Под задачей в самом общем смысле понимается некая проблема, которую надо решить. Главное - определить объект моделирования и понять, что собой должен представлять результат.

По характеру постановки все задачи можно разделить на две основные группы. К первой группе можно отнести задачи, в которых требуется исследовать, как изменяется характеристика объекта при некотором воздействии на него. Такую постановку задачи принято называть 'что будет, если...'. Вторая группа задач имеет такую обобщенную формулировку: какое надо произвести воздействие на объект, чтобы его параметры удовлетворяли некоторому заданному условию? Такая постановка задачи часто называется 'как сделать, чтобы...'.

Цели моделирования определяются расчетными параметрами модели. Чаще всего это поиск ответа на вопрос, поставленный в формулировке задачи.

Далее переходят к описанию объекта или процесса. На этой стадии выявляются факторы, от которых зависит поведение модели. При моделировании в электронных таблицах учитывать можно только те параметры, которые имеют количественные характеристики.

Иногда задача может быть уже сформулирована в упрощенном виде, и в ней четко поставлены цели и определены параметры модели, которые надо учесть.

При анализе объекта необходимо ответить на следующий вопрос: можно ли исследуемый объект или процесс рассматривать как единое целое или же это система, состоящая из более простых объектов? Если это единое целое, то можно перейти к построению информационной модели. Если система - надо перейти к анализу объектов, ее составляющих, определить связи между ними.

Этапы моделирования

Характеристика 2 этапа

II этап. Разработка модели

По результатам анализа объекта составляется информационная модель. В ней детально описываются все свойства объекта, их параметры, действия и взаимосвязи.

Далее информационная модель должна быть выражена в одной из знаковых форм. Учитывая, что мы будем работать в среде электронных таблиц, то информационную модель необходимо преобразовать в математическую. На основе информационной и математической моделей составляется компьютерная модель в форме таблиц, в которой выделяются три области данных: исходные данные, промежуточные расчеты, результаты. Исходные данные вводятся 'вручную'. Расчеты, как промежуточные, так и окончательные, проводятся по формулам, записанным по правилам электронных таблиц.

Этапы моделирования

Характеристика 3 этапа

III этап. Компьютерный эксперимент

Чтобы дать жизнь новым конструкторским разработкам, внедрить новые технические решения в производство или проверить новые идеи, нужен эксперимент. В недалеком прошлом такой эксперимент можно было провести либо в лабораторных условиях на специально создаваемых для него установках, либо на натуре, т.е. на настоящем образце изделия, подвергая его всяческим испытаниям. Это требует больших материальных затрат и времени. В помощь пришли компьютерные исследования моделей. При проведении компьютерного эксперимента проверяют правильность построения моделей. Изучают поведение модели при различных параметрах объекта. Каждый эксперимент сопровождается осмыслением результатов. Если результаты компьютерного эксперимента противоречат смыслу решаемой задачи, то ошибку надо искать в неправильно выбранной модели или в алгоритме и методе ее решения. После выявления и устранения ошибок компьютерный эксперимент повторяется.

Этапы моделирования

Характеристика 4 этапа

IV этап. Анализ результатов моделирования

Заключительный этап моделирования - анализ модели. По полученным расчетным данным проверяется, насколько расчеты отвечают нашему представлению и целям моделирования. На этом этапе определяются рекомендации по совершенствованию принятой модели и, если возможно, объекта или процесса.

Классификация моделей

Классификация по области использования

Учебные: наглядные пособия, различные тренажеры, обучающие программы.

Опытные: уменьшенные или увеличенные копии исследуемого объекта для дальнейшего его изучения (модели корабля, автомобиля, самолета, гидростанции).

Научно-технические модели создают для исследования процессов и явлений (стенд для проверки телевизоров; синхротрон - ускоритель электронов и др.).

Игровые: военные, экономические, спортивные, деловые игры.

Имитационные: отражают реальность с той или иной степенью точности (испытание нового лекарственного средства в ряде опытах на мышах; эксперименты по внедрению в производство новой технологии).

Классификация с учетом фактора времени

Статическая модель - модель объекта в данный момент времени.

Динамическая модель позволяет увидеть изменения объекта во времени.

Классификация моделей

Классификация по способу представления

Материальная модель - это физическое подобие объекта. Они воспроизводят геометрические и физические свойства оригинала (чучела птиц, муляжи животных, внутренних органов человеческого организма, географические и исторические карты, схема солнечной системы).

Информационная модель - это совокупность информации, характеризующая свойства и состояния объекта, процесса, явления, а также взаимосвязь с внешним миром.

Любая информационная модель содержит лишь существенные сведения об объекте с учетом той цели, для которой она создается. Информационные модели одного и того же объекта, предназначенные для разных целей, могут быть совершенно разными.

Вербальная модель - информационная модель в мысленной или разговорной форме.

Знаковая модель - информационная модель, выраженная специальными знаками, т.е. средствами любого формального языка. Знаковые модели - это рисунки, тексты, графики, схемы, таблицы и т.д.

Компьютерная модель - модель, реализованная средствами программной среды.

Прежде чем построить модель объекта (явления, процесса), необходимо выделить составляющие его элементы и связи между ними (провести системный анализ) и 'перевести' полученную структуру в какую-либо заранее определенную форму - формализовать информацию.

Формализация - это процесс выделения и перевода внутренней структуры предмета, явления или процесса в определенную информационную структуру - форму.

Математические модели

Математическая модель - совокупность математических зависимостей, отражающая в явной форме сущность объекта, процесса или явления, т.е. все существенные параметры исследуемого объекта связаны системой математических уравнений.

Математическое моделирование - это важнейший метод современного научного исследования, основной аппарат системного анализа.

Математическое моделирование - это изучение поведения объекта в тех или иных условиях путем решения уравнений его математической модели.

Математическое моделирование:

- позволяет осуществить с помощью одного устройства (ЭВМ) решение целого класса задач, имеющих одинаковое математическое описание;
- обеспечивает простоту перехода от одной задачи к другой, позволяет вводить переменные параметры, возмущения и различные начальные условия;
- дает возможность проводить моделирование по частям («элементарным процессам»), что особенно существенно при исследовании сложных объектов;
- экономичнее метода физического моделирования как по затратам, так и по стоимости.

Этапы построения математических моделей

- 1) построение математического описания;
- 2) исследование математической модели;
- 3) принятие оптимальных решений.

Построение модели в общем случае включает:

- составление математического описания;
- решение уравнений математического описания (аналитическое либо путем создания моделирующего алгоритма);
- проверку адекватности модели;
- окончательный выбор модели (при наличии нескольких моделей).

Методы получения математической модели:

**Эмпирический
(экспериментально-
статистический, метод «черного
ящика»)**

- используется, когда процесс мало изучен, или ничего неизвестно о его природе. Позволяет получить описание действующего объекта без исследования его внутренней структуры

**Экспериментально-аналитический
(феноменологический)**

- при использовании этого метода используется декомпозиция сложного явления, определяются элементарные процессы, которые можно исследовать более доступными способами

Теоретический (структурный)

- составление модели на основе детального изучения и глубокого понимания закономерностей протекающих процессов. Составленное математическое описание дает возможность с большой точностью предсказывать результаты протекания процесса в заданных условиях

Комбинированный

- при составлении математического описания используется сразу несколько методов

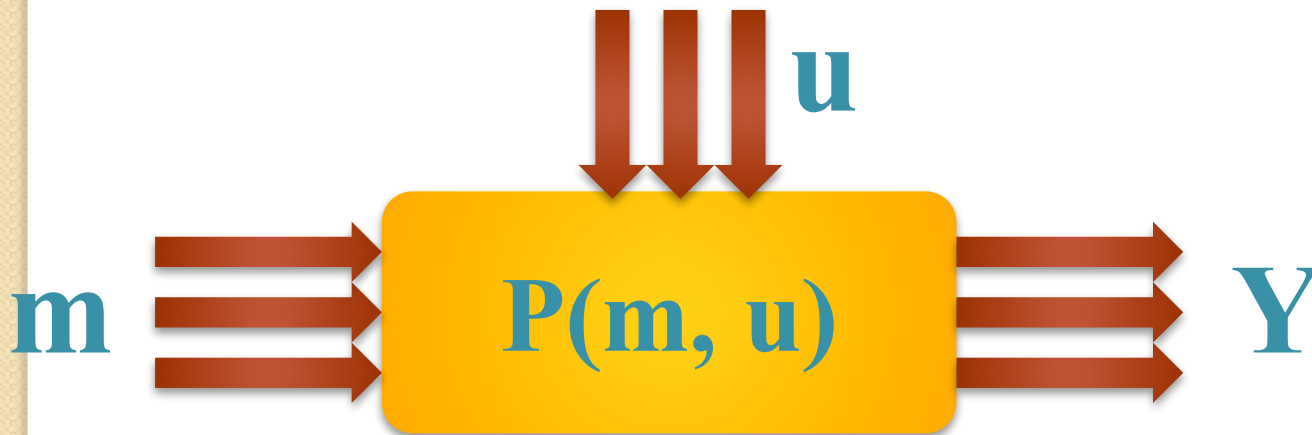
Классификация математических методов и моделей

Критерии классификации:

- I. Классификация по целям моделирования
- II. Классификация по принципам моделирования
- III. Классификация по критериям оценки
- IV. Классификация по условиям принятия решений
- V. Классификация решений по уровням или функциям управления
- VI. Классификация по управляемости системы
- VII. Классификация по фактору времени
- VIII. Классификация по степени абстрактности моделей
- IX. Классификация по виду используемых функций
- X. Классификация по дискретности
- XI. Классификация по степени учета вероятностных факторов

I. Классификация по целям моделирования

Модели описания. Это разомкнутые модели, предполагающие построение описания объекта или процесса P , содержащего функциональные или алгоритмические связи между входами (m, u) и выходами Y . Входами являются внешние воздействия на объект (неуправляемые и управляемые), выходами - реакция объекта (процесса).



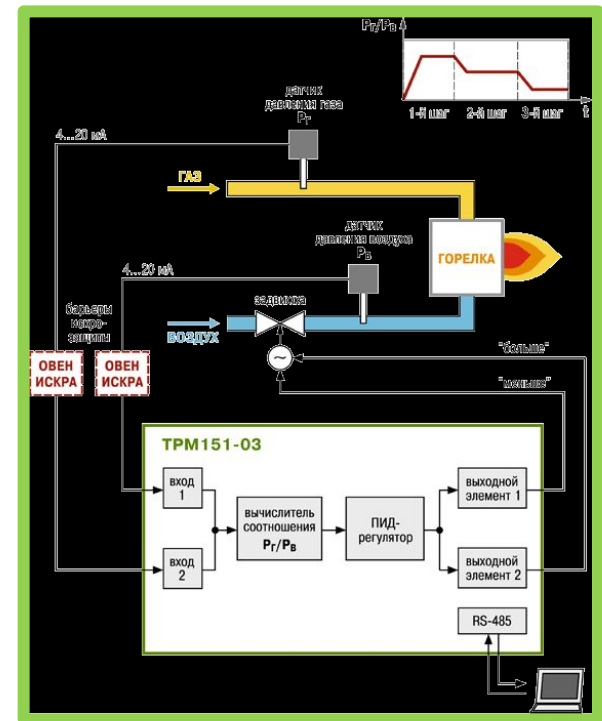
I. Классификация по целям моделирования

Модели оценки. В этом случае на характеристики связей между входами и выходами объекта (процесса) накладываются укрупненные технологические или экономические характеристики, связывающие его с внешней средой, что позволяет оценить те или иные состояния комплекса «объект — орган управления — среда».

С этой целью принято использовать целевые функции управляемого объекта (иногда функции качества состояния), это некоторая зависимость $G=G(m, u)$ (которая может быть векторной функцией G), где m - управляемые переменные; u — неуправляемые воздействия среды.

I. Классификация по целям моделирования

Модели оптимизации. Предполагают постановку оптимизационной задачи, например, определить такое значение $m^* \in M$, которое обеспечивает максимум $G=G(m, u)$ при известном u . Множество альтернатив задается ограничениями $m \in M$ - допустимых значений управляемых переменных. Иногда известны только пределы изменения неуправляемых переменных



II. Классификация по принципам моделирования

Кибернетические модели. Предполагается более или менее точное знание структуры системы (объекта или процесса), оператор $Y=P(m, u)$ представляет собой функцию, систему уравнений (например обыкновенных дифференциальных, конечно-разностных или рекурсивных), автомат или какой-либо другой подходящий абстрактный объект-аналог исследуемой системы.

При различных начальных условиях, внешних воздействиях (управляемых — m и неуправляемых — u) данные модели позволяют получить реакцию Y с целью последующей оценки стратегий или оптимизации управления.

II. Классификация по принципам моделирования

Статистические модели. Здесь применяется обратный подход - восстановление структуры систем (первоначально это - «черный ящик») по ее реакциям на внешние воздействия («справа налево»). Иногда такие операции называют идентификацией системы. Обычно это статистические методы, предполагающие наличие объективно обусловленной связи между m и Y , «зашумленной» случайными воздействиями u .

Эти методы многомерного статистического анализа включают:

- корреляционный анализ;
- регрессионный анализ;
- дисперсионный анализ;
- факторный анализ.

II. Классификация по принципам

моделирования

Наблюдения за входами и выходами системы могут быть:

Пассивными

- Производится сбор и анализ информации о состоянии параметров объекта без специального изменения входных параметров процесса.

- Достоинства - практически полностью отсутствуют затраты на эксперимент.

- Недостатки:

- 1. В нормальных условиях эксплуатации колебания параметров невелики и поэтому экспериментальные точки близки друг к другу. В этих условиях

- ~~Заточенности~~ ~~вписания~~ ~~целенаправленного~~ ~~исследования~~ ~~исходных~~ ~~параметров~~ ~~процесса~~.

- Достоинства: простота описания; доступность получения моделей; возможность построения модели при отсутствии теории процесса.

- Недостатки:

- невозможность применения модели для режимов, для которых не проводились измерения;

- невозможность применения модели при переходе к другим объектам,

Активными

III. Классификация по критериям оценки

Модели оценки и оптимизации предполагают использование некоторого критерия (или критериев) $G = G(m, u)$.

Критерий оптимальности — показатель, выражающий меру экономического эффекта принимаемого решения для сравнительной оценки возможных решений (альтернатив) и выбора наилучшего из них.

Модели с векторным критерием оценки. Критерий часто оказывается векторным, т. е. включает множество показателей, иногда противоречащих друг другу.

Модели со скалярным критерием оценки.

Многообразие критериев оценки создает ряд проблем, которые решаются двояко:

- один из критериев объявляется главным (глобальным), а все остальные используются в качестве ограничений (в этом обычно заключается постановка и решение задачи математического программирования);
- ставится задача скаляризации векторного критерия (приведения его к скаляру).

IV. Классификация по условиям принятия решений

- Принятие решений в условиях определенности, если $G = G(m, u)$ известна и u - фиксирована (детерминированная модель объекта);
- Принятие решений в условиях риска, здесь функция $G = G(m, u)$ известна, а внешние неуправляемые переменные ($u \in U$) являются случайными величинами с известными законами распределения (стохастическая, или вероятностная модель);
- Принятие решений в условиях конфликта, $G = G(m, u)$ известна, $u \in U$ - выход враждебно настроенной системы (например, игровая модель),
- Принятие решений в условиях неопределенности – $G = G(m, u)$ неточно известна или не полностью построена (формализована), либо нет информации об u или U .

V. Классификация решений по уровням или функциям управления

Принято выделять следующие уровни управления:

- **целеобразование (целеполагание)** — определение цели системы (формально — целевой функции и ограничений);
- **организация** — структурообразование, построение такой структуры системы, которая наилучшим образом удовлетворяет поставленным целям;
- **планирование** — определение желаемого состояния системы и путей его достижения;
- **контроль** — анализ отклонений реального протекания процесса от плановых характеристик.

V. Классификация решений по уровням или функциям управления

Данные уровни управления обладают следующими взаимными свойствами (при перемещении «снизу вверх»):

- период принятия решения увеличивается;
- задачи, решаемые на уровнях, становятся все более неопределенными и слабоформализуемыми;
- решения, принятые на более высоком уровне, образуют критерии и ограничения для нижерасположенных уровней, очевидно, что цель системы определяет ее структуру и методы планирования.

VI. Классификация по управляемости системы

- **Организация** жестко регламентируется уставом и иерархией подчинения (идеальный образец этого — армия). Экономические отношения здесь аттестуются коротко и ясно -коррупция и продажность.
- **Экономика**, наоборот, совокупность свободно взаимодействующих целеустремленных индивидов (идеальный пример здесь — рыночное взаимодействие мелких производителей в эпоху первоначального капитализма). Организационные отношения здесь также нелицеприятно аттестуются -преступный сговор с целью установления высоких (низких) цен.
- В связи с этим целесообразно классифицировать модели и по данному принципу — **модели экономики** (децентрализация управления, диффузные, многосвязные, многоцелевые системы) и **модели организации** (централизация управления, одноцелевые системы).

VII. Классификация по фактору времени

- **Статические модели** или модели статических систем — предполагают, что переменные или координаты ее состояния на изучаемом отрезке времени остаются неизменными.
- **Динамические модели** — модели системы, которые изменяются во времени (в отличие от статической системы). Математически это принято выражать через переменные (координаты), изменяющиеся во времени. Процесс изменения характеризуется траекторией (т. е. наборами координат, каждая из которых является функцией времени).

VIII. Классификация по степени абстрактности моделей

- **Аналитические модели** представляют собой некоторые математические соотношения, выраженные в общей форме, предполагающие аналитический метод решения, поиски максимума, интегрирования дифференциального уравнения или систем, исследования на устойчивость и пр.
- **Вычислительные модели.** Предполагают использование вычислительных средств для решения аналитических моделей высокой размерности или с использованием функций, которые удобнее представлять в табличной форме (кусочно-постоянная или кусочно-линейная аппроксимация), нежели аналитически. Используют численные методы (интегрирования дифференциальных уравнений, поиска экстремумов, решения систем уравнений и пр.). Являются переходными к имитационным моделям.

VIII. Классификация по степени абстрактности моделей

- **Имитационные модели.** Реализация наиболее сложных и громоздких алгоритмов описания сложных систем, включающих случайные процессы, дифференциальные, конечно-разностные, интегральные и рекурсивные уравнения.
- Фактически, это экспериментальный метод изучения объекта с помощью ЭВМ.
- Процесс имитации заключается в следующем: сначала строится математическая модель изучаемого объекта (имитационная модель), затем эта модель преобразуется в программу для ЭВМ. В машину вводятся необходимые данные и ведется наблюдение за тем, как изменяются интересующие исследователя показатели: они подвергаются анализу, в частности статистической обработке.

VIII. Классификация по степени абстрактности моделей

- **Статистическое моделирование** — разновидность имитационного моделирования, способ исследования процессов поведения вероятностных систем в условиях, когда неизвестны внутренние взаимодействия в этих системах.
- Заключается в машинной имитации изучаемого процесса, который как бы копируется на вычислительной машине со всеми сопровождающими его случайностями; используется главным образом при решении задач исследования операций, в анализе производственной деятельности.
- Один из наиболее распространенных *методов статистических испытаний* — *метод Монте-Карло*. Смысл метода Монте-Карло состоит в том, что исследуемый процесс моделируется путем многократных повторений его случайных реализаций. Единичные реализации называются статистическими испытаниями — отсюда второе название метода.

IX. Классификация по виду используемых функций

- **Линейные модели** — тип моделей, в основе которых лежат линейные зависимости, связывающие вход системы с выходом или целевую функцию с выходными переменными.
- В прикладных математических моделях, линейные зависимости обычно вводятся для упрощения модели путем замены реально наблюдаемых нелинейных зависимостей (линеаризация).
- К линейным прежде всего относятся методы и модели линейного программирования.
- **Нелинейные модели.** В данном типе моделей либо учитываются действительные нелинейные связи между факторами или переменными, либо используются более реалистичные, нежели линейные, методы аппроксимации нелинейных зависимостей (квадратичные, логарифмические, показательные функции).

Х. Классификация по дискретности

- **Дискретные модели** относятся к системам, все элементы которых, а также связи между ними (т. е. обращающаяся в системе информация) имеют дискретный характер. Следовательно, все параметры такой системы дискретны.
- **Непрерывные модели.** Противоположное понятие — непрерывная система. Однако деление систем на непрерывные и дискретные во многом произвольно, зависит от цели и глубины исследования. Часто непрерывные системы приводятся к дискретным (при этом непрерывные параметры представляются как дискретные величины путем введения разного рода шкал, балльных оценок и т. п.).
- Дискретные системы изучаются с помощью аппарата теории алгоритмов и теории автоматов. Их поведение может описываться с помощью разностных уравнений.

XI. Классификация по степени учета вероятностных факторов

- **Детерминированные модели.** В данном типе моделей либо полностью известны все функциональные зависимости, либо неизвестными влияниями можно пренебречь без особой потери в точности результатов. Классический пример — модели небесной механики.
- **Вероятностные (стохастические) модели** — такие математические модели, в которых параметры, условия функционирования и характеристики состояния моделируемого объекта представлены случайными величинами и связаны стохастическими (т. е. случайными, нерегулярными) зависимостями, либо исходная информация также представлена случайными величинами. Следовательно, характеристики состояния в модели определяются не однозначно, а через законы распределения их вероятностей. При этом реалистичнее, чем при детерминированном подходе, отражаются процессы, которые, как правило, имеют вероятностный (стохастический) характер.