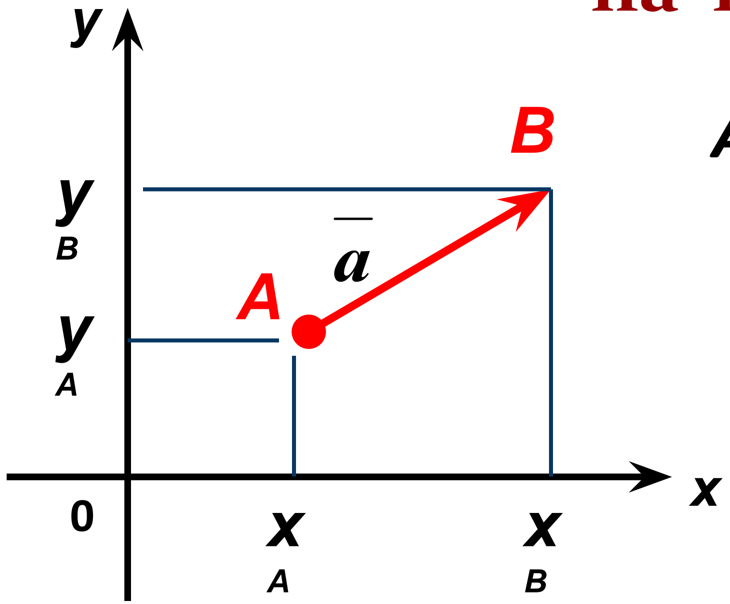
Вектори у просторі

План

1. Координати вектора у просторі.
2. Дії над векторами.
3. Скалярний добуток векторів

Координати вектора, модуль вектора на площині



$$A(x_A; y_A),\quad B(x_B; y_B),\quad \overline{AB} = \overline{a}$$

$$\overline{a}(a_x; a_y)$$

$$a_x = x_B - x_A$$

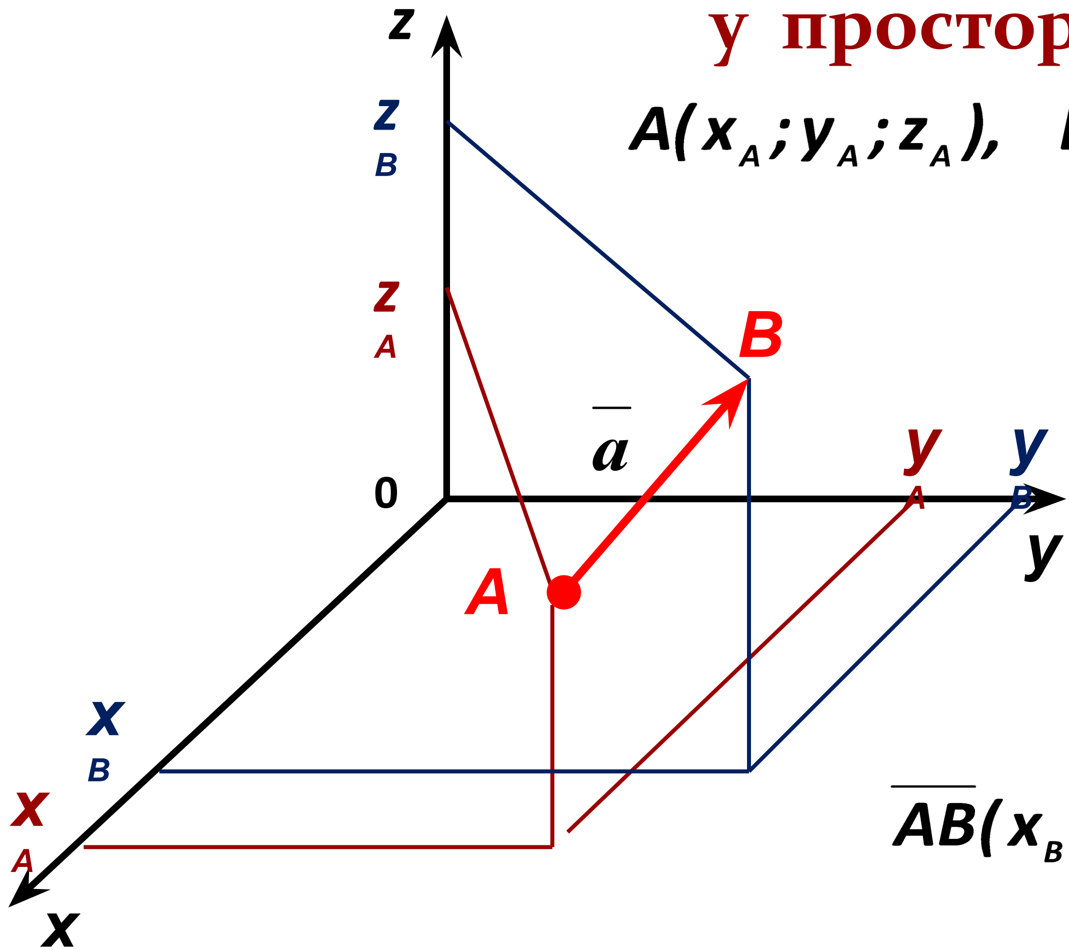
$$a_y = y_B - y_A$$

$$\overline{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A)$$

$$|\overline{a}| = AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2},\qquad |\overline{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

Координати вектора, модуль вектора у просторі

$A(x_A;y_A;z_A),\quad B(x_B;y_B;z_B),\quad \overline{AB}=\overline{a}$



$\overline{a}(a_x;a_y;a_z)$

$a_x=x_B-x_A$

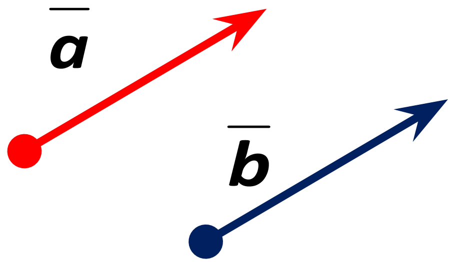
$a_y=y_B-y_A$

$a_z=z_B-z_A$

$\overline{AB}(x_B-x_A;y_B-y_A;z_B-z_A)$

$$\left|\overline{AB}\right|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2},\quad \left|\overline{a}\right|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$$

Рівні вектори



$$\overline{a} = \overline{b} \Leftrightarrow \begin{cases} \left|\overline{a}\right| = \left|\overline{b}\right| \\ \overline{a} \uparrow\uparrow \overline{b} \end{cases}$$

у координатах

$$\overline{a}\left(a_x; a_y; a_z\right) = \overline{b}\left(b_x; b_y; b_z\right) \Leftrightarrow \begin{cases} a_x = b_x \\ a_y = b_y \\ a_z = b_z \end{cases}$$

№ 1. Знайти координати вектора $\overline{MF}$, якщо M(-5; -9; 4) і F(-2; 1; -3).

Відповідь: $\overline{MF}(3;10;-7).$

№ 2. Дано точки M(-3; 2; z), N(4; -6; 3), К(x; 1; -10), E(2; y; -15). Знайти x, y, z, якщо $\overline{MN}=\overline{EK}$.

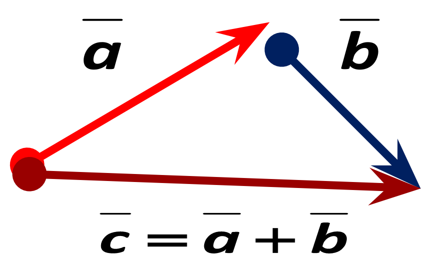
Відповідь: $x = 9$, $y = 9$, $z = -2$.

№ 3. Серед векторів $\overline{a}(5;-3;4), \overline{b}(-2;1;-7), \overline{c}(-3;6;3), \overline{m}(-5;5;-2), \overline{n}(2;-6;\sqrt{10})$ знайти такі, що мають однаковий модуль.

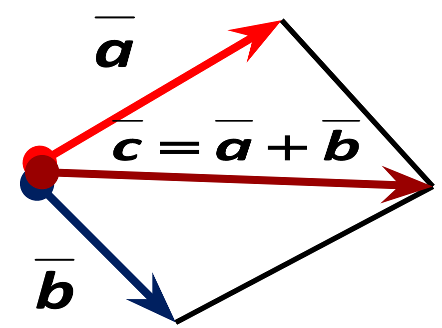
Відповідь: $|\overline{a}|=|\overline{n}|=\sqrt{50}$, $|\overline{b}|=|\overline{c}|=|\overline{m}|=\sqrt{54}.$

Сума векторів

правило трикутника



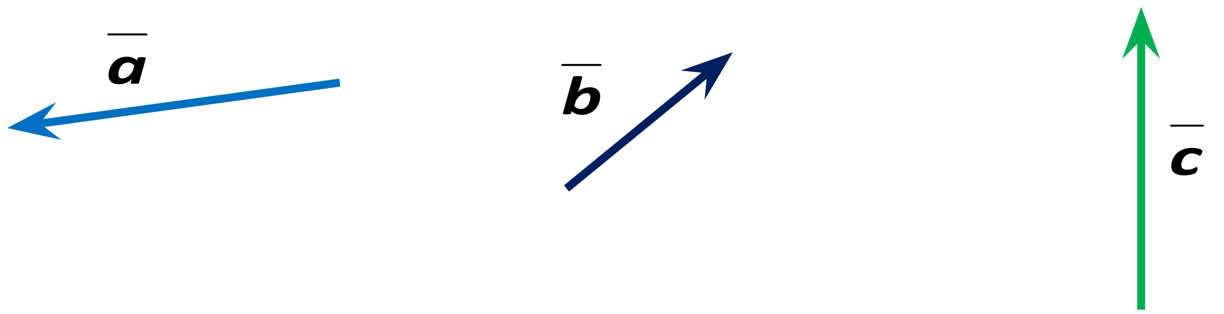
правило паралелограма

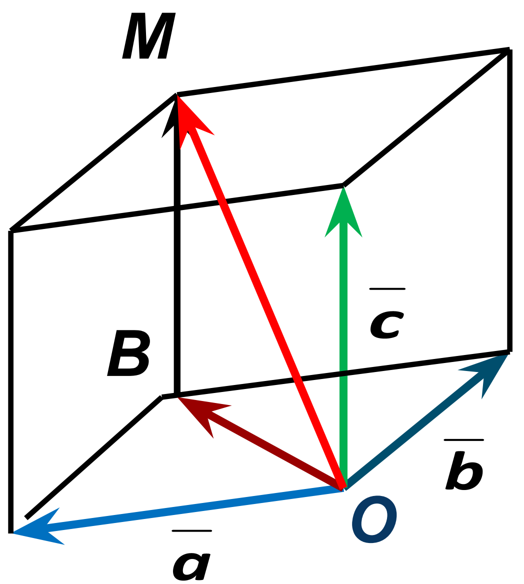


у координатах

$$\overline{a}(a_x;a_y;a_z)+\overline{b}(b_x;b_y;b_z)=\overline{c}(a_x+b_x;a_y+b_y;a_z+b_z)$$

Правило паралелепіпеда





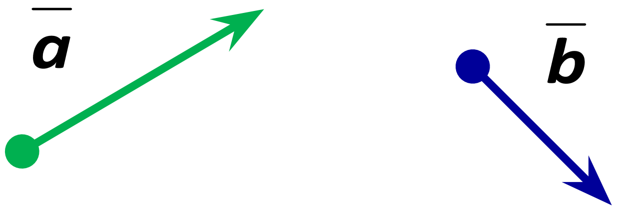
$$\overline{OB} = \overline{a} + \overline{b}$$

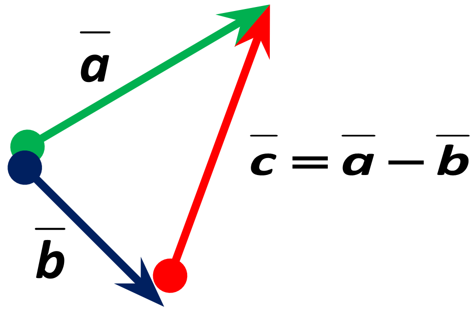
$$\overline{BM} = \overline{c}$$

$$\overline{OM} = \overline{OB} + \overline{BM}$$

$$\overline{OM} = \overline{a} + \overline{b} + \overline{c}$$

Різниця векторів





у координатах

$$\overline{a}(a_x; a_y; a_z) - \overline{b}(b_x; b_y; b_z) = \overline{c}(a_x - b_x; a_y - b_y; a_z - b_z)$$

№ 4. Дано вектори $\overline{a}(-3;1;2)$ і $\overline{b}(5;-6;7)$.
Знайти:

1) $\overline{a}+\overline{b}$;

2) $\overline{a}-\overline{b}$;

3) $\left|\overline{a}+\overline{b}\right|$;

4) $\left|\overline{a}-\overline{b}\right|$.

Відповідь:

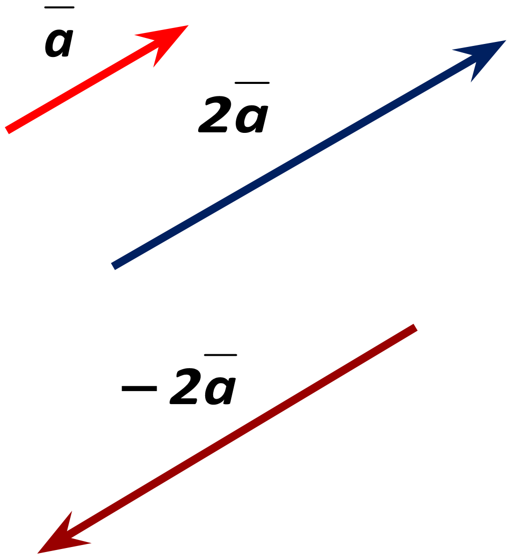
1) $(2;-5;9)$;

2) $(-8;7;-5)$;

3) $\sqrt{110}$;

4) $\sqrt{138}$.

Множення вектора на число



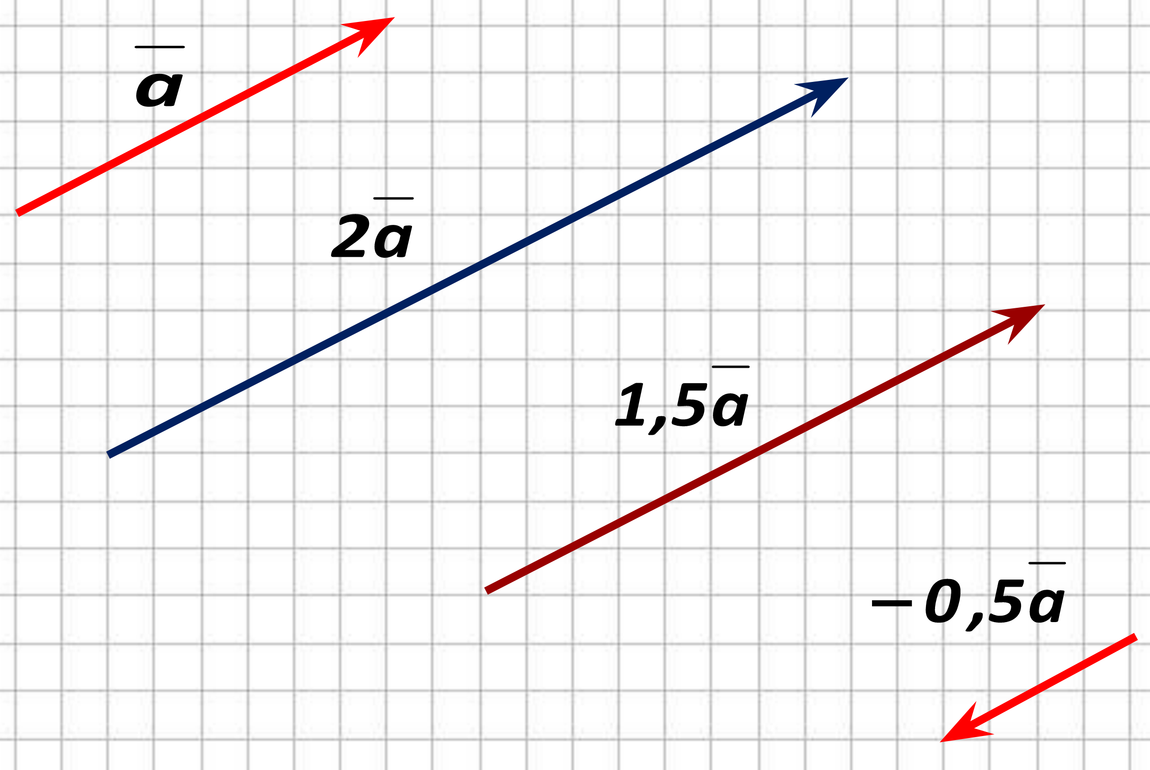
$$\overline{a}(a_x; a_y; a_z)$$

$$\lambda \cdot \overline{a} = (\lambda a_x; \lambda a_y; \lambda a_z)$$

якщо $\lambda > 0$, *то* $\lambda \cdot \overline{a} \uparrow\uparrow \overline{a}$

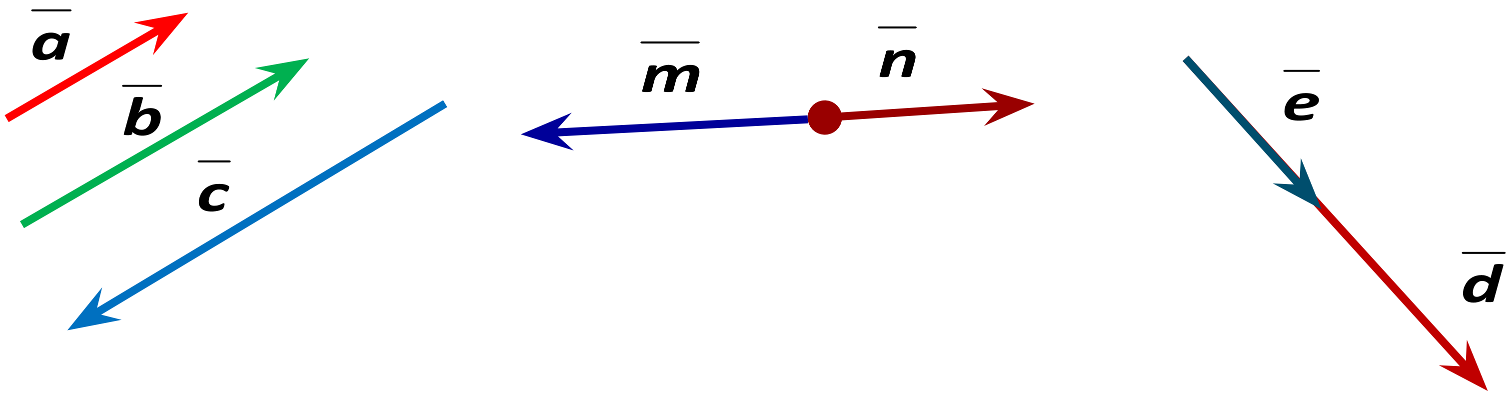
якщо $\lambda < 0$, *то* $\lambda \cdot \overline{a} \uparrow\downarrow \overline{a}$

№ 5. **Побудувати вектори** $2\overline{a};\ 1{,}5\overline{a};\ -0{,}5\overline{a}$.



Колінеарні вектори

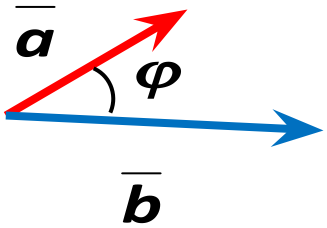
Означення. Вектори називаються колінеарними, якщо вони лежать на одній прямій або на паралельних прямих.



$\overline{a}(a_x;a_y;a_z)$ і $\overline{b}(b_x;b_y;b_z)$ *колінеарні, то*

$$\overline{b}=\lambda\cdot\overline{a} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{b_x}{a_x}=\frac{b_y}{a_y}=\frac{b_z}{a_z}=\lambda$$

Скалярний добуток векторів



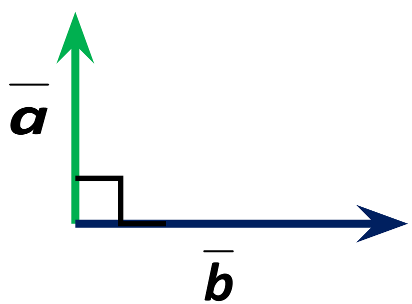
$$\overline{a}\cdot\overline{b}=\left|\overline{a}\right|\cdot\left|\overline{b}\right|\cdot\cos$$

у координатах

$$\overline{a}(a_x;a_y;a_z),\quad \overline{b}(b_x;b_y;b_z)$$

$$\overline{a}\cdot\overline{b}=a_x\cdot b_x+a_y\cdot b_y+a_z\cdot b_z$$

умова перпендикулярності векторів



$$\overline{a}\perp\overline{b}\quad\Leftrightarrow\quad\overline{a}\cdot\overline{b}=0$$

Розв’язування задач

№ 1. Модуль вектора $\overline{a}(x;-10;8)$ дорівнює 13. Знайти *x*.

№ 2. Дано вектори $\overline{a}(4;-7;-3)$ і $\overline{b}(-3;6;-2)$. Знайти:

$1)\ \overline{c}=3\cdot\overline{b}-2\cdot\overline{a}\,;\qquad 2)\ \left|\overline{c}\right|.$

№ 3. Чи колінеарні вектори $\overline{AB}$ і $\overline{CD}$, якщо A(2; -5; 4), B(1; 4; 6), C(-4; -6; 8), D(-2; 0; 12) ?

№ 4. Знайти значення x і y, при яких вектори $\overline{a}(x;-8;12)$ і $\overline{b}(24;y;-36)$ колінеарні.

№ 5. Знайти скалярний добуток векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$, якщо $\overline{a}(1;-3;8)$, $\overline{b}(4;-2;-6)$.

№ 6. Знайти скалярний добуток векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$, якщо $|\bar{a}| = 8, \quad |\bar{b}| = 7, \quad (\bar{a}, \hat{\ } \bar{b}) = 45^0.$

№ 7. Дано вектори $\bar{a}(4; -2; p)$ і $\bar{b}(5; p; -3)$. При якому значенні p $\bar{a} \cdot \bar{b} = 8$?

№ 8. Дано вектори $\bar{a}(4; -7; -2)$ і $\bar{b}(3; y; -1)$. При якому значенні y вектори перпендикулярні.

№ 9. Довести, що чотирикутник ABCD з вершинами A(6; -4; 2), B(3; 2; 3), C(0; 1; 0), D(3; -5; -1) - прямокутник.

№ 10. Знайти косинус кута між векторами $\bar{a}(5; -1; -2)$ і $\bar{b}(2; 6; -3)$.