Лекция №2

Элементы векторной алгебры и аналитической геометрии:

Векторы. Линейные операции над векторами. Базис на плоскости и в пространстве. Координаты вектора. Скалярное произведение. Векторное произведение. Смешанное произведение векторов. Аналитическая геометрия на плоскости.

2

Векторы. Линейные операции над векторами.

Вектор – направленный отрезок.

Обозначение $\overline{a} = \overline{AB}$.

Длина вектора – длина отрезка *AB*.

Обозначение длины

$\overline{a} = \left|\overline{AB}\right|$ или $a = \left|\overline{a}\right|$.

Коллинеарные векторы – векторы, параллельные одной прямой.

Обозначения:

$\overline{a} \uparrow\uparrow \overline{b}$ – векторы сонаправлены;

$\overline{a} \uparrow\downarrow \overline{b}$ – векторы противоположно направлены;

$\overline{a} \parallel \overline{b}$ – в общем случае (без указания взаимной направленности).

Векторы. Линейные операции над векторами.

Равные векторы – векторы, удовлетворяющие условиям :

1) имеют одинаковую длину;
2) коллинеарны;
3) сонаправлены.

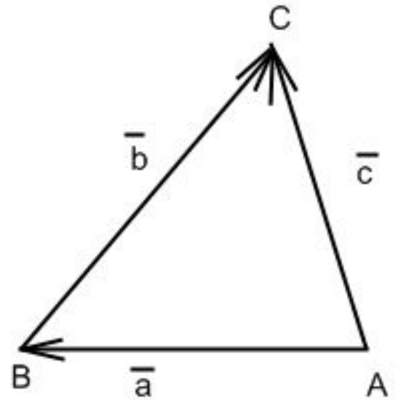
Компланарные векторы — векторы, параллельные одной плоскости.

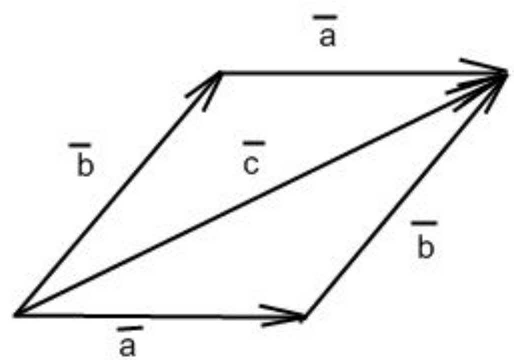
Векторы. Линейные операции над векторами.

Линейными операциями над векторами называются операции сложения векторов и умножения вектора на число.

Сумма векторов *a* и *b* определяется по правилу треугольника или параллелограмма.

Обозначение суммы $\overline{c} = \overline{a} + \overline{b}$ или $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$.





Векторы. Линейные операции над векторами.

Произведением вектора $\bar{a}$ на число λ называется вектор $\overline{b}$, удовлетворяющий следующим условиям:

1) $\left|\overline{b}\right| = |\lambda| \cdot |\overline{a}|$;

2) $\overline{b} \uparrow\uparrow \overline{a}$ при λ>0 и $\overline{b} \uparrow\downarrow \overline{a}$ при λ<0 .

Обозначение $\overline{b} = \lambda \cdot \overline{a}$.

Базис на плоскости и в пространстве. Координаты вектора

Два неколлинеарных вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ образуют **базис на плоскости**.

Три некомпланарных вектора $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ образуют **базис в пространстве**.

Ортонормированный (**декартовый**) базис – это базис составляющие векторы которого взаимно перпендикулярны и имеют единичную длину.

Будем обозначать декартовый базис на плоскости $\bar{i}$, $\bar{j}$; в пространстве $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$,

Базис на плоскости и в пространстве. Координаты вектора

Разложить вектор по базису – значит представить его в виде **линейной комбинации** базисных векторов, т.е. в форме

$$\overline{d} = \alpha\,\overline{a} + \beta\,\overline{b}$$ - на плоскости,

$$\overline{d} = \alpha\,\overline{a} + \beta\,\overline{b} + \gamma\,\overline{c}$$ - в протранстве.

Числа α, β, γ, (коэффициенты линейной комбинации) называются **координатами вектора** в данном базисе. Вектор может быть задан в координатной форме: $\overline{d} = (\alpha; \beta)$ – на плоскости; $\overline{d} = (\alpha; \beta; \gamma)$ – в пространстве.

Базис на плоскости и в пространстве. Координаты вектора

Линейным операциям над векторами

$\overline{a} = (a_1; a_2; a_3)$ и $\overline{b} = (b_1; b_2; b_3)$

1. $\overline{a} + \overline{b} = (a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3)$
2. $\overline{a} - \overline{b} = (a_1 - b_1; a_2 - b_2; a_3 - b_3)$
3. $\lambda \overline{a} = (\lambda a_1; \lambda a_2; \lambda a_3)$

Если заданы координаты начала и конца вектора

$A = (x_1; x_2; x_3)$ и $B = (y_1; y_2; y_3)$

тогда координаты вектора вычисляются:

$$\overline{a} = \overline{AB} = (y_1 - x_1; y_2 - x_2; y_3 - x_3)$$

Базис на плоскости и в пространстве. Координаты вектора

Условия коллинеарности и компланарности векторов в координатной форме выглядит следующим образом:

1. Два вектора коллинеарны, если

$$\overline{a} \parallel \overline{b} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{a} = \lambda \overline{b} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$$

2. Три вектора компланарны, если

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

Базис на плоскости и в пространстве. Координаты вектора

Пример. Даны четыре вектора:

$$\overline{a}_1 = \left(-1; 2; 0\right), \quad \overline{a}_2 = \left(1; 2; 1\right), \quad \overline{a}_3 = \left(2; 1; -1\right), \quad \overline{b} = \left(3; 2; -7\right)$$

Показать, что три первых вектора образуют базис в трехмерном пространстве и разложить четвертый вектор по этому базису.

$$\Delta = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 = -3$$

$$A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1(1 \cdot (-1) - 1 \cdot 2) = 3$$

$$\Delta = -1 \cdot (-3) + 2 \cdot 3 = 9$$

Δ≠0, а значит это базис.

Базис на плоскости и в пространстве. Координаты вектора

$$\bar{b} = (3; 2; -7)$$

Разложим четвертый вектор по этому базису:

$$\bar{b} = x \cdot \bar{a}_1 + y \cdot \bar{a}_2 + z \cdot \bar{a}_3$$

Запишем в координатном виде:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Базис на плоскости и в пространстве. Координаты вектора

Запишем систему уравнений:

$$\begin{cases} 3 = -x + y + 2z \\ 2 = 2x + 2y + z \\ -7 = y - z \end{cases} \qquad \begin{cases} -x + y + 2z = 3 \\ 2x + 2y + z = 2 \\ y - z = -7 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad f = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix}$$

Базис на плоскости и в пространстве. Координаты вектора

Осталось решить систему из 3-х уравнений на 3-и неизвестные:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -7 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 & 8 \\ 0 & 1 & -1 & -7 \end{array}\right) =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -7 \\ 0 & 4 & 5 & 8 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 9 & 36 \end{array}\right)$$

Базис на плоскости и в пространстве. Координаты вектора

$$\begin{cases} -x+y+2z=3 \\ y-z=-7 \\ 9z=36 \end{cases} \quad \begin{cases} -x+y+2z=3 \\ y-4=-7 \\ z=4 \end{cases} \quad \begin{cases} -x+(-3)+2\cdot 4=3 \\ y=-3 \\ z=4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=2 \\ y=-3 \\ z=4 \end{cases}$$

$$\overline{b}=(2;-3;4)$$

Скалярное произведение векторов.

Скалярным произведением векторов называют сумму произведений их координат:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2+a_3\cdot b_3$$

Скалярным произведением векторов называют произведение длин этих векторов на косинус угла между ними:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=|a|\cdot|b|\cdot\cos(\alpha)$$

Скалярное произведение векторов можно еще представить:

$$\overline{a}\cdot\overline{b}=\left|\overline{a}\right|\cdot np_{\overline{a}}\overline{b} \qquad \overline{a}\cdot\overline{b}=\left|\overline{b}\right|\cdot np_{\overline{b}}\overline{a}$$

где $np_{\overline{a}}\overline{b}$ проекция вектора **a** на вектор **b**.

Скалярное произведение векторов.

С помощью скалярного произведения можно вычислить:

Длину вектора:

$$|\overline{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Расстояние между двумя точками:

$$AB = |\overline{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

Косинус угла между двумя векторами:

$$\cos(\alpha) = \frac{\overline{a} \cdot \overline{b}}{|\overline{a}| \cdot |\overline{b}|} = \frac{a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$$

Скалярное произведение векторов.

Условие перпендикулярности (ортогональности) векторов:

$$\overline{a} \perp \overline{b} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \frac{\pi}{2} + \pi n \quad \Leftrightarrow \quad \cos(\alpha) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \overline{a} \cdot \overline{b} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3 = 0, \left(\left|\overline{a}\right| \neq 0, \left|\overline{b}\right| \neq 0 \right).$$

Свойства скалярного произведения векторов.

1. $\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{b} \cdot \overline{a};$

2. $\overline{a} \cdot \left(\overline{b} + \overline{c}\right) = \overline{a} \cdot \overline{b} + \overline{a} \cdot \overline{c};$

3. $\left(\overline{a} + \overline{b}\right) \cdot \overline{c} = \overline{a} \cdot \overline{c} + \overline{b} \cdot \overline{c};$

4. $\overline{\lambda a} \cdot \overline{b} = \overline{a} \cdot \overline{\lambda b} = \lambda \cdot \left(\overline{a} \cdot \overline{b}\right);$

5. $\overline{a} \cdot \overline{a} = \left|\overline{a}\right|^2;$

6. $\overline{a} \cdot \overline{b} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \overline{a} \perp \overline{b} \quad \left(\overline{a} \neq 0, \overline{b} \neq 0\right)$
   (критерий ортогональности векторов);

7. Работа силы $\overline{F}$, действующей на материальную точку при перемещении её из начала в конец вектора $\overline{s}$ вычисляется по формуле $A = \overline{F} \cdot \overline{s}$ (физический смысл).

Векторное произведение.

Векторным произведением двух векторов **a** и **b** называется вектор **c** такой, что:

1. $\left|\overline{c}\right| = \left|\overline{a}\right| \cdot \left|\overline{b}\right| \cdot \sin\alpha$ - модуль вектора **c** равен площади параллелограмма, построенного на векторах **a** и **b**;
2. $\overline{c} \perp \overline{a}, \quad \overline{c} \perp \overline{b};$
3. Тройка векторов $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ правая.

Векторное произведение.

Обозначение: $\bar{c} = [\bar{a}, \bar{b}]$, $\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b}$

Координаты вектора $\bar{c} = (c_x, c_y, c_z)$ вычисляются по формуле:

$$\bar{c} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \cdot \bar{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \cdot \bar{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \cdot \bar{k}.$$

Свойства векторного произведения.

1. $\overline{a} \times \overline{b} = -(\overline{b} \times \overline{a});$
2. $\overline{a} \times (\overline{b} + \overline{c}) = \overline{a} \times \overline{b} + \overline{a} \times \overline{c};$
3. $(\overline{a} + \overline{b}) \times \overline{c} = \overline{a} \times \overline{c} + \overline{b} \times \overline{c};$
4. $\overline{\lambda a} \times \overline{b} = \overline{a} \times \overline{\lambda b} = \lambda \cdot (\overline{a} \times \overline{b});$
5. $\overline{a} \times \overline{a} = \overline{0};$
6. $\overline{a} \times \overline{b} = \overline{0} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{a} \parallel \overline{b}$

   критерий коллинеарности векторов.

Смешанное произведение векторов.

Смешанным произведением векторов $\overline{a}\cdot\overline{b}\cdot\overline{c}$ или $\left(\overline{a},\overline{b},\overline{c}\right)$ называется число:

$$\overline{a}\cdot\overline{b}\cdot\overline{c}=\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)\cdot\overline{c}=\overline{a}\cdot\left(\overline{b}\times\overline{c}\right)=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix},$$

Абсолютная величина смешанного произведения векторов $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ равна объему параллелепипеда построенного на этих векторах.

$$V=\left|\left(\overline{a},\overline{b},\overline{c}\right)\right|=\pm\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Свойства смешанного произведения.

1. $\left(\overline{a},\overline{b},\overline{c}\right)=-\left(\overline{b},\overline{a},\overline{c}\right),\quad \left(\overline{a},\overline{b},\overline{c}\right)=-\left(\overline{a},\overline{c},\overline{b}\right);$
2. $\left(\lambda\overline{a},\overline{b},\overline{c}\right)=\left(\overline{a},\lambda\overline{b},\overline{c}\right)=\left(\overline{a},\overline{b},\lambda\overline{c}\right)=\lambda\left(\overline{a},\overline{b},\overline{c}\right);$
3. $\left(\overline{a},\overline{b},\overline{c}\right)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \overline{a},\overline{b},\overline{c}$ - компланарны.

Примеры.

Найти угол между векторами **p** и **q**, если **p**=2**m**+3**n**, **q**=**m**+2**n**, |**m**|=2, |**n**|=3, а угол между векторами **m** и **n** равен π/3.

Напомним, что: $\cos(\hat{p}q) = \dfrac{\overline{p}\cdot\overline{q}}{|\overline{p}|\cdot|\overline{q}|}$

вычислим $\overline{p}\cdot\overline{q}$ и $|\overline{p}|, |\overline{q}|$

$$\overline{p}\cdot\overline{q} = \left(2\overline{m} + 3\overline{n}\right)\cdot\left(\overline{m} + 2\overline{n}\right) = 2\overline{m}\cdot\overline{m} + 3\overline{n}\cdot\overline{m} + 4\overline{m}\cdot\overline{n} + 6\overline{n}\cdot\overline{n} =$$

$$= 2|\overline{m}|^2 + 7\overline{m}\cdot\overline{n} + 6|\overline{n}|^2 = 2\cdot 4 + 7\overline{m}\cdot\overline{n} + 6\cdot 9 = 7\overline{m}\cdot\overline{n} + 62$$

$$\overline{m}\cdot\overline{n} = |\overline{m}|\cdot|\overline{n}|\cdot\cos(\frac{\pi}{3}) = 2\cdot 3\cdot\frac{1}{2} = 3$$

Примеры.

$$\overline{p}\cdot\overline{q}=7\overline{m}\cdot\overline{n}+62=7\cdot 3+62=83$$

Теперь вычислим длину наших векторов:

$$\left|\overline{p}\right|=\sqrt{\left(2\overline{m}+3\overline{n}\right)\cdot\left(2\overline{m}+3\overline{n}\right)}=\sqrt{4\left|\overline{m}\right|^2+12\overline{m}\cdot\overline{n}+9\left|\overline{n}\right|^2}=$$

$$=\sqrt{4\cdot 4+12\cdot 3+9\cdot 9}=\sqrt{16+36+81}=\sqrt{133}$$

$$\left|\overline{q}\right|=\sqrt{\left(\overline{m}+2\overline{n}\right)\cdot\left(\overline{m}+2\overline{n}\right)}=\sqrt{\left|\overline{m}\right|^2+4\overline{m}\cdot\overline{n}+4\left|\overline{n}\right|^2}=$$

$$=\sqrt{4+4\cdot 3+4\cdot 9}=\sqrt{4+12+36}=\sqrt{52}$$

Примеры.

В результате получим:

$$\left|\overline{p}\right| = \sqrt{133} \qquad \left|\overline{q}\right| = \sqrt{52} \qquad \overline{p} \cdot \overline{q} = 83$$

$$\cos(p\hat{q}) = \frac{83}{\sqrt{133} \cdot \sqrt{52}} = \frac{83}{\sqrt{6916}} \approx \frac{83}{83{,}16} \approx 0{,}998$$

$$\angle(pq) = \arccos(0{,}998) = 3{,}6^0 = \frac{\pi}{50}$$

Примеры.

Найти векторное произведение векторов

$$\overline{a} = (-3,2,-1) \qquad \overline{b} = (1,0,2)$$

$$\overline{c} = \overline{a} \times \overline{b} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ -3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \cdot \overline{i} - \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \cdot \overline{j} + \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \overline{k} =$$

$$= 4\overline{i} + 5\overline{j} - 2\overline{k}$$

$$\overline{c} = (4,5,-2)$$

Примеры.

Вычислить смешанное произведение векторов

$$\overline{a} = \left(-3,2,-1\right)\ \overline{b} = \left(1,0,2\right)\quad \overline{c} = \left(4,5,-2\right)$$

$$\overline{a}\cdot\overline{b}\cdot\overline{c} = \begin{vmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 5 & -2 \end{vmatrix} = -1\cdot 1\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} + (-1)\cdot 2\cdot\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= -1\cdot(-4+5) - 2\cdot(-15-8) = -1 - 2\cdot(-23) = 45$$

Аналитическая геометрия на плоскости.

1. Расстояние d между точками $M_1(x_1,y_1)$ и $M_2(x_2,y_2)$ на плоскости:

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

2. Деление отрезка в заданном отношении λ. Даны точки $M_1(x_1,y_1)$ и $M_2(x_2,y_2)$. Тогда координаты точки $N(x,y)$, делящей отрезок M_1M_2 в отношении $\frac{M_1N}{NM_2}=\lambda$ определяется по формуле:

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$$

При λ=1:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y=\frac{y_1+y_2}{2}$$

Аналитическая геометрия на плоскости.

3. Основные виды уравнений прямой на плоскости:

а) общее уравнение: $l: Ax + By + C = 0,$

$\overline{n} = (A, B)$ - нормальный вектор прямой, $\overline{n} \perp l;$

б) уравнение прямой с угловым коэффициентом

$l: y = kx + b,$ k - угловой коэффициент, равный тангенсу угла α, который образует прямая с положительным направлением оси Ox, b – ордината точки пересечения прямой с осью Oy;

Аналитическая геометрия на плоскости.

в) уравнение прямой в отрезках $l: \quad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1,$
где a – абсцисса, b – ордината точек пересечения прямой с осями Ox и Oy соответственно;

г) уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(x_1,y_1)$ и $M_2(x_2,y_2)$

$$l: \quad \frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1};$$

д) уравнение прямой, проходящей через данную точку M0(x0,y0) в данном направлении

$l: \quad y-y_0=k\cdot(x-x_0),$ $\quad k$ - угловой коэффициент.

Аналитическая геометрия на плоскости.

4. Взаимное расположение двух прямых $y=k_1x+b_1$ и $y=k_2x+b_2$:

а) угол между прямыми:

$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2},$$

где k_1 и k_2 – угловые коэффициенты этих прямых;

φ – угол, на который нужно повернуть первую прямую против часовой стрелки до совпадения со второй прямой;

Аналитическая геометрия на плоскости.

б) признак параллельности двух прямых: $k_1 = k_2$;

в) признак перпендикулярности двух прямых: $k_2 = -\frac{1}{k_1}.$

5. Расстояние от точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямой $Ax+By+C=0$ находиться по формуле:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Примеры.

Даны координаты вершин треугольника *ABC*: *A*(–2,1), *B*(2,9), *C* (-7,8). Найти: 1) систему неравенств, определяющих множество точек треугольника *ABC*; 2) угол C в радианах с точностью до двух знаков; 3) уравнение высоты *AD* и ее длину; 4) уравнение медианы *CE* и координаты точки *F* пересечения этой медианы с высотой *AD*; 5) уравнение окружности, для которой высота *AD* есть диаметр.

Решение:

1) Каждая прямая разбивает плоскость на две полуплоскости: под прямой и над прямой – это обозначается в уравнении прямой знаком неравенства.

Построим прямые проходящие через точки A, B и C по формуле: $$l: \quad \frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1};$$

Примеры.

$A(-2,1)$, $B(2,9)$, $C(-7,8)$ $\qquad l:\quad \dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1};$

$$\frac{x+2}{2+2}=\frac{y-1}{9-1}, \qquad \frac{1}{4}(x+2)=\frac{1}{8}(y-1), \quad 2(x+2)=y-1$$

$$y=2x+5$$

$$\frac{x+2}{-7+2}=\frac{y-1}{8-1}, \qquad -\frac{1}{5}(x+2)=\frac{1}{7}(y-1), \quad -\frac{7}{5}(x+2)=y-1$$

$$y=-\frac{7}{5}x-\frac{14}{5}+1, \qquad y=-\frac{7}{5}x-\frac{9}{5}$$

Примеры.

$A(-2,1)$, $B(2,9)$, $C(-7,8)$

$$l: \quad \frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1};$$

$$y=2x+5 \qquad y=-\frac{7}{5}x-\frac{9}{5}$$

$$\frac{x-2}{-7-2}=\frac{y-9}{8-9}, \qquad -\frac{1}{9}(x-2)=-1(y-9), \quad \frac{1}{9}(x-2)=y-9,$$

$$y=\frac{1}{9}x-\frac{2}{9}+9, \qquad y=\frac{1}{9}x+\frac{79}{9}$$

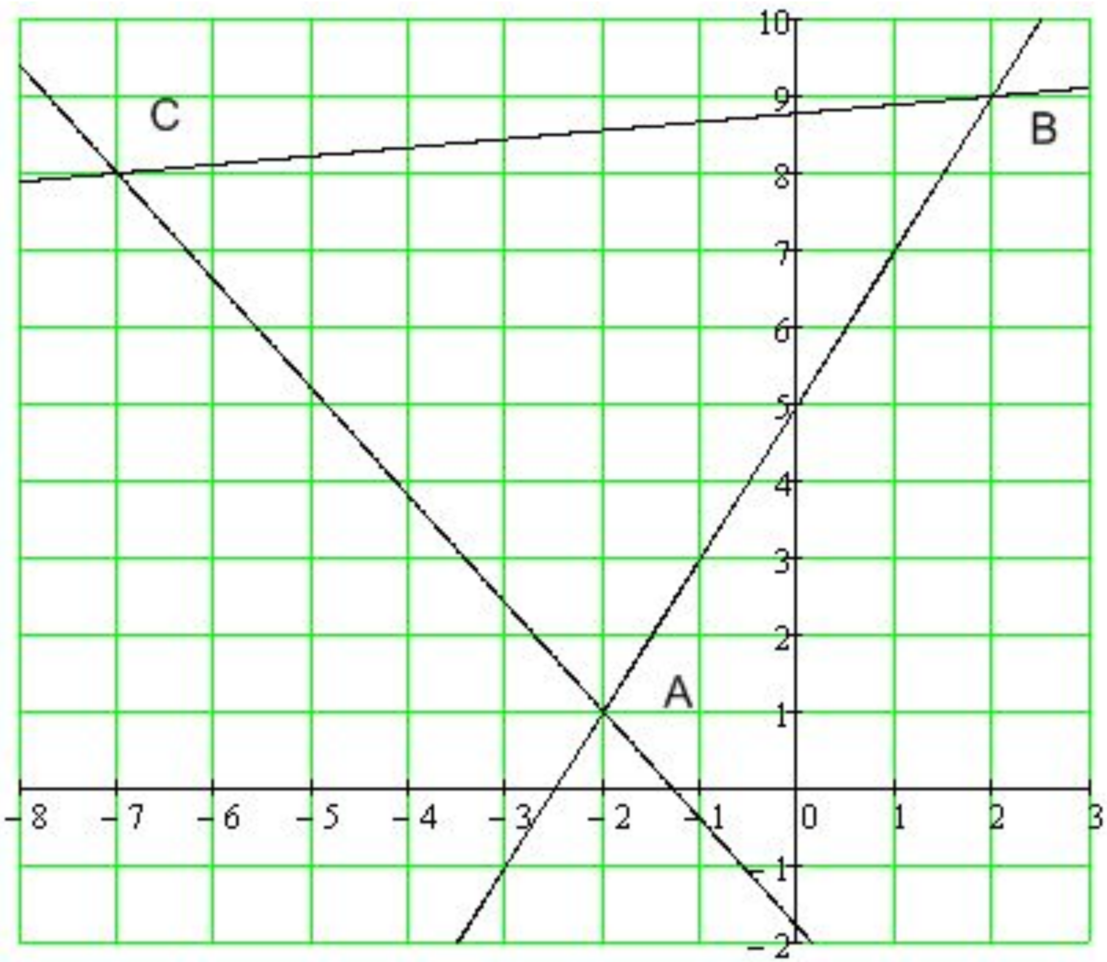
Примеры.

A(–2,1), *B*(2,9), *C*(-7,8)

$$y = 2x + 5$$

$$y = -\frac{7}{5}x - \frac{9}{5}$$

$$y = \frac{1}{9}x + \frac{79}{9}$$



$$y \geq 2x + 5$$

$$y \geq -\frac{7}{5}x - \frac{9}{5}$$

$$y \leq \frac{1}{9}x + \frac{79}{9}$$

Примеры.

2) угол C в радианах с точностью до двух знаков;

A(–2,1), *B*(2,9), *C*(-7,8)

Уравнения AC и BC имеют вид:

$$y = -\frac{7}{5}x - \frac{9}{5} \qquad y = \frac{1}{9}x + \frac{79}{9}$$

Соответственно коэффициенты K_A=-7/5, K_B=1/9.

Мы знаем, что $$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2},$$

$$tg\hat{C} = \frac{-\frac{7}{5} - \frac{1}{9}}{1 + \left(-\frac{7}{5}\right) \cdot \frac{1}{9}} = \frac{-\frac{63+5}{45}}{1 - \frac{7}{45}} = -\frac{68}{45} : \frac{38}{45} = -\frac{68}{45} \cdot \frac{45}{38} = -\frac{34}{19}$$

Примеры.

$$tg\hat{C} = -\frac{34}{19}, \quad \hat{C} = arctg\left(-\frac{34}{19}\right) \approx 2{,}08$$

3) уравнение высоты *AD* и ее длину;

Вспомним признак перпендикулярности прямых: $k = -\frac{1}{k_1}$.
В нашем случае $k_1 = \frac{1}{9}$,

Т.е. К=-9, тогда уравнение прямой будет записываться по формуле: $y - y_0 = k(x - x_0)$ $\quad A(-2,1)$

$$y - 1 = -9(x + 2)$$

$$AD: \quad y = -9x - 17$$

Примеры.

Расстояние от точки до прямой вычисляется

$$d=\frac{\left|Ax_0+By_0+C\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

$A(-2,1)$

$$y=\frac{1}{9}x+\frac{79}{9}$$

$$\frac{1}{9}x-y+\frac{79}{9}=0$$

$$\left|AD\right|=\frac{\frac{1}{9}\cdot(-2)-1\cdot 1+\frac{79}{9}}{\sqrt{\left(\frac{1}{9}\right)^2+(-1)^2}}=\frac{-\frac{2}{9}-\frac{9}{9}+\frac{79}{9}}{\sqrt{\frac{1}{81}+\frac{81}{81}}}$$

$$\left|AD\right|=\frac{\frac{68}{9}}{\frac{\sqrt{82}}{9}}=\frac{68}{\sqrt{82}}\approx 7{,}51$$

Примеры.

4) уравнение медианы *CE* и координаты точки *F* пересечения этой медианы с высотой *AD*.

Чтобы найти уравнение медианы С*E*, определим сначала координаты точки *E*, которая является серединой стороны *AB*.

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

A(–2,1), *B*(2,9)

$$x = \frac{-2+2}{2} = 0, \quad y = \frac{1+9}{2} = 5$$

Примеры.

C(-7,8), E(0,5)

$$l: \quad \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1};$$

$$CE: \quad \frac{x+7}{0+7} = \frac{y-8}{5-8}; \quad \frac{1}{7}(x+7) = -\frac{1}{3}(y-8);$$

$$CE: \quad y - 8 = -\frac{3}{7}(x+7); \quad y - 8 = -\frac{3}{7}x - 3;$$

$$CE: \quad y = -\frac{3}{7}x + 5.$$

Примеры.

Для нахождения координат точки пересечения медианы и высоты, решим систем уравнений составленную их уравнения медианы и уравнения высоты:

$$CE: \quad y = -\frac{3}{7}x + 5 \quad AD: \quad y = -9x - 17$$

$$\begin{cases} y = -\dfrac{3}{7}x + 5 \\ y = -9x - 17 \end{cases}, \quad \begin{cases} -9x - 17 = -\dfrac{3}{7}x + 5 \\ y = -9x - 17 \end{cases}, \quad \begin{cases} -63x - 119 = -3x + 35 \\ y = -9x - 17 \end{cases},$$

$$\begin{cases} -60x = 154 \\ y = -9x - 17 \end{cases}, \quad \begin{cases} x = -\dfrac{77}{30} \\ y = \dfrac{61}{10} \end{cases}$$

Примеры.

5) уравнение окружности, для которой высота *AD* есть диаметр. $|AD| = \frac{68}{\sqrt{82}}$ $R = \frac{68}{2 \cdot \sqrt{82}} = \frac{34}{\sqrt{82}}$

$$AD: \quad y = -9x - 17$$

$$BC: \quad y = \frac{1}{9}x + \frac{79}{9}$$

$$\begin{cases} y = -9x - 17 \\ y = \frac{1}{9}x + \frac{79}{9} \end{cases}, \quad \begin{cases} \frac{1}{9}x + \frac{79}{9} = -9x - 17 \\ y = \frac{1}{9}x + \frac{79}{9} \end{cases}, \quad \begin{cases} x + 79 = -81x - 153 \\ y = \frac{1}{9}x + \frac{79}{9} \end{cases},$$

$$\begin{cases} 82x = -232 \\ y = \frac{1}{9}x + \frac{79}{9} \end{cases}, \quad \begin{cases} x = -\frac{116}{41} \\ y = \frac{-116 + 3239}{41 \cdot 9} \end{cases}, \quad \begin{cases} x = -\frac{116}{41} \\ y = \frac{347}{41} \end{cases}$$

Примеры.

Осталось записать уравнение окружности

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$$

$$\begin{cases} x_0=-\dfrac{116}{41} \\ y_0=\dfrac{347}{41} \end{cases} \qquad R=\frac{34}{\sqrt{82}}$$

$$\left(x+\frac{116}{41}\right)^2+\left(y-\frac{347}{41}\right)^2=\frac{578}{41}$$