Лекция 2.
Случайные величины

7-1. Понятие случайной величины

7-2. Распределение случайной величины

7-3. Математическое ожидание

7-4. Дисперсия, стандартное отклонение

7-1. Случайная величина

Определение

Пример

Случайная величина

Случайной величиной называют переменную, которая в результате испытания принимает единственное значение, которое зависит от случая и не может быть известно заранее.

Обозначаем *X*, а ее значения *x*.

Мальчики среди шести новорожденных

Мальчики, x	Вероятность, $P(x)$
0	0,016
1	0,094
2	0,234
3	0,313
4	0,234
5	0,094
6	0,016

Случайная величина – число мальчиков среди шести новорожденных.

Принимает значения от 0 до 6.

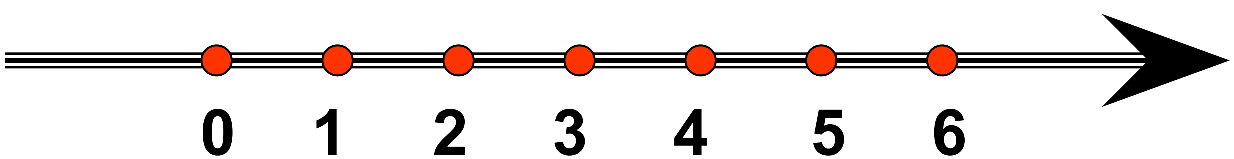
Значения 0 и 6 менее вероятны, чем значение 3.

Как вычислены эти вероятности, поймем позже.

Дискретная случайная величина

Дискретная случайная величина принимает конечное или счетное количество значений.

Счетное количество может быть бесконечным, но, тем не менее, может быть подсчитано при помощи определенной процедуры. Счетными являются, например, целые числа.



Число новорожденных

Непрерывная случайная величина

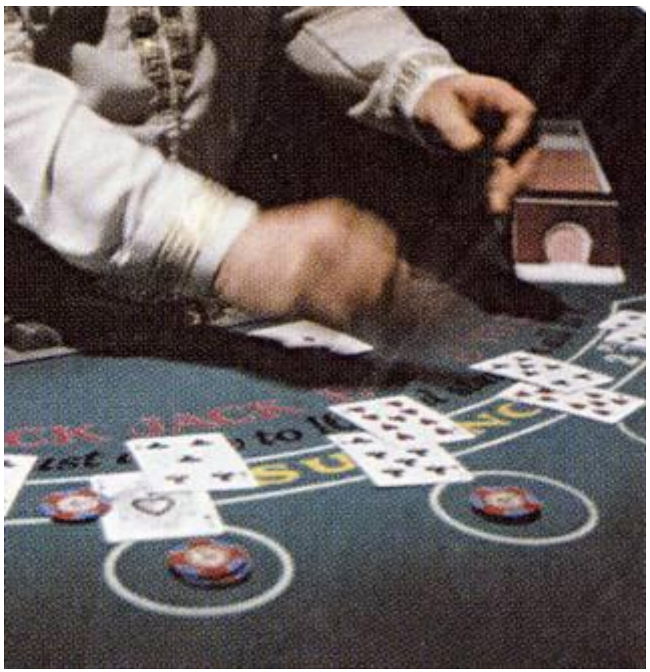
Непрерывная случайная величина, в противоположность дискретной, принимает бесконечное количество значений из определенного непрерывного множества на числовой прямой.

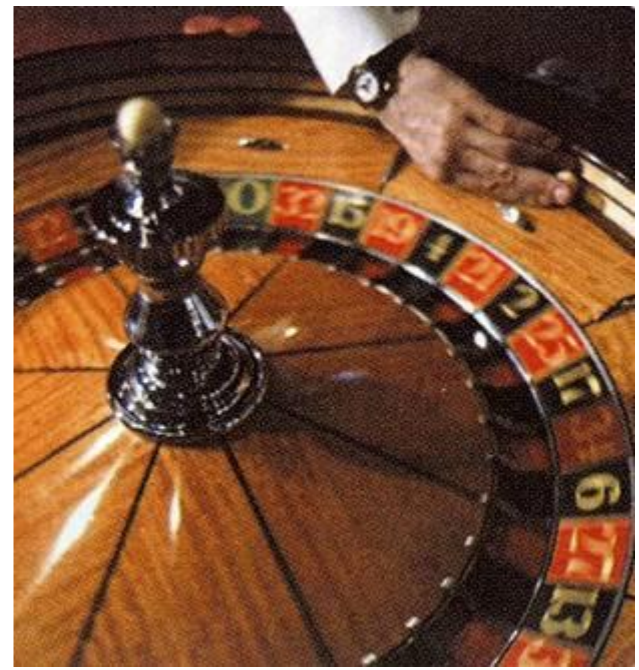
Множество значений непрерывной случайной величины несчетно.

Срок службы лампочки

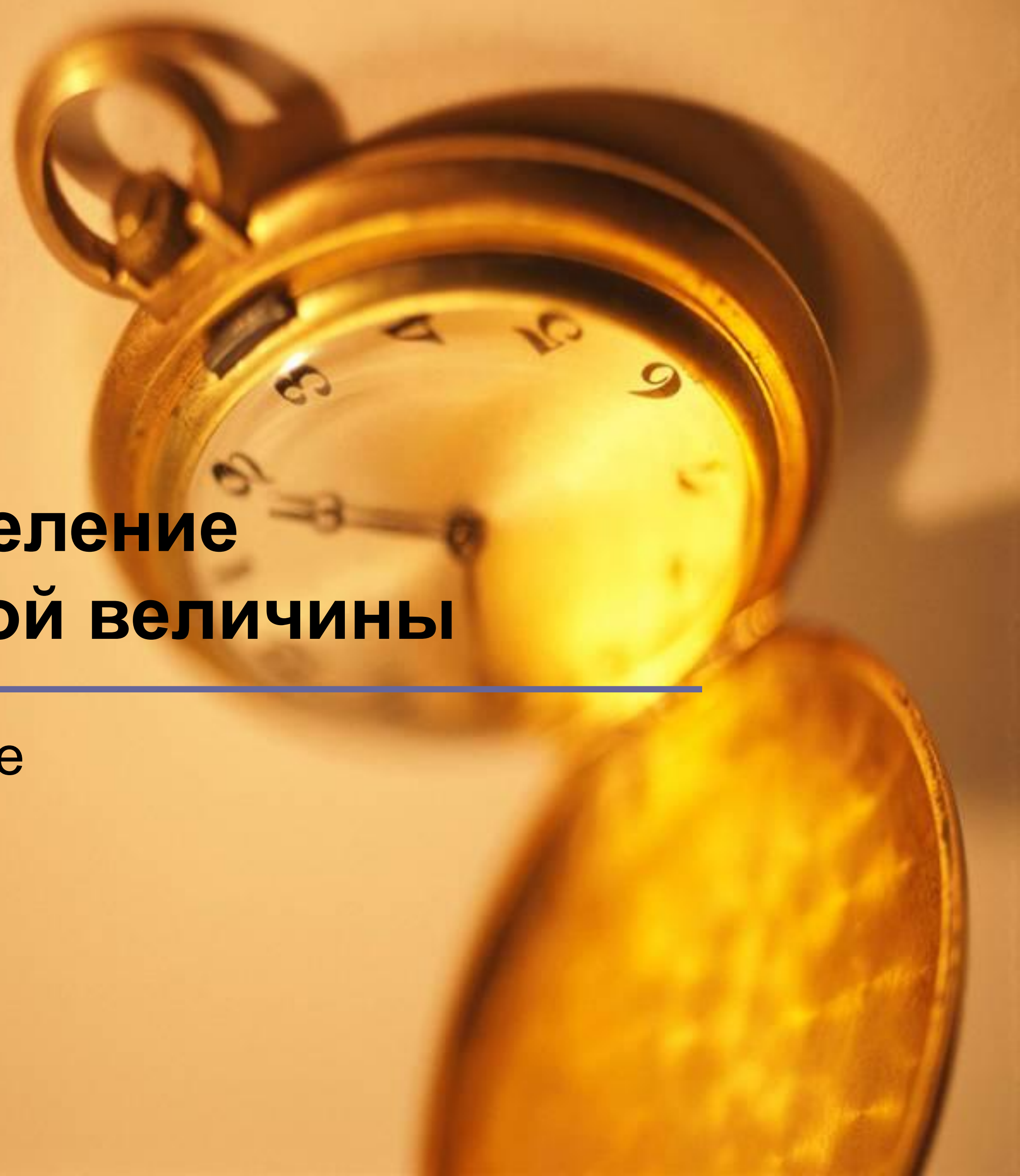
Зачем нужны случайные величины?

Случайные величины являются математическим инструментом для изучения случайных событий и явлений.





7-2. Распределение случайной величины



Определение

Пример

*

Определение. ***Случайной величиной*** называют величину, которая в результате испытания примет одно и только одно возможное значение, наперёд не известное и зависящее от случайных причин, которые заранее не могут быть учтены.

Примеры.

1. Количество родившихся мальчиков среди 6 новорождённых.

2. Расстояние, которое пролетит снаряд при выстреле.

Дискретные и ***непрерывные*** случайные величины.

Случайные величины: $X, Y, Z, \ldots$, их значения: $x, y, z, \ldots$

Определение. ***Законом распределения*** дискретной случайной величины называют соответствие между возможными значениями и их вероятностями.

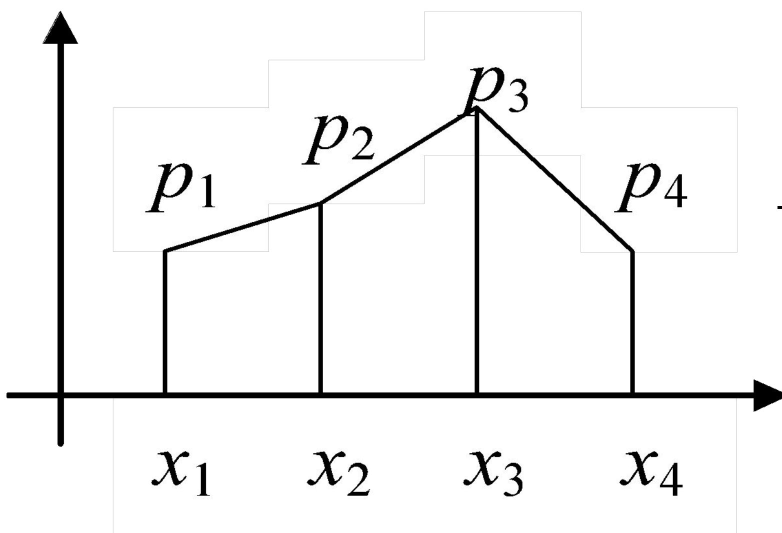
Таблично:

X	x_1	x_2	…	x_n
p	p_1	p_2	…	p_n

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$$

Аналитически: $$p(x_i) = f(i), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

Графически:



– ***многоугольник распределения***

Вероятностное распределение - таблица

Мальчики, x	Вероятность, $P(x)$
0	0,016
1	0,094
2	0,234
3	0,313
4	0,234
5	0,094
6	0,016

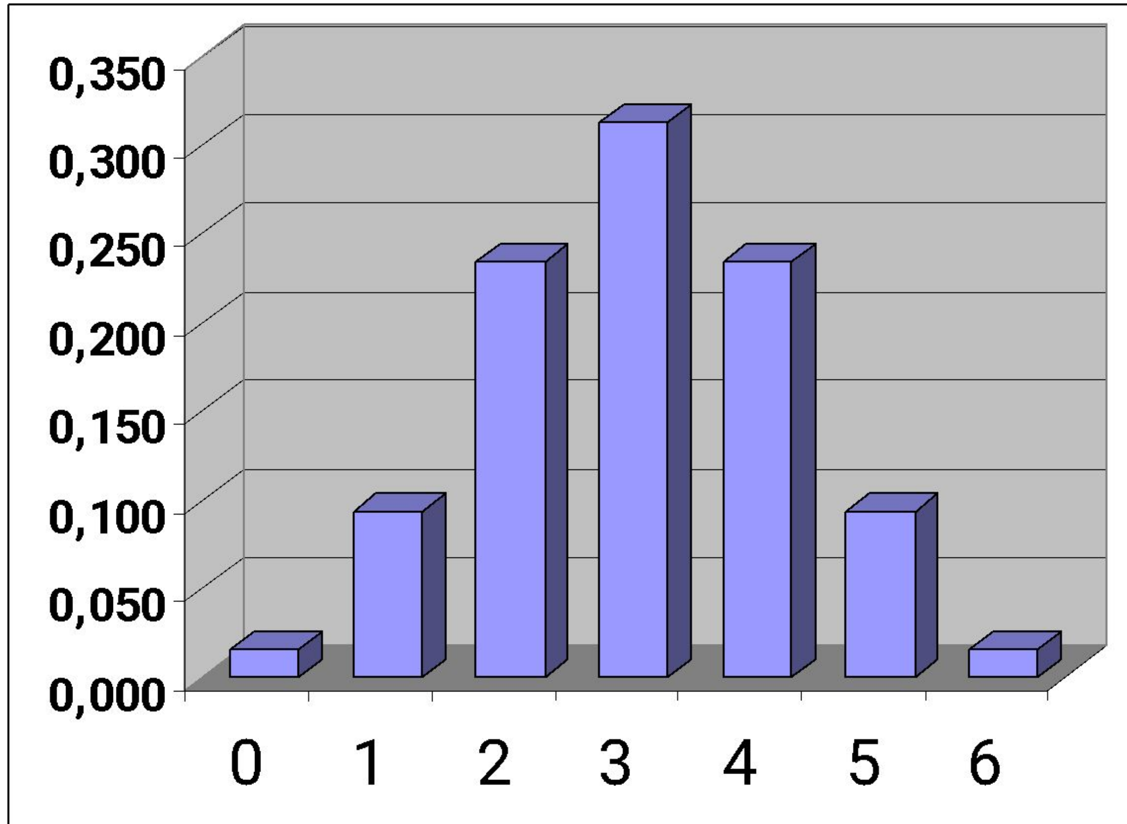
Таблица указывает на соответствие между принимаемыми значениями случайной величины и их вероятностями.

Таблица задает закон распределения случайной величины.

Вероятностное распределение - график

Гистограмма также указывает на соответствие между принимаемыми значениями случайной величины и их вероятностями.

Распределение числа мальчиков среди шести новорожденных



Вероятностное распределение - формула

Вероятностное распределение случайной величины может быть задано аналитически – **формулой**.

Пример. Формула для нахождения вероятности k мальчиков среди 6 новорожденных:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

$$где \quad C_n^k - \ число \ сочетаний$$

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Необходимое условие

Для любой дискретной случайной величины сумма вероятностей должна быть равна единице:

$$\sum P(x) = 1$$

Проверка необходимого условия

Задана случайная величина:

X	0	1	3	5
P	0,10	0,30	0,20	0,50

Проверим необходимое условие:

$$\Sigma P(X) = 0{,}100 + 0{,}300 + 0{,}200 + 0{,}500 = 1{,}100 \neq 1{,}000$$

Условие не выполнено.

Вывод. Такой случайной величины не существует.

Лотерея

На корпоративной вечеринке выпущено 100 билетов лотереи.

Предусмотрены следующие выигрыши:

1 билет	1000 руб.
10 билетов	100 руб.
89 билетов	без выигрыша

1. Построить закон распределения случайной величины X – суммы выигрыша одного билета.

2. Если билет стоит 30 руб., то построить закон распределения случайной величины Y – суммы чистого выигрыша одного билета.

Лотерея

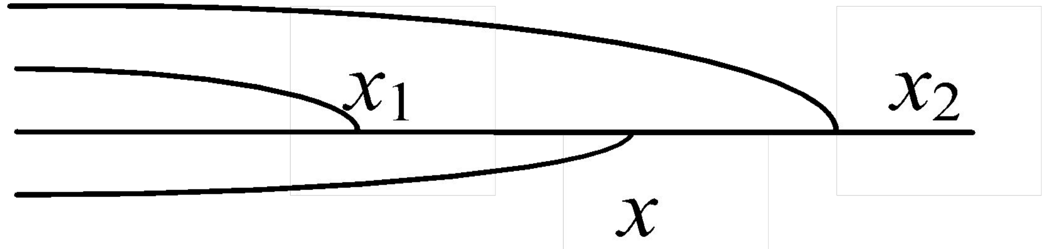
1. Закон распределения суммы выигрыша:

X	0	100	1000
P	0,89	0,10	0,01

2. Закон распределения чистого выигрыша:

Y	-30	70	970
P	0,89	0,10	0,01

$p(X < x)$



Определение. ***Функцией распределения*** случайной величины X называется функция *F(x)*, задающая вероятность того, что случайная величина X принимает значение, меньшее *x*, то есть

$$F(x) = p(\mathrm{X} < x).$$

Иногда функцию *F*(*x*) называют ***интегральной*** функцией распределения.

Определение. Случайная величина *X* называется ***непрерывной***, если её функция распределения непрерывна на всей числовой оси.

Свойства функции распределения:

1) $0 \le F(x) \le 1$

2) Если $x_1 < x_2$, то $F(x_1) \le F(x_2)$

3) $p(a \le x < b) = F(b) - F(a)$

4) Если возможные значения случайной величины принадлежат интервалу (a, b), то а) $F(x)=0$ при $x \le a$

б) $F(x)=1$ при $x \ge b$

5) Если X – непрерывная случайная величина, то вероятность того, что она примет одно определённое значение равна нулю: $p(X=x) = 0$.

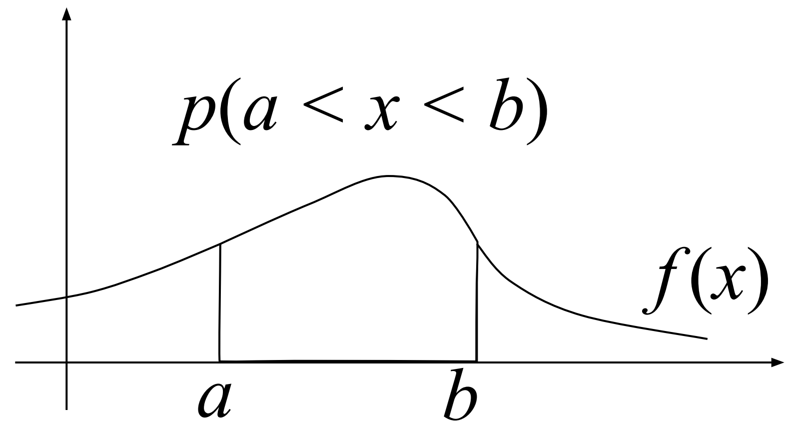
Определение. ***Плотностью распределения*** вероятностей непрерывной случайной величины X называют функцию, являющуюся производной от функции распределения:

$$\boxed{f(x) = F'(x).}$$

Также функцию $f(x)$ называют ***плотностью*** вероятности или ***дифференциальной*** функцией распределения.

Свойства плотности распределения:

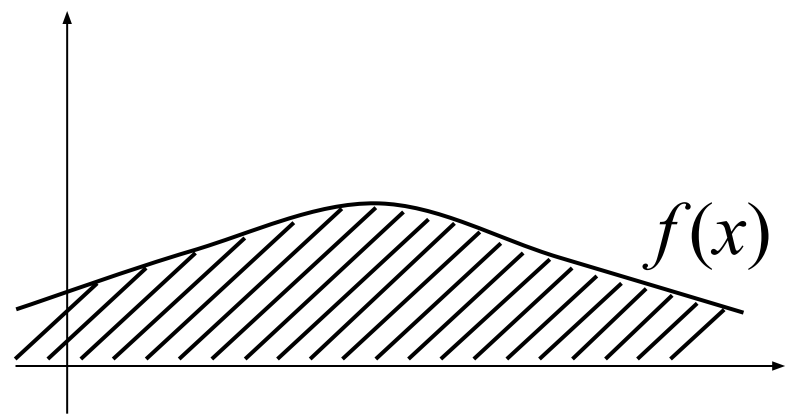
1) $$p(a < x < b) = \int_a^b f(x)dx$$



2) $$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

3) $$f(x) \geq 0$$

4) $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$



Числовые характеристики
1. Математическое ожидание

Определение

Пример

Математическое ожидание

Определение. ***Математическим ожиданием*** дискретной случайной величины X называют сумму произведений всех возможных значений этой случайной величины на соответствующие им вероятности. Обозначается $M(X)$.

Пусть

X	x_1	x_2	…	x_n
p	p_1	p_2	…	p_n

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n$$

Если случайная величина X принимает бесконечное множество значений, то

$$M(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$$

Определение. ***Математическим ожиданием*** непрерывной случайной величины X, возможные значения которой принадлежат отрезку [a, b], называется определённый интеграл

$$\boxed{M(X) = \int_a^b x f(x)dx}$$

Если возможные значения случайной величины распределены по всей оси Ox, то

$$\boxed{M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx}$$

Свойства математического ожидания

Свойство 1. Математическое ожидание постоянной величины равно этой величине: MC=C.

Свойство 2. Постоянную можно выносить: M(CX)=CM(X).

Свойство 3. Математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме их математических ожиданий: M(X+Y)= M(X)+M(Y).

Свойство 4. Математическое ожидание произведения независимых случайных величин равно произведению математических ожиданий этих величин: M(X · Y)= M(X) · M(Y).

Математическое ожидание выигрыша

1. Закон распределения суммы выигрыша:

X	0	100	1000
P	0,89	0,10	0,01

Математическое ожидание суммы выигрыша:

$$M(X) = \sum \left(x \cdot P(x) \right) =$$

$$= 0 \cdot 0{,}89 + 100 \cdot 0{,}10 + 1000 \cdot 0{,}01 = 20$$

Математическое ожидание выигрыша

2. Закон распределения чистого выигрыша:

Y	-30	70	970
P	0,89	0,10	0,01

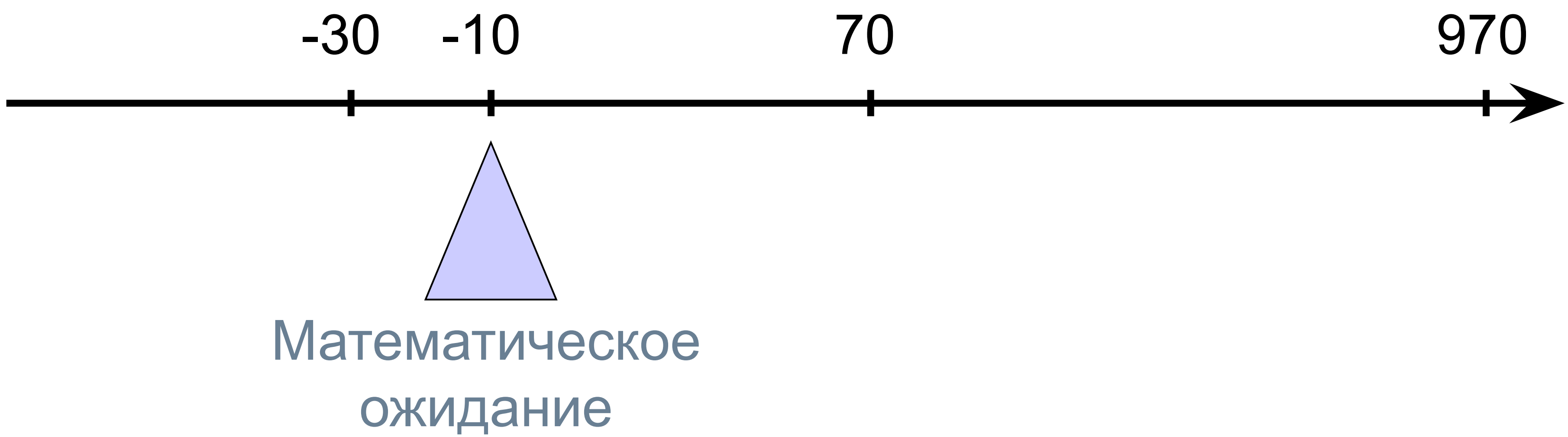
Математическое ожидание чистого выигрыша:

$$M(X) = \sum \big(x \cdot P(x)\big) =$$

$$= -30 \cdot 0{,}89 + 70 \cdot 0{,}10 + 970 \cdot 0{,}01 = -10$$

Интерпретация

Математическое ожидание есть точка равновесия:



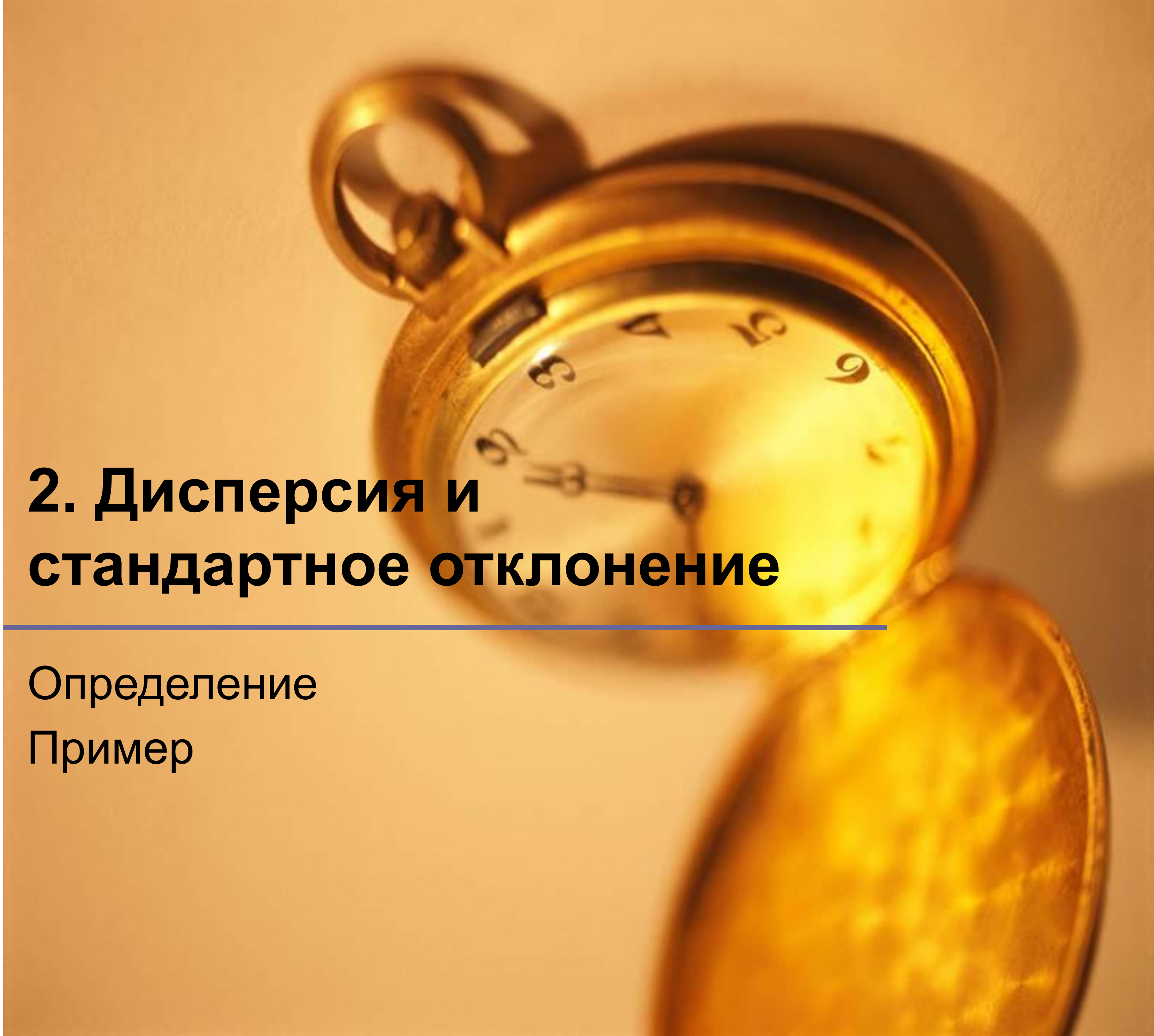
Примечание. Масштаб не сохранен

Интерпретация

Если математическое ожидание равно -10, это означает, что в среднем каждый участник проигрывает -10 руб.

Такую лотерею можно считать несправедливой, поскольку в ней предусмотрен выигрыш организатора.

Если бы математическое ожидание было равно нулю, то выигрыши одних участников брались бы из проигрышей других участников.



2. Дисперсия и стандартное отклонение

Определение

Пример

*

Дисперсия

Дисперсия (variance) случайной величины характеризует отклонение случайной величины от ее среднего значения.

Для дискретной случайной величины находится по формуле:

$$D(X) = \sum\left((x - M(X))^2 \cdot P(x)\right)$$

2. Непрерывная случайная величина

По определению $$D(X) = M[X - M(X)]^2$$

Но $$M(X) = \int_a^b xf(x)dx \quad \Rightarrow$$

$$M[X - M(X)]^2 = \int_a^b (x - M(X))^2 f(x)dx \quad \Rightarrow$$

$$D(X) = \int_a^b (x - M(X))^2 f(x)dx$$

$$D(X) = \int_a^b x^2 f(x)dx - [M(X)]^2$$

Свойства дисперсии

Свойство 1. Дисперсия постоянной величины равна нулю:

$D(C)=0$

Свойство 2. Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возведя в квадрат:

$D(Cx)=C^2D(x)$

Свойство 3. Дисперсия суммы *независимых* случайных величин равна сумме дисперсий:

$D(x+y)= D(x)+D(y)$

Вторая формула для дисперсии

Имеется вторая формула для дисперсии:

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2$$

Удобнее использовать для вычислений вручную.

Стандартное отклонение

Стандартное отклонение (standard deviation) случайной величины есть квадратный корень из дисперсии:

$$\sigma = \sqrt{D(x)}$$

Вычисление дисперсии чистого выигрыша

Закон распределения чистого выигрыша:

Y	-30	70	970
P	0,89	0,10	0,01

Дисперсия чистого выигрыша:

$$D(X) = \sum \left((x - M(X))^2 \cdot P(x) \right)$$

$$= (-30+10)^2 \cdot 0{,}89 + (70+10)^2 \cdot 0{,}10 +$$

$$+ (970+10)^2 \cdot 0{,}01 = 10600$$

Вычисление стандартного отклонения

Закон распределения чистого выигрыша:

Y	-30	70	970
P	0,89	0,10	0,01

Стандартное отклонение:

$$\sigma = \sqrt{D(x)} =$$

$$= \sqrt{10600} = 103{,}0$$

Вычисление дисперсии

x	$P(x)$	$x \cdot P(x)$	$x^2 \cdot P(x)$
0	0,016	-	-
1	0,094	0,094	0,094
2	0,234	0,468	0,936
3	0,313	0,939	2,817
4	0,234	0,936	3,744
5	0,094	0,470	2,350
6	0,016	0,096	0,576
	1,000	3,000	10,517

Вычисляем дисперсию при помощи таблицы по второй формуле:

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 =$$

$$= 10{,}517 - (3{,}0)^2 = 1{,}5$$

$$\sigma = \sqrt{D(x)} =$$

$$= \sqrt{1{,}5} = 1{,}2$$

Правило округления

Правило округления результатов вычислений состоит в том, что результат, как правило, должен иметь на один знак после запятой больше, чем точность случайной величины.

Если случайная величина принимает целые значения, среднее значение, стандартное отклонение следует округлять до одного знака после запятой.

1. Биномиальное распределение

p – вероятность события А

X – число появлений события А в n независимых испытаниях

Возможные значения: $k = 0, 1, 2, \dots, n$

Обозначим $q=1-p$. Тогда

$p(k) = p^k q^{n-k} C_n^k$ p – параметр распределения

Бином Ньютона: $$(p+q)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k}$$

$M(X) = np$ и $D(X) = npq$

2. Распределение Пуассона

n – очень большое, p – очень мала, $np = \lambda$

X – число появлений события А в n независимых испытаниях

Возможные значения: $k = 0, 1, 2, \ldots, n$

Тогда $p(k) = p^k q^{n\text{-}k} C_n^k$.

Можно показать, что $\lim\limits_{n \to \infty} C_n^k p^k q^{n-k} = \dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \Rightarrow$

$$p(k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

λ – параметр распределения

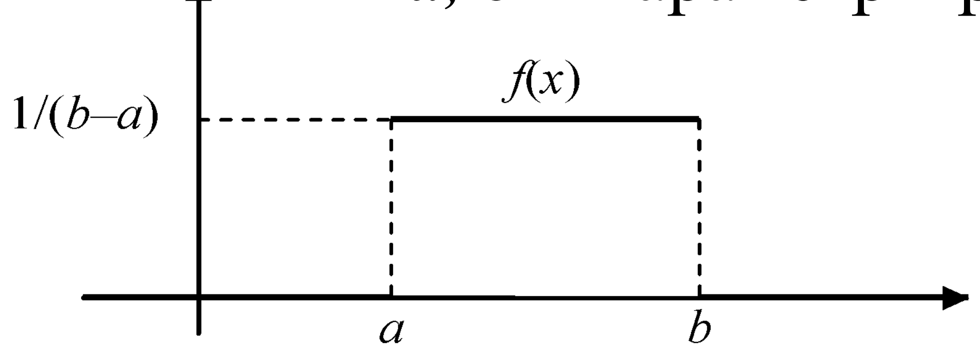
$$M(X) = D(X) = \lambda$$

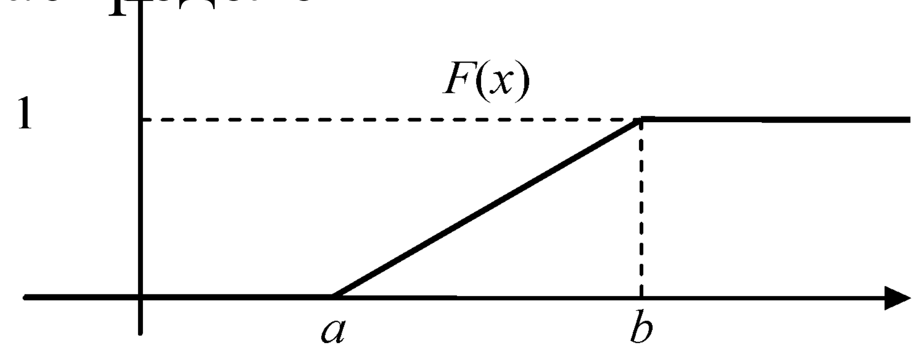
1. Равномерное распределение

В интервале (*a*, *b*) постоянная плотность распределения

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \dfrac{1}{b-a}, & a \le x \le b \\ 0, & x > b \end{cases} \qquad F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a \le x \le b \\ 0, & x > b \end{cases}$$

a, *b* – параметры распределения



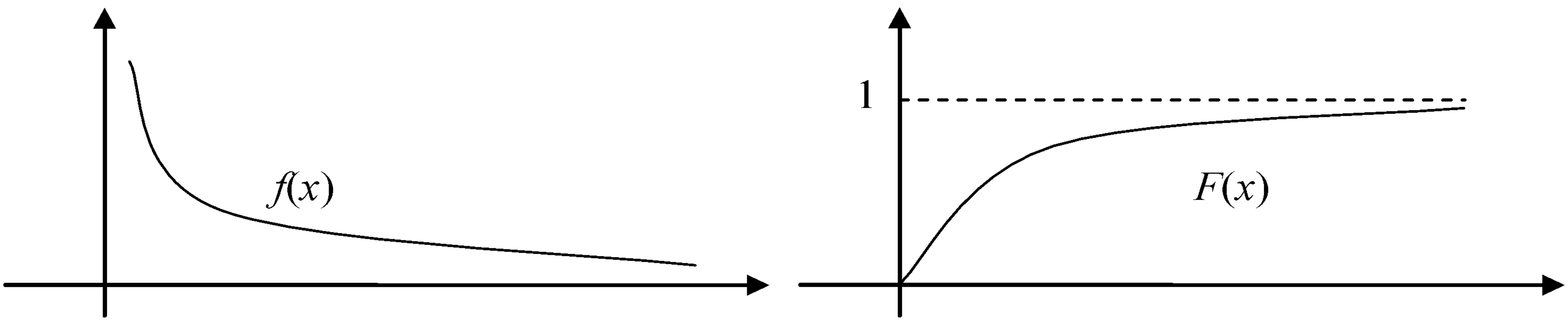


$$M(X) = \frac{a+b}{2} \quad \text{и} \quad D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

2. Показательное распределение

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \ge 0 \end{cases} \qquad F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \ge 0 \end{cases}$$

λ – параметр распределения

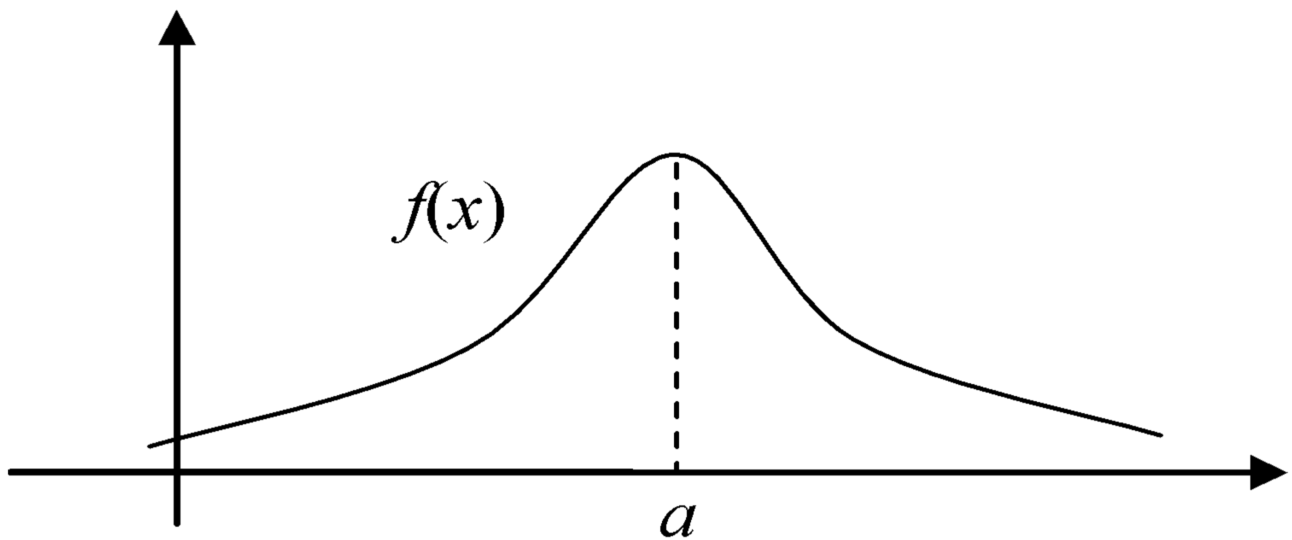


$$M(X) = \frac{1}{\lambda} \quad \text{и} \quad D(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

3. Нормальное распределение

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-a)^2}{2\sigma^2}} \qquad F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{\frac{-(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx$$

a, *σ* – параметры распределения



$$M(X) = a \quad \text{и} \quad D(X) = \sigma^2$$

ЕЩЕ НЕ ВСЕ!

Впереди

Математическая статистика