

**М.Әуезов атындағы Оңтүстік Қазақстан Мемлекеттік
университеті**

ДИПЛОМДЫҚ ЖҰМЫСТЫҢ ТАҚЫРЫБЫ:

**Арифметикалық және геометриялық прогрессияларды
есептер шығаруда қолдану**

- ◆ **Орындаған: Қабыл А.**
 - ◆ **Тобы: 14-1а**
 - ◆ **Ғылыми жетекшісі: ф-м.ғ.к Қаратаев Ж.**
-

МАЗМҰНЫ

	Кіріспе
1	Арифметикалық және геометриялық прогрессиялардың анықтамалары
1.1	Прогрессияның шығу тарихы
1.2	Сандық тізбектер
1.3	Арифметикалық прогрессияның n -ші мүшесінің формуласы
1.4	Геометриялық прогрессияның n -ші мүшесінің формуласы
2	Арифметикалық және геометриялық прогрессиялардың алғашқы n -мүшесінің қосындысының формулаларын есептер шығаруда қолдану
2.1	Арифметикалық прогрессияның алғашқы n мүшесінің қосындысының формуласы
2.2	Геометриялық прогрессияның алғашқы n мүшесінің қосындысының формуласы
2.3	Шектеусіз геометриялық прогрессияның $ q < 1$ болғандағы қосындысы
2.4	Прогрессияларға берілген есептерді шығарудың әдістері
2.5	Прогрессиялардың өмірде қолданылуы
	Қорытынды
	Пайдаланылған әдебиеттер



Дипломдық жұмыстың мақсаты - прогрессияға арналған есептерді шығару арқылы оқушылардың ойлау қабілеттерін арттырып, теориялық білімді тереңдете түсуі, пәнге деген қызығушылығын қалыптастыру; оқушылардың логикалық ой өрісін кеңейтіп, ізденушілік қасиеттерін тәрбиелеу.

Ғылыми жаналығы - прогрессияларға берілген есептерді шығарудың әдістерін шешуге үйрету арқылы математикаға қызығушылығының артуы.

Практикалық құндылығы - дипломдық жұмыс математика саласында ғана емес басқада салаларда прогрессияларды пайдалану өте тиімді.

Жетекші идея прогрессияларға берілген есептерді шығарудың әдістері мен түрлерін үйрете отырып, математикалық қызығушылығын арттыруды қарастыру

Арифметикалық прогрессия



А н ы қ т а м а Екіншісінен бастап әрбір мүшесі өзінің алдындағы мүшеге бірдей санды қосқанға тең болатын тізбек арифметикалық прогрессия деп аталады.

Басқаша айтқанда, егер кез келген натурал n үшін

$$a_{n+1} = a_n + d$$

(мұндағы d — қандай да бір сан) шарты орындалса, онда (a_n) тізбегі арифметикалық прогрессия болады. Арифметикалық прогрессияның анықтамасынан екіншісінен бастап кез келген мүшесі мен оның алдындағы мүшенің айырмасы d -ге тең, яғни кез келген натурал n үшін

$$a_{n+1} - a_n = d$$

теңдігі тура екендігі шығады, d саны арифметикалық прогрессияның айырмасы деп аталады.

Геометриялық прогрессия



А н ы қ т а м а Екіншісінен бастап әрбір мүшесі өзінің алдындағы көршілес мүшені бірдей санға көбейткенде шыққан нөлден өзгеше сандардың тізбегі *геометриялық прогрессия* деп аталады.

Басқаша айтқанда, кез келген натурал n үшін

$$b_n \neq 0 \text{ және } b_{n+1} = b_n \cdot q$$

(мұндағы q — қандай да бір сан) шарттары орындалса, (b_n) тізбегі геометриялық прогрессия болады. Мысалы, 2 санының натурал дәрежелерінің тізбегін (b_n) арқылы белгілейік. Бұл жағдайда кез келген натурал n үшін $b_{n+1} = b_n \cdot 2$ теңдігі тура, мұндағы $q = 2$.

Геометриялық прогрессияның екіншісінен бастап кез келген мүшесінің өзінің тікелей алдындағы мүшеге қатынасы q -ге тең, яғни кез келген натурал n үшін

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = q$$

теңдігі тура болатындығы анықтамадан шығады.

q санын *геометриялық прогрессияның еселігі* деп атайды.



Зерттеу әдісі

Педагогикалық және әдістемелік әдебиеттерден тақырыпқа сай материалдар жинақтап, озат мұғалімдердің сабақтарына қатысу, бақылау, ізденушілік және зерттеушілік жұмыстары.

Зерттеу объектісі

Арифметикалық және геометриялық прогрессияға арналған есептерді шығарту процесі.

Зерттеу мақсаты

Прогрессияға арналған есептерді шығару арқылы оқушылардың ойлау қабілеттерін арттырып, пәнге деген қызығушылығын қалыптастыру; оқушылардың логикалық ой өрісін кеңейтіп, ізденушілік қасиеттерін тәрбиелеу.

Зерттеу міндеті

Прогрессияға берілген есептердің түрлері және оны оқытуда пайдалану.

жұмыстың болжамы

Прогрессияға берілген есептерді шығару арқылы оқушылардың математикалық деңгейі, пәнге деген қызығушылығының нәтижесі қалыптасады.

Арифметикалық прогрессияның n -ші мүшесінің және алғашқы n мүшесінің қосындысының формуласы



$$a_n = a_1 + d(n - 1).$$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}.$$

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n - 1)}{2} n.$$

Геометриялық прогрессияның n-ші мүшесінің және алғашқы n мүшесінің қосындысының формуласы



$$b_n = b_1 q^{n-1}$$

$$b_n = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$$

$$S_n = \frac{b_1 (q^n - 1)}{q - 1},$$

2.2 Геометриялық прогрессияның алғашқы n мүшесінің қосындысының формуласы

1 -мысал

1, a, a^2, \dots түрінде берілген геометриялық прогрессиялардың алғашқы алты мүшесінің қосындысын табыңдар.

Шешуі:

$$b_1 = 1$$

$$b_2 = a.$$

$$b_3 = a^2$$

$$q = \frac{b_2}{b_1} = a.$$

$$S_6 = \frac{b_1(q^6 - 1)}{q - 1} \quad (q \neq 1)$$

$$S_6 = \frac{1 \cdot (a^6 - 1)}{a - 1} = \frac{a^6 - 1}{a - 1} = a^5 + a^4 + a^3 + a^2 + a + 1.$$

Жауабы:

$$S_6 = a^5 + a^4 + a^3 + a^2 + a + 1.$$

2-мысал



$1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5 + 3^6 + 3^7$ өрнегінің қосындысын табыық.

Шешуі: Бұл қосынды геометриялық прогрессияның алғашқы сегіз мүшесінің қосындысы болғандықтан, $b_1 = 1, q = 3, n = 8$ және $q > 1$ екенін ескеріп және

(6) формуланы қолдану арқылы S_8 -ді таба аламыз,

сонда
$$S_8 = \frac{1(3^8 - 1)}{(3 - 1)} = \frac{6561 - 1}{2} = \frac{6560}{2} = 3280.$$

Жауабы: $S_8 = 3280.$

Геометриялық прогрессияға арналған стандартты емес есептерді шығару



3-мысал

Геометриялық прогрессияның алғашқы жүз тоғызыншы мүшесінің қосындысы алғашқы жүзінші мүшесінің қосындысынан 12-ге артық. Осы прогрессияның алғашқы тоғыз мүшесінің қосындысын табыңдар, егер еселігі q -ге тең болғандағы.

Шешуі.

Шарты бойынша: $S_{109} - S_{100} = 12$

$$\frac{b_1(q^{109} - 1)}{q - 1} - \frac{b_1(q^{100} - 1)}{q - 1} = 12 \qquad \frac{b_1}{q - 1}(q^{109} - 1 - q^{100} + 1) = 12$$

$$\frac{b_1}{q - 1}(q^{109} - q^{100}) = 12 \qquad \frac{b_1 \cdot q^{100}}{q - 1}(q^9 - 1) = 12 \qquad \frac{b_1(q^9 - 1)}{q - 1} = \frac{12}{q^{100}}$$

Алғашқы тоғыз мүшесінің қосындысы $S_9 = \frac{b_1(q^9 - 1)}{q - 1} = \frac{12}{q^{100}}$

Жауабы: $\frac{12}{q^{100}}$

Геометриялық прогрессияға арналған стандартты емес есептерді шығару

4-мысал

$$\sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{2}{3}} + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} + \dots$$

шексіз геометриялық прогрессияның қосындысын табыңдар.

Шешуі

$$q = \frac{b_2}{b_1} = \sqrt{\frac{2}{3}} : \sqrt{\frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \pm \frac{2}{3} \Rightarrow q = \frac{2}{3}.$$

$$S = \frac{b_1}{1-q} = \frac{\sqrt{\frac{3}{2}}}{1-\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot 3 = \frac{3\sqrt{6}}{2}$$

Жауабы: $S = \frac{3\sqrt{6}}{2}$

2.5 Прогрессиялардың өмірде қолданылуы



Өнеркәсіптегі прогрессия

5-мысал

Еркін құлаған дене бірінші секундта 5м, ал әрбір келесі секундта 10м артық жүрді. Егер дене шахта түбіне 5с жеткені белгілі болса, шахтаның тереңдігі қандай?

Шешуі: $a_1=5$, $d=10$. $a_5=a_1+4d$; $a_5=45$.

$S_5=(a_1+a_5) \cdot n:2$; $S_5=(5+45) \cdot 5:2=125$;

Шахтаның тереңдігі 125м.

Жауабы: 125м.



Биологиядағы прогрессиялар



Бактериялардың белсенді көбеюін пайдаланады: тамақ өнеркәсібінде (сусындар, сүт тағамдарын, тұздауда т.с.с), фармацевтика өнеркәсібінде (дәрі және вакциналарды даярлауда), ауыл шаруашылығында (силос, әр түрлі мал жемдерін даярлауда), коммуналды шаруашылықтарда және табиғатты қорғау іс – шараларында (тұрып қалған суларды тазалауда, мұнай қалдықтарының зардаптарын жойғанда).

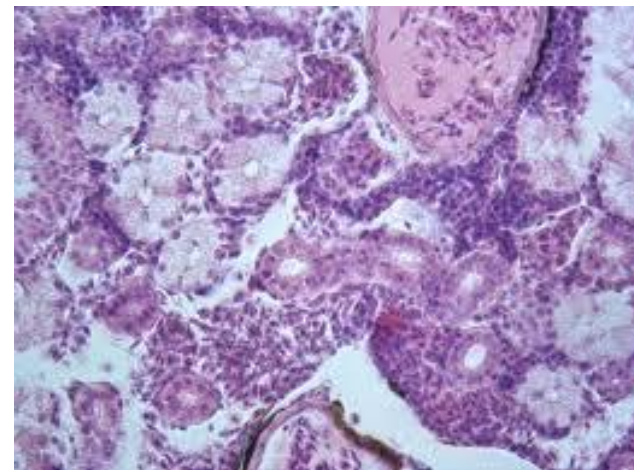
6-мысал

Бактерия адам ағзасына түскеннен кейін, 20- минутта екіге, олардың әр қайсысы келесі 20- минутта екіге т.с.с бөлінеді. Адам ағзасында тәуліктің аяғында қанша бактерия пайда болатынын есептейік.

Шешуі: Тәулікте 1440 минут, әр жиырма минутта жана ұрпақ пайда болады- бір тәулікте 72 ұрпақ. Геометриялық прогрессияның алғашқы n мүшесінің қосындысының формуласы бойынша, мұндағы

$$b_1=1, q=2, n=72, \text{ сонда } S_{72}=2^{72}-1=4\ 722\ 366\ 482\ 869\ 645\ 213\ 696 - 1 = \\ = 4\ 722\ 366\ 482\ 869\ 645\ 213\ 695.$$

Барлық бактерия саны: 4 септиллион 722 сектиллион 366 квинтиллион 482 квадриллион 869 триллион 645 миллиард 709 миллион 213 мың 695



Прогрессияның банктердегі есептеулерде қолданылуы



7-мысал

Банкідегі есептеулер:

Салым 10 000 тг., банк жылдық өсімін 10% берсін, салым – 5 жылға салынсын. Егер сіз қарапайым процент стратегиясын таңдасаңыз, 5 жылда 5000 тг, яғни 15 000 тг.



Орыс әдебиетіндегі прогрессия



«Евгения Онегиннің» өлең жолдарынан.

«...Не мог он ямба от хорея

Как мы не бились отличить...».

Ямб – бұл жұп буындарға екпін түсіру: 2; 4; 6; 8;...буындар нөмірі арифметикалық прогрессия, алғашқы мүшесі 2 және прогрессияның айырмасы да 2.

Хорей – бұл тақ буындарға екпін түсіру. буындар нөмірі арифметикалық прогрессия, алғашқы мүшесі 1 және прогрессияның айырмасы 2.


8-мысал

Ямб. «Мой дядя самых честных правил...», прогрессия 2; 4; 6; 8;...

Хорей. «Я пропал, как зверь в загоне» Б.Л.Пастернак,

«Буря мглою небо кроет»

А.С. Пушкин, прогрессия 1; 3; 5; 7



Тендеуді шеш: $\sqrt[3]{\chi^{23}\sqrt{\chi^{23}\sqrt{\chi^2}} \dots} = 49.$

Бөлшек көрсеткішті дәреженің анықтамасын пайдаланып тендеуді түрлендіру арқылы:

$\chi^{\frac{2}{3}} \times \chi^{\frac{2}{9}} \times \chi^{\frac{2}{27}} \times \dots = 49$ тендігін аламыз, сонда негіздері бірдей дәрежелерді көбейту ережесі бойынша $\chi^{\frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2}{27} + \dots} = 49.$ Ал дәреженің көрсеткішіндегі қосынды шектеусіз геометриялық прогрессияның қосындысының формуласын пайдалансақ, онда:

$$\chi^{1 - \frac{1}{3}} = 49, \text{ осыдан } \chi = 49.$$

58-мысал Өрнектің мәнін тап:

$$\sqrt{2^3 \sqrt{5^2 \sqrt{2^3 \sqrt{5^3}} \dots}}$$

Шешуі: Бөлшек көрсеткішті дәреженің анықтамасын пайдаланып, өрнекті түрлендірсек, онда

$$2^{\frac{3}{2}} \times 5^{\frac{3}{4}} \times 2^{\frac{3}{8}} \times 5^{\frac{3}{16}} \dots = 2^{\frac{3}{2}} \times 2^{\frac{3}{8}} \dots \times 5^{\frac{3}{4}} \times 5^{\frac{3}{16}} \dots = 2^{1 - \frac{1}{4}} \times 5^{1 - \frac{1}{4}} = 2^2 \times 5 = 4 \times 5 = 20.$$

Енді геометриялық мазмұнды төмендегідей есепті қарастырайық.



11-мысал $\frac{x-1}{x^2} + \frac{x-2}{x^2} + \frac{x-3}{x^2} + \dots + \frac{1}{x^2} = \frac{7}{15}$, мұндағы $x \neq 0$ бүтін сан.

Шешуі: 1) $\frac{(x-1)+(x-2)+(x-3)+\dots+1}{x^2} = \frac{7}{15} (x \neq 0)$.

Бөлшектің алымында $a_1 = x-1$, $a_n = 1$, $d = (x-2) - (x-1) = -1$ болатын арифметикалық прогрессия.

$$2) S_n = \frac{(x-1)+1}{2} \cdot n = \frac{x}{2} \cdot n.$$

3) $a_n = a_1 + d(n-1)$ формуласы бойынша $1 = (x-1) - 1(n-1)$ немесе $1 = x - 1n + 1$, $n = x - 1$.

4) Берілген теңдеуді $\frac{\frac{x}{2}(x-1)}{x^2} = \frac{7}{15} \Leftrightarrow \frac{x-1}{2x} = \frac{7}{15} (x \neq 0)$ түрінде жазамыз, осыдан $x = 15$.

63-мысал $a^2; b^2; c^2$ сандары арифметикалық прогрессия жасайды.

$\frac{1}{b+c}; \frac{1}{a+c}; \frac{1}{a+b}$ сандары да арифметикалық прогрессия жасайтынын дәлелдеу керек.

Шешуі: 1) Есептің шарты бойынша $b^2 - a^2 = c^2 - b^2$.

2) Қарастырамыз: $\frac{1}{a+c} - \frac{1}{b+c} = \frac{b-a}{(a+c)(b+c)} = \frac{b^2 - a^2}{(a+c)(b+c)(a+b)}$. Осыдан

$\frac{1}{a+c} - \frac{1}{b+c} = \frac{1}{a+b} - \frac{1}{a+c}$ екендігі шығады, ендеше $\frac{1}{b+c}; \frac{1}{a+c}; \frac{1}{a+b}$ сандары арифметикалық прогрессия жасайды.



10-мысал Арифметикалық прогрессияның мүшелері \sqrt{x} , $\sqrt{5x+4}$, $\sqrt{12x+13}$ болатын x -тің барлық мәндерін табыңдар.

Шешуі: Арифметикалық прогрессияның ортасын табайық:

$$\sqrt{5x+4} = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{12x+13}}{2}$$

$$2\sqrt{5x+4} = \sqrt{x} + \sqrt{12x+13}$$

екі бөлігін де квадрат дәрежеге шығарсақ,

$$4(5x+4) = x + 2\sqrt{x(12x+13)} + 12x + 13 \text{ ықшамдасақ,}$$

$$2\sqrt{x(12x+13)} = 7x + 3 \text{ тағы да квадраттасақ, сонда}$$

$$4(12x^2 + 13x) = 49x^2 + 42x + 9$$

$$x^2 - 10x + 9 = 0$$

$$x_1 = 1 \quad x_2 = 9$$

Жауабы: $\{1, 9\}$.



9- мысал x -тің қандай мәндерінде, $\lg 2; \lg(2^x - 6); \lg(2^x + 3^4)$ үш сан арифметикалық прогрессия құрайтынын табындар.

Шешуі:

Арифметикалық прогрессияның ортасын құрайық:

$$\lg(2^x - 6) = \frac{\lg 2 + \lg(2^x + 34)}{2}$$

$$2\lg(2^x - 6) = \lg 2 + \lg(2^x + 34)$$

$$2\lg(2^x - 6)^2 = \lg(2(2^x + 34))$$

потенцирлейміз

$$(2^x - 6)^2 = 2(2^x + 34)$$

жаңа айнымалы енгіземіз

$$2^x = a, \quad a > 0$$

$$(a - 6)^2 = 2(a + 34)$$

$$a^2 - 12a + 36 - 2a - 68 = 0$$

$$a^2 - 14a - 32 = 0$$

$$a_{1/2} = \frac{14 \pm \sqrt{196 + 128}}{2} = \frac{14 \pm \sqrt{324}}{2} = \frac{14 \pm 18}{2}$$

$$a_1 = 16 \quad a_2 = -2$$

$$2^x = 16 \quad 2^x \neq -2$$

$$2^x = 2^4$$

$$x = 4$$

Жауабы: $x = 4$.



12-мысал. Арифметикалық прогрессияның алғашқы үш мүшесін табыңдар, егер $a_1 + a_3 + a_5 = -12$ және $a_1 \cdot a_3 \cdot a_5 = 80$ белгілі болғандағы.

Шешуі:

Шарт бойынша:

$$\begin{cases} a_1 + a_3 + a_5 = -12 \\ a_1 \cdot a_3 \cdot a_5 = 80 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + (a_1 + 2d) + (a_1 + 4d) = -12 \\ a_1 \cdot (a_1 + 2d) \cdot (a_1 + 4d) = 80 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 3a_1 + 6d = -12 \\ a_1(a_1 + 2d)(a_1 + 4d) = 80 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + 2d = -4 \\ a_1(a_1 + 4d) = -20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = -4 - 2d \\ a_1(a_1 + 4d) = -20 \end{cases}$$

$$(-4 - 2d)(-4 + 2d) = -20 \quad (-1)\text{-ге көбейтсек}$$

$$(2d + 4)(2d - 4) = 20$$

$$4(d + 2)(d - 2) = 20$$

$$(d + 2)(d - 2) = 5$$

$$d^2 - 4 = 5$$

$$d^2 = 9$$

$$d = \pm 3$$

$$d = -3 \quad a_1 = 2 \quad a_2 = -1 \quad a_3 = -4$$

$$d = 3 \quad a_1 = -10 \quad a_2 = -7 \quad a_3 = -4$$

Жауабы: 2; -1; -4 немесе -10; 7; -4.

Қорытынды

Бастапқыда арифметикалық прогрессияға байланысты есептерді шығару жолдары, одан соң геометриялық прогрессияға байланысты есептерді шығарудың жолдары көрсетілді.

Прогрессияның формулалары мен негізгі мәліметтерін білуі;

Есептің шартын теңдеулер жүйесі түрінде жазуға үйрету;

Есептерді шығарғанда прогрессия қасиеттерін пайдалануға үйрету;

Прогрессияға арналған стандартты емес есептерді шығаруға үйрету;

Күрделі прогрессиялық есептерді шығаруға баулу;

Қорыта келгенде,
мына
тақырыптар
оқытылып
меңгерілді

Пайдаланылған әдебиеттер



Негізгі әдебиеттер

- 1 Әбілқасымова А.Е., Бекбоев И., Абдиева А., Жұмағұлова З.А. Алгебра: Жалпы білім беретін мектептің 9 – сыныбына арналған оқулық Алматы: «Мектеп» баспасы 2009 – 184 б
- 2 Рахымбек Д. Математиканы оқыту әдістемесі: Сандық жүйе, түрлендірулер, тендеулер, теңсіздіктер /Мұғалімдерге арналған кітап/ 1-кітап. Д. Рахымбек. – Шымкент: ОҚМПИ, 2015- 232 б.
- 3 Қабасұлы М., Прогрессияларға берілген есептер. «Математика және физика» журналы №4. 2008
- 4 Рустюмова И.П., Рустюмова С.Т. Математикадан бірыңғай ұлттық тестілеуге (БҰТ) дайындалуға арналған тренажер. Бірінші басылым-Алматы 2013-4886
- 5 Мусалимова М.К. Қарапайым математикадан есептер жинағы Оқу құралы.-Алматы ҚазМемҚызПИ 2009
И.П. Рустюмова, С.Т. Рустюмова Пособие для подготовки к единому национальному тестированию по математике . учебно-методическое пособие.-Алматы, 2011
- 6 Баймағанбетова Л. Оқушылардың шығармашылық танымын дамыту «Математика және физика» журналы №6 2011
- 11 Нұрлыбаева А., Есполов Н. Күрделі прогрессия және олардың қосындысы «Математика және физика» №4 2011
- 12 13 Рустюмова И.П., Рустюмова С.Т. Математикадан бірыңғай ұлттық тестілеуге (БҰТ) дайындалуға арналған тренажер. Бірінші басылым-Алматы 2013-4886
- 14 Қазақстан Республикасының мемлекеттік жалпыға міндетті білім беру стандарты, ҚР. МЖМБС. 6.08.018. Астана-2010
- 15 Бекмолдаева Р.Б., Аширбаев Н.К., Дуйсебаева П.С. Математикалық есептерді шығару практикумы. Оқу құралы.- Шымкент: «Нұрлы бейне», 2013.-314б.
- 16 Шыныбеков Ә.Н. Алгебра: Жалпы білім беретін мектептің 9 сыныбына арналған оқулық. Алматы: Атамұра, 2013 – 192б
- 17 Қосымша әдебиеттер
- 3 Тоқмолдина А., Шексіз геометриялық прогрессияның қосындысының формуласын пайдаланып есептер шығару. «Математика және физика» журналы №3. 2008
- 4 Жолымбаев О.М., Берікханова Г.Е., Бахтинова Э.Т. «Математика» Бастапқы және орта кәсіптік білім алатын оқушыларға арналған. Семей, 2007