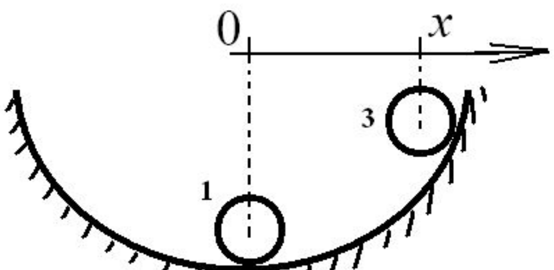
Тема 6.
Анализ устойчивости линейных непрерывных систем

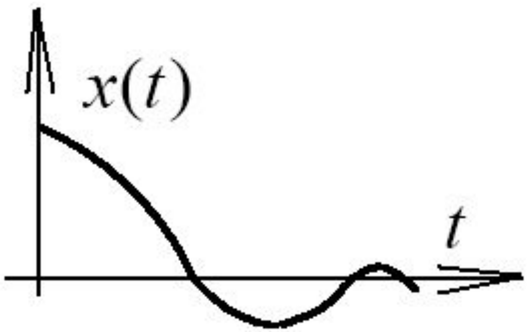
Обсуждаемые вопросы

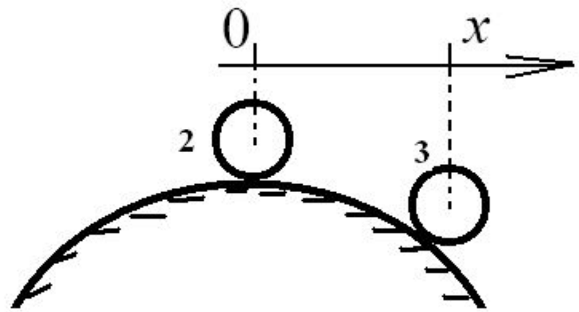
1. ***Состояние равновесия динамической системы***
2. ***Понятие устойчивости состояния равновесия***
3. ***Условие устойчивости***
4. ***Критерии устойчивости линейных систем***

Типы состояния равновесия динамической системы

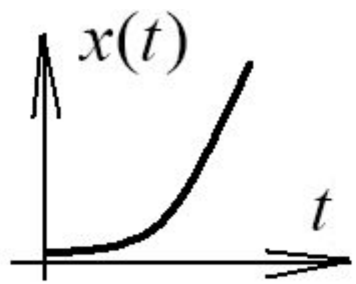


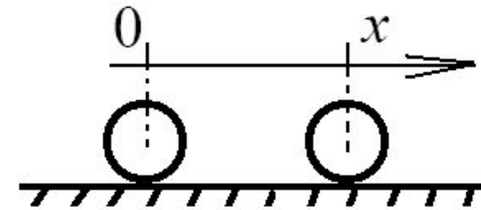
1 - устойчивое состояние равновесия
3 - возмущенное состояние



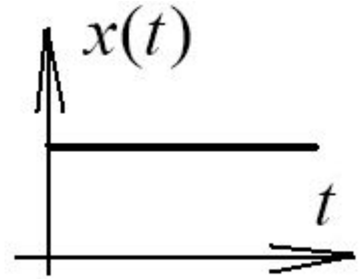


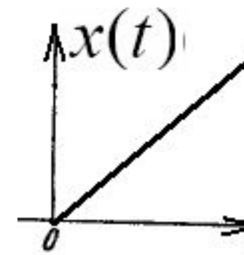
2 - неустойчивое состояние равновесия
3 - возмущенное состояние





нейтрально-устойчивое состояние





Определение: Состояние системы называется равновесным, если система может находиться в этом состоянии как угодно долго

Состояние равновесия динамической системы

Рассмотрим автономную динамическую систему, модель которой задана системой однородных дифференциальных уравнений

$$\dot{X} = f(X)$$

$$\dot{X} = f(X) \rightarrow \boxed{\dot{X} = 0} \rightarrow f(X) = 0$$

X_0 **называется точкой равновесия (состояние равновесия) динамической системы, если**

$$f(X_0) = 0$$

Состояние равновесия динамического звена

$$W(p)=\frac{B(p)}{A(p)} \qquad W(p)=\frac{b_n p^{n-1}+\cdots+b_3p^2+b_2p+b_1}{p^n+a_np^{n-1}+\cdots+a_3p^2+a_2p+a_1}$$

$$y^{(n)}+a_ny^{(n-1)}+\cdots+a_2y^{(1)}+a_1y=b_nu^{(n-1)}+\cdots+b_2u^{(1)}+b_1u$$

Условие равновесия для динамического звена

$$y(t)=y_0=const,\ \ y^{(i)}=0\ \forall\ i=1,2,\ldots n$$

$$u(t)=u_0=const, u^{(j)}=0\ \forall\ j=1,2,\ldots n-1$$

Уравнение в отклонениях от состояния равновесия $x=y-y_0$

$$x^{(n)}+a_nx^{(n-1)}+\cdots+a_2x^{(1)}+a_1x=0$$

Определение:

Состояние равновесия $x=0,\ \ x^{(i)}=0\ \forall\ i=1,2,\ldots n$ называется устойчивым, если $\lim\limits_{t\to\infty}x(t)=0$.

Состояние равновесия для уравнений в пространстве состояний ОУ

$$\dot{X} = AX + Bu \qquad u(t) = const, \;\; X(t) = const,$$

$$y = CX \qquad \dot{X} = 0$$

Уравнение в отклонениях от состояния равновесия

$$\dot{X} = 0 \;\;\Rightarrow\;\; 0 = AX + Bu_0 \;\;\Rightarrow\;\; X_0 = ?$$

$$X_0 = -A^{-1}Bu_0 \;\;\Rightarrow\;\; Z = X - X_0 \;\;\Rightarrow\;\; \dot{Z} = \dot{X}$$

$$\dot{Z} = A(Z + X_0) + Bu_0 \;\Rightarrow \dot{Z} = A(Z - A^{-1}Bu_0) + Bu_0 \;\;\Rightarrow\;\; \dot{Z} = AZ$$

Для системы $\dot{Z} = AZ$ условие равновесия есть $\dot{Z} = 0$. Пусть $\det A \neq 0$, тогда $Z = 0$ есть единственное состояние равновесия системы.

Определение: Состояние равновесия $Z = 0$ системы $\dot{Z} = AZ$ называется устойчивым, если $\lim\limits_{t\to\infty} Z(t) = 0$.

Замечание 1

Если

1. ***Состояние равновесия динамической системы является единственным***
2. ***Состояние равновесия динамической системы является устойчивым***

Тогда данная система называется <u>устойчивой динамической системой</u>

Замечание 2

Свойство устойчивости состояния равновесия <u>линейной динамической системы</u> зависит от распределения корней характеристического полинома этой системы на комплексной плоскости

Юркевич В.Д.

Условие устойчивости линейной системы

$$x^{(n)} + a_n x^{(n-1)} + \cdots + a_2 x^{(1)} + a_1 x = 0$$

$$(p^n + a_n p^{n-1} + \cdots + a_2 p + a_1)x(t) = 0$$

$$A(p) = p^n + a_n p^{n-1} + \cdots + a_2 p + a_1$$

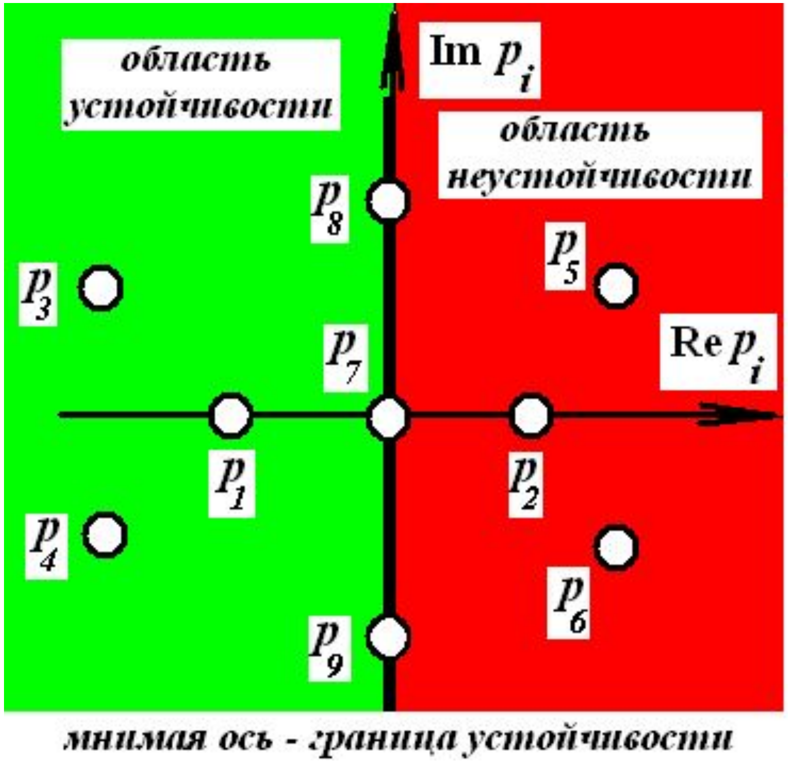
$$A(p) = 0 \;\Rightarrow\; p_1, p_2, \ldots, p_n$$

$$p_1 = -|\alpha_1|,\; p_2 = |\alpha_2|$$

$$p_{3,4} = -|\alpha_3| \pm j|\omega_3|$$

$$p_{5,6} = |\alpha_5| \pm j|\omega_5|$$

$$p_7 = 0, \;, \quad p_{8,9} = \pm j|\omega_8|$$



Юркевич В.Д.

Условие устойчивости линейной системы

$$x(t)=\sum_{i=1}^{n}C_i e^{p_i t} \longrightarrow \boxed{\lim_{t\to\infty} x(t)=0}$$

$$x_1(t)=C_1 e^{-|\alpha_1|t},\quad x_2(t)=C_2 e^{|\alpha_2|t}$$

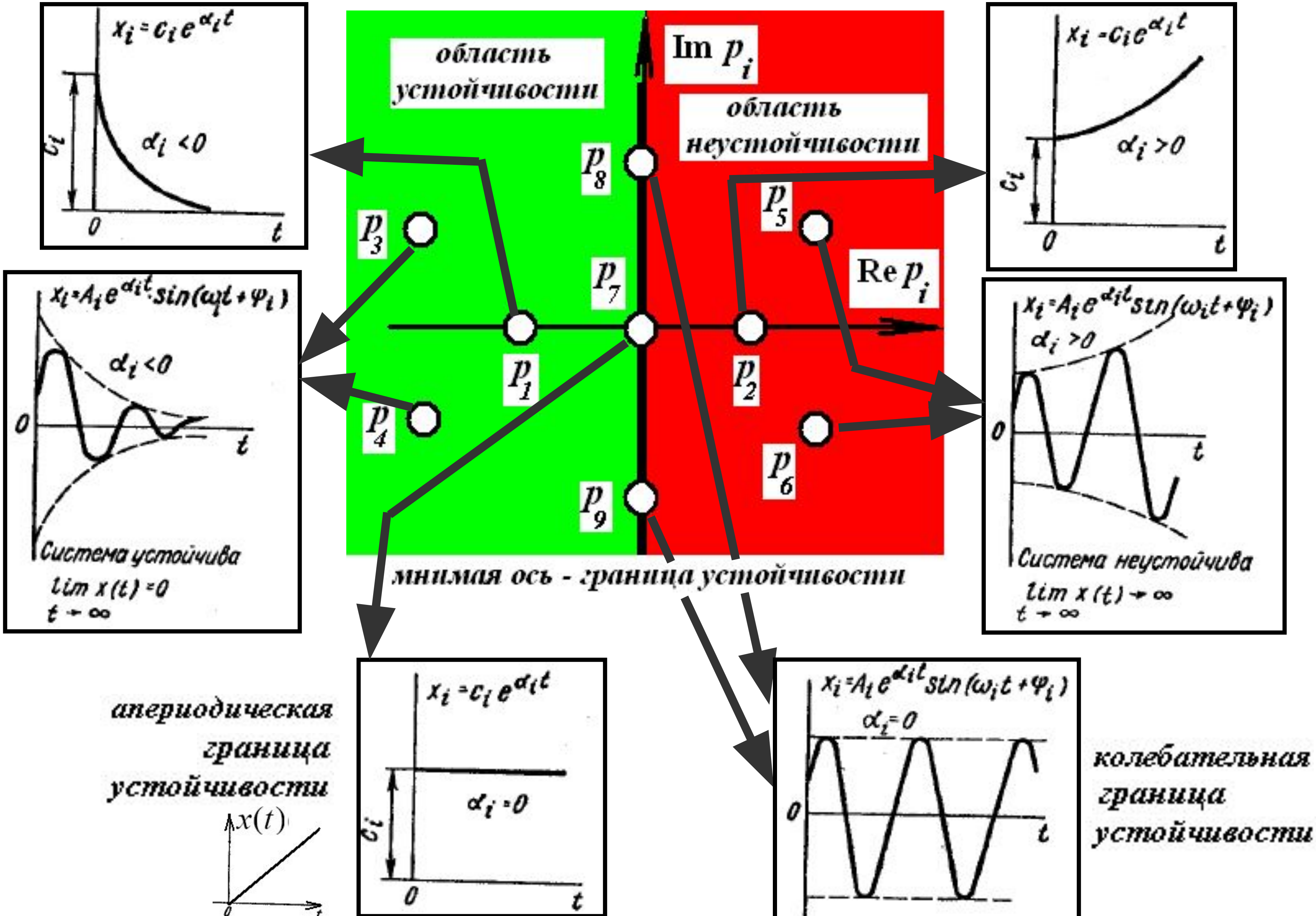
$$x_3(t)=C_3 e^{-|\alpha_3|t}\sin(|\omega_3|t),\quad x_4(t)=C_4 e^{-|\alpha_3|t}\cos(|\omega_3|t)$$

$$x_5(t)=C_5 e^{|\alpha_5|t}\sin(|\omega_5|t),\quad x_6(t)=C_6 e^{|\alpha_3|t}\cos(|\omega_3|t)$$

$$x_7(t)=C_7,\quad x_8(t)=C_8\sin(|\omega_8|t),\quad x_9(t)=C_9\cos(|\omega_8|t)$$

Условие устойчивости: Для устойчивости линейной системы необходимо и достаточно, чтобы все корни ее характеристического полинома имели строго отрицательную вещественную часть, т.е.

$$\boxed{\operatorname{Re} p_i<0 \ \ \forall\, i=1,2,\ldots,n}$$



ТАУ. Тема 6: Анализ устойчивости линейных

Юркевич В.Д.

Граница устойчивости линейной системы

Для нейтральной системы выделяют два случая:

1. **Апериодическая граница устойчивости**
2. **Колебательная граница устойчивости**

Определение: Система находится на апериодической границе устойчивости, если характеристический полином имеет нулевой корень, а все остальные корни имеют строго отрицательную вещественную часть.

Определение: Система находится на колебательной границе устойчивости, если характеристический полином имеет пару чисто мнимых комплексно-сопряженных корней, а все остальные корни имеют строго отрицательную вещественную часть.

Критерии устойчивости линейной системы

Способы проверки устойчивости линейной системы

Прямой способ – путем вычисления корней характеристического полинома

Косвенный способ – с помощью критериев устойчивости

Критерий устойчивости – правило проверки устойчивости системы без вычисления корней характеристического полинома.

Критерии устойчивости:

1. **Алгебраические критерии (например, критерий Гурвица)**
2. **Частотные критерии (например, критерий Михайлова, критерий Найквиста)**

Необходимое условие устойчивости:
Если система устойчива, тогда все коэффициенты характеристического полинома имеют одинаковый знак.

Достаточное условие неустойчивости:
Система является неустойчивой, если имеются коэффициенты характеристического полинома с разным знаком.

$$A(p) = p^n + a_n p^{n-1} + \cdots + a_2 p \ + a_1 \qquad A(p) = 0 \ \Rightarrow \ p_1, p_2, \ldots, p_n$$

$$A(p) = (p - p_1)(p - p_2)\cdots(p - p_n)$$

$$p_1 = -|\alpha_1|, \ \ p_{2,3} = -|\alpha_2| \pm j|\omega_2|$$

$$(p - p_1)(p - p_2)(p - p_3)$$

$$= (p + |\alpha_1|)(p + |\alpha_2| - j|\omega_2|)(p + |\alpha_2| + j|\omega_2|)$$

$$= (p + |\alpha_1|)\left[(p + |\alpha_2|)^2 + \omega_2^2\right]$$

Матрица Гурвица (Hurwitz)

$$A(p) = p^n + a_n p^{n-1} + \cdots + a_2 p + a_1$$

Матрица Гурвица

$$H = \begin{bmatrix} a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots & 0 \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-3} & \cdots & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_1 \end{bmatrix}$$

Главные диагональные миноры матрицы Гурвица

$$\Delta_1 = \det a_n = a_n$$

$$\Delta_2 = \det \begin{bmatrix} a_n & a_{n-2} \\ 1 & a_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\Delta_3 = \det \begin{bmatrix} a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-3} \\ 0 & a_n & a_{n-2} \end{bmatrix}$$

$$\Delta_n = \det H = \Delta_{n-1} a_1$$

Критерий устойчивости Гурвица (Hurwitz)

Критерий Гурвица: Система с характеристическим полиномом вида $p^n + a_n p^{n-1} + \cdots + a_2 p + a_1$ является устойчивой тогда и только тогда, когда все главные диагональные миноры матрицы Гурвица строго больше нуля, т.е. $\boxed{\Delta_i > 0 \;\; \forall\, i = 1, 2, \ldots, n}$

Система находится на апериодической границе устойчивости, если $a_1 = 0,\; \Delta_i > 0 \;\; \forall\, i = 1, 2, \ldots, n-1$

Система находится на колебательной границе устойчивости, если

$$\Delta_{n-1} = 0,\; a_1 > 0,\; \Delta_i > 0 \;\; \forall\, i = 1, 2, \ldots, n-2$$

Условие устойчивости системы 1-го порядка

Пример 1. Система 1-го порядка

$$A(p) = p \ + a_1 \quad \Rightarrow \quad H = a_1, \quad \Delta_1 = \det a_1 = a_1 > 0$$

Условие устойчивости системы 2-го порядка

Пример 2. Система 2-го порядка

$$A(p) = p^2 + a_2 p \ + a_1$$

$$H = \begin{bmatrix} a_2 & 0 \\ 1 & a_1 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_1 = \det a_2 = a_2 > 0$$

$$\Delta_2 = \det \begin{bmatrix} a_2 & 0 \\ 1 & a_1 \end{bmatrix} = a_2 a_1 > 0 \Rightarrow \quad a_1 > 0$$

Пример 3. Система 3-го порядка

$$A(p) = p^3 + a_3 p^2 + a_2 p + a_1 \quad \Rightarrow \quad H = \begin{bmatrix} a_3 & a_1 & 0 \\ 1 & a_2 & 0 \\ 0 & a_3 & a_1 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_1 = \det a_3 = a_3 > 0$$

$$\Delta_2 = \det \begin{bmatrix} a_3 & a_1 \\ 1 & a_2 \end{bmatrix} = a_3 a_2 - a_1 > 0 \Rightarrow a_3 a_2 > a_1$$

$$\Delta_3 = \det H = \Delta_2 a_1 > 0 \Rightarrow a_1 > 0$$

$$a_3 a_2 > a_1 > 0, \; a_3 > 0 \Rightarrow a_2 > 0$$

Для устойчивости системы 3-го порядка необходимо и достаточно, чтобы все коэффициенты характеристического полинома были положительные и произведение средних коэффициентов было больше чем произведение крайних

Замечание: Матрица Гурвица (Hurwitz)

$$A(p) = a_{n+1} p^n + a_n p^{n-1} + \cdots + a_2 p + a_1$$

Матрица Гурвица

$$H = \begin{bmatrix} a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots & 0 \\ a_{n+1} & a_{n-1} & a_{n-3} & \cdots & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_1 \end{bmatrix}$$

Главные диагональные миноры матрицы Гурвица

$$\Delta_1 = \det a_n = a_n$$

$$\Delta_2 = \det \begin{bmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n+1} & a_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\Delta_3 = \det \begin{bmatrix} a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \\ a_{n+1} & a_{n-1} & a_{n-3} \\ 0 & a_n & a_{n-2} \end{bmatrix}$$

$$\Delta_n = \det H = \Delta_{n-1} a_1$$

Замечание: Система 3-го порядка

$$A(p) = a_4 p^3 + a_3 p^2 + a_2 p + a_1 \quad \Rightarrow \quad H = \begin{bmatrix} a_3 & a_1 & 0 \\ a_4 & a_2 & 0 \\ 0 & a_3 & a_1 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_1 = \det a_3 = a_3 > 0$$

$$\Delta_2 = \det \begin{bmatrix} a_3 & a_1 \\ a_4 & a_2 \end{bmatrix} = a_3 a_2 - a_1 a_4 > 0 \;\Rightarrow\; a_3 a_2 > a_1 a_4$$

$$\Delta_3 = \det H = \Delta_2 a_1 > 0 \;\Rightarrow\; a_1 > 0$$

$$a_3 a_2 > a_1 a_4 > 0,\; a_4 > 0,\; a_3 > 0 \;\Rightarrow\; a_2 > 0$$

Для устойчивости системы 3-го порядка необходимо и достаточно, чтобы все коэффициенты характеристического полинома были положительные и произведение средних коэффициентов было больше чем произведение крайних

Критерий устойчивости Михайлова

Характеристический полином динамической системы

$$A(p) = p^n + a_n p^{n-1} + \cdots + a_2 p \ + a_1$$

Функция Михайлова

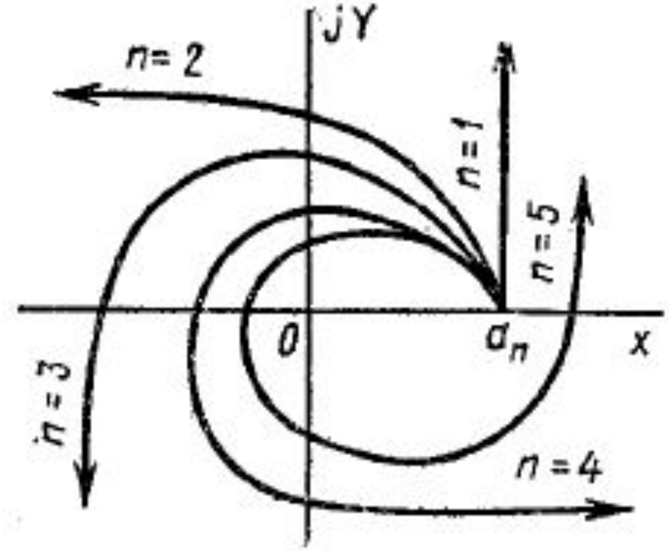
$$A(j\omega) = (j\omega)^n + a_n (j\omega)^{n-1} + \cdots + a_2 (j\omega) \ + a_1$$

$$= X(\omega) + jY(\omega)$$

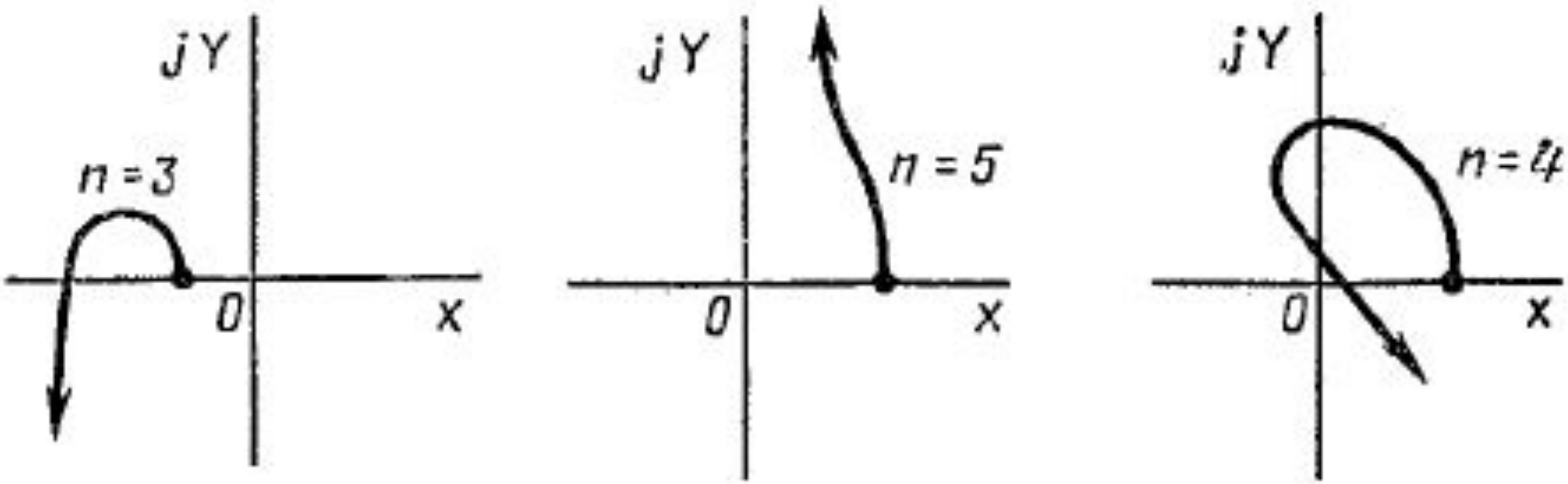
Критерий Михайлова: Для устойчивости динамической системы необходимо и достаточно, чтобы годограф Михайлова начинался при $\omega = 0$ на вещественной положительной полуоси и при изменении частоты ω от 0 до ∞ последовательно проходил n квадрантов против часовой стрелки, нигде не обращаясь в нуль и устремляясь в бесконечность в n -м квадранте.

Годограф Михайлова

Примеры годографа Михайлова для устойчивых систем:



Примеры годографа Михайлова для неустойчивых систем:

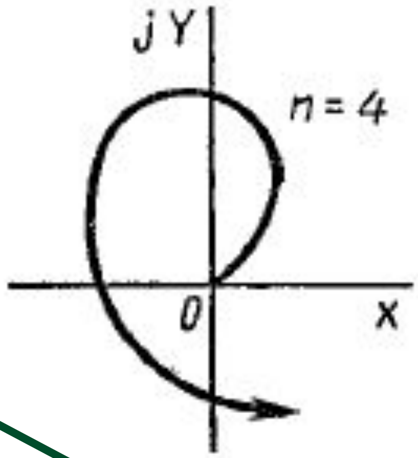


Условие для границы устойчивости системы

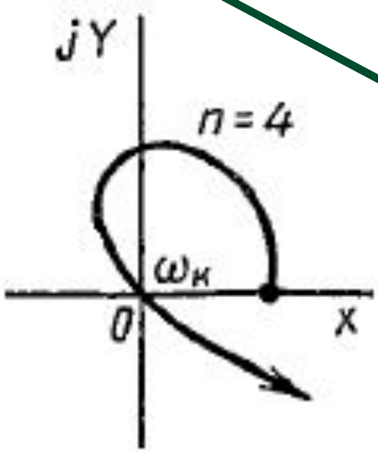
Система находится на границе устойчивости, если годограф Михайлова проходит через начало координат,т.е.

$$\exists\ \bar{\omega} : A(j\omega)\big|_{\omega=\bar{\omega}} = 0 \quad \Rightarrow \quad X(\omega)\big|_{\omega=\bar{\omega}} = 0\,,\ \ Y(\omega)\big|_{\omega=\bar{\omega}} = 0$$

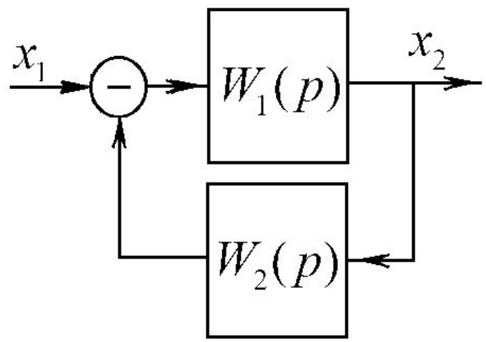
Пример годографа Михайлова для системы, находящейся на апериодической границе устойчивости:

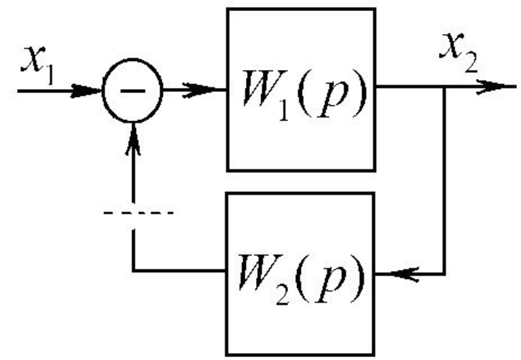


Пример годографа Михайлова для системы, находящейся на колебательной границе устойчивости:



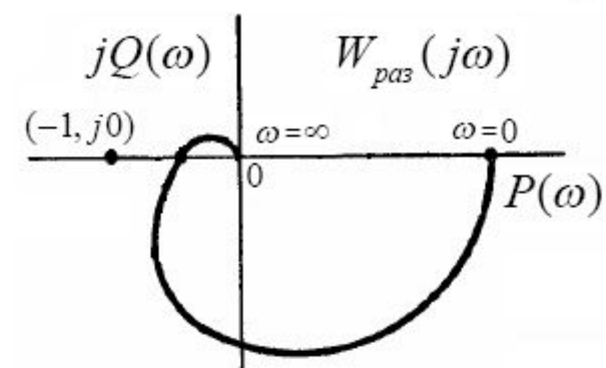
Годограф Найквиста





$$W_{раз}(p) = W_1(p)W_2(p) \qquad p = j\omega \;\Rightarrow\; W_{раз}(j\omega)$$

Определение: Амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой системы $W_{раз}(j\omega)$ называется годографом Найквиста.

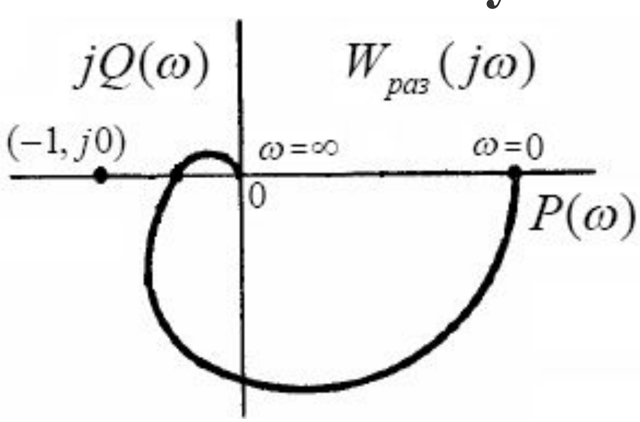


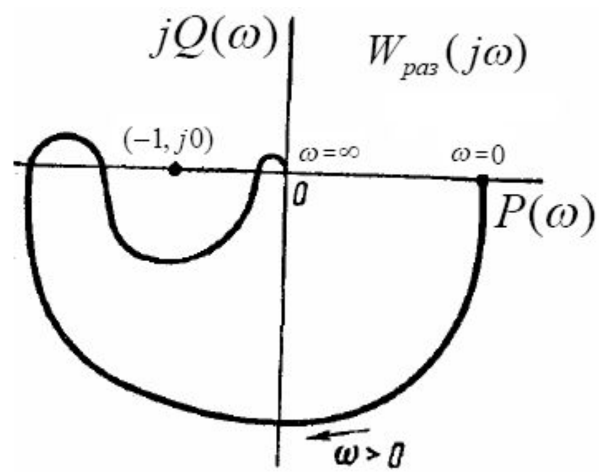
Критерий устойчивости Найквиста (для системы устойчивой в разомкнутом состоянии)

$$W_{раз}(p) = \frac{b_{m+1}p^m + \cdots + b_3p^2 + b_2p + b_1}{p^n + a_np^{n-1} + \cdots + a_3p^2 + a_2p + a_1}, \quad m < n$$

Критерий Найквиста: Для устойчивой разомкнутой системы, замкнутая система будет устойчива, если амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой системы $W_{раз}(j\omega)$ не охватывает точку $(-1, j0)$.

Примеры годографа Найквиста для случая, когда замкнутая система является устойчивой





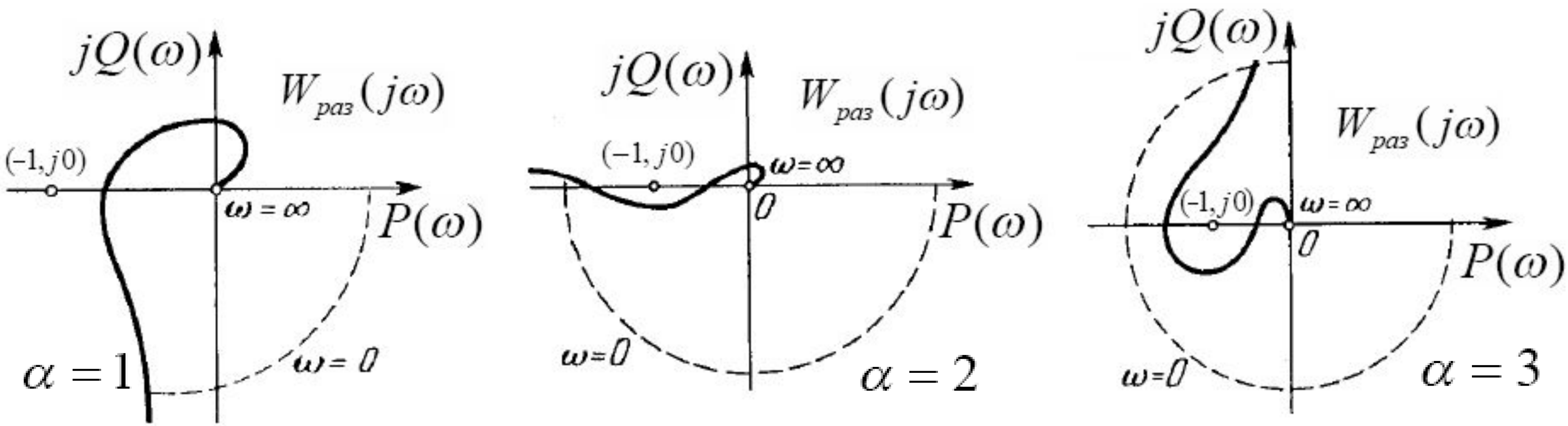
Критерий устойчивости Найквиста (для системы нейтральной в разомкнутом состоянии)

$$W_{раз}(p) = \frac{b_{m+1}p^m + \cdots + b_3 p^2 + b_2 p + b_1}{p^{\alpha}(p^{n-\alpha} + + \cdots + a_3 p^2 + a_2 p + a_1)}, \quad m < n$$

α -число нулевых корней характеристического полинома разомкнутой системы

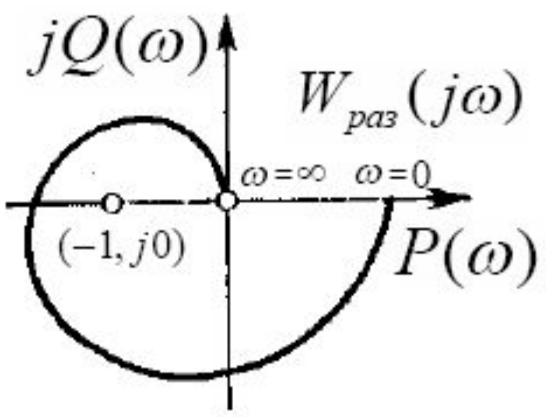
α - порядок астатизма замкнутой системы

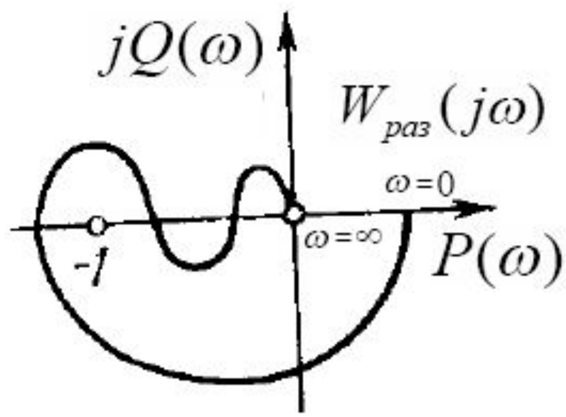
Примеры годографа Найквиста нейтральных систем для случая, когда замкнутая система является устойчивой

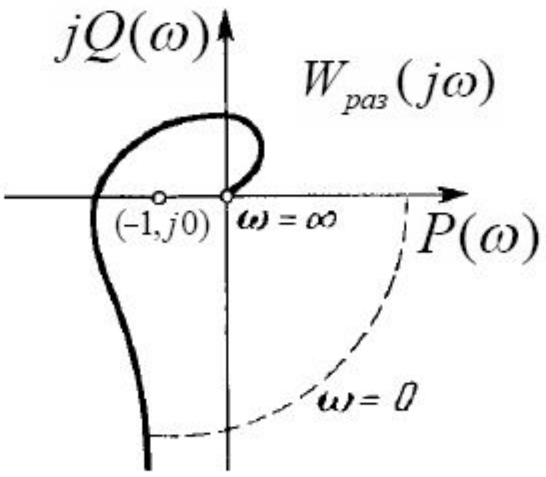


Примеры годографа Найквиста для неустойчивых замкнутых систем

При изменении частоты ω от 0 до ∞, амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой системы $W_{раз}(j\omega)$, т.е. годограф Найквиста, охватывает точку с координатами $(-1, j0)$





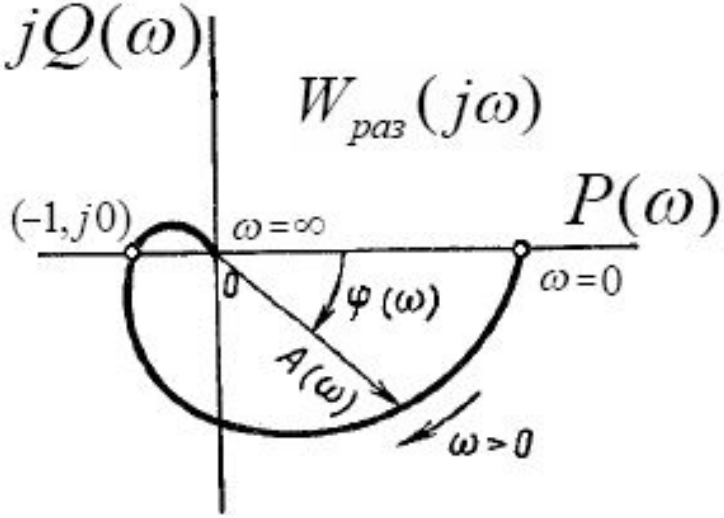


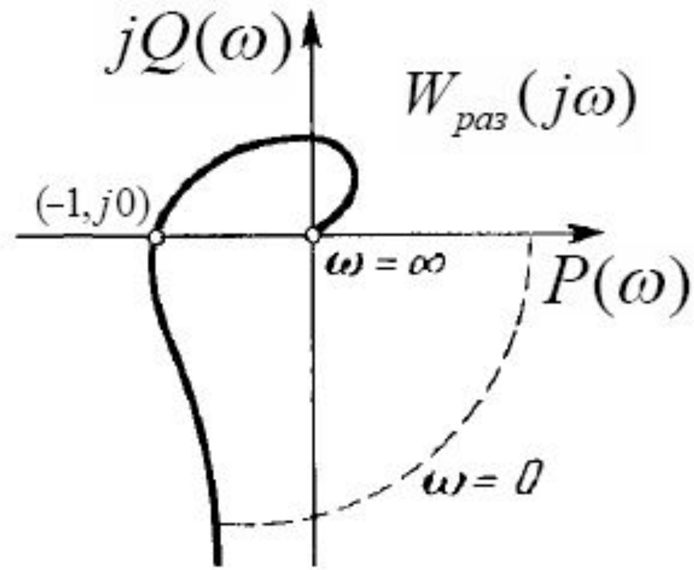
Условие для границы устойчивости системы

Если годограф Найквиста проходит через точку $(-1, j0)$, тогда замкнутая система находится на колебательной границе устойчивости.

$$\exists\ \omega_k \neq 0\ :\ W_{раз}(j\omega)\Big|_{\omega=\omega_k} = -1 + j0$$

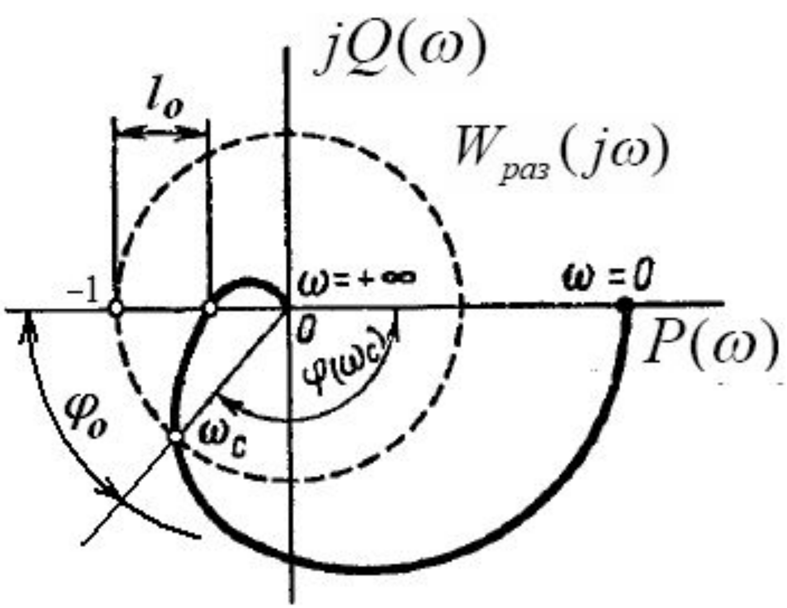
Пример годографа Найквиста для случая, когда замкнутая система находится на колебательной границе устойчивости

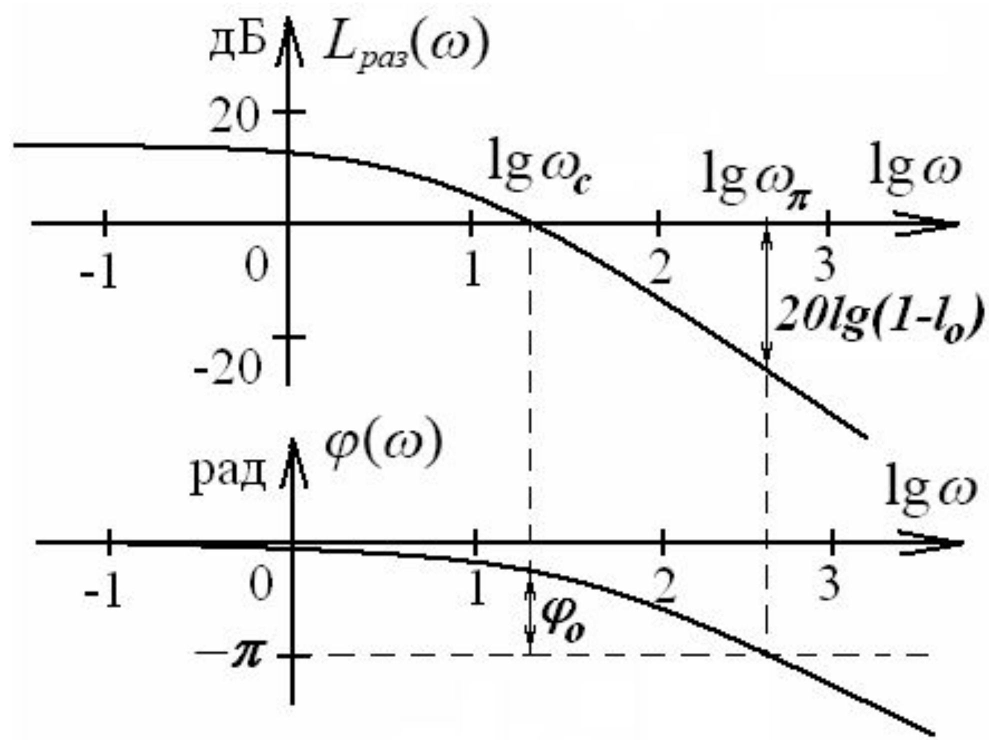




Логарифмический аналог критерия устойчивости Найквиста (достаточное условие)

Для устойчивой (нейтрально-устойчивой) разомкнутой системы, замкнутая система будет устойчива, если ЛАЧХ разомкнутой системы пересекает ось абсцисс раньше, чем ЛФЧХ достигает значения $-\pi$, т.е. $\omega_c < \omega_\pi$

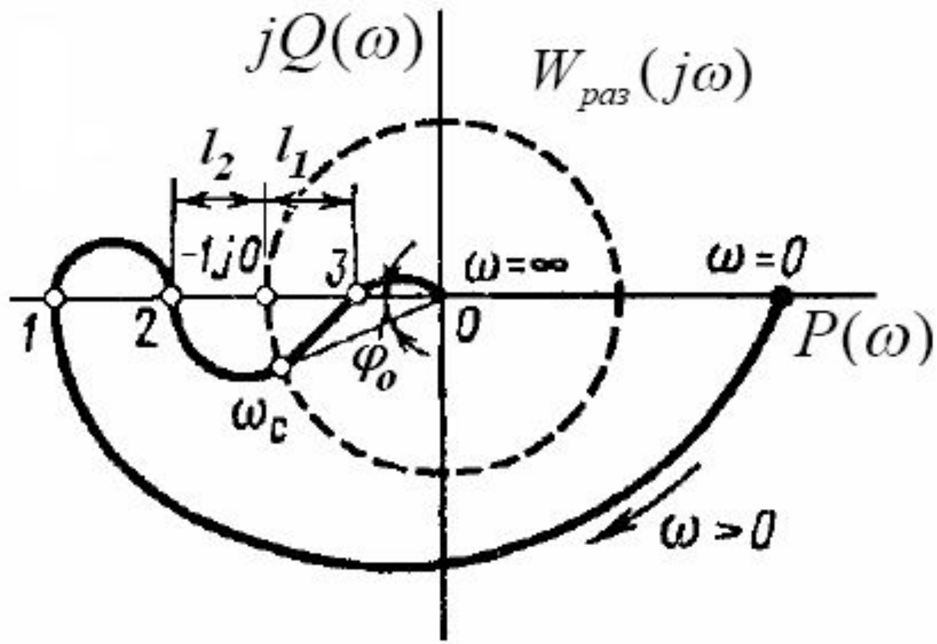


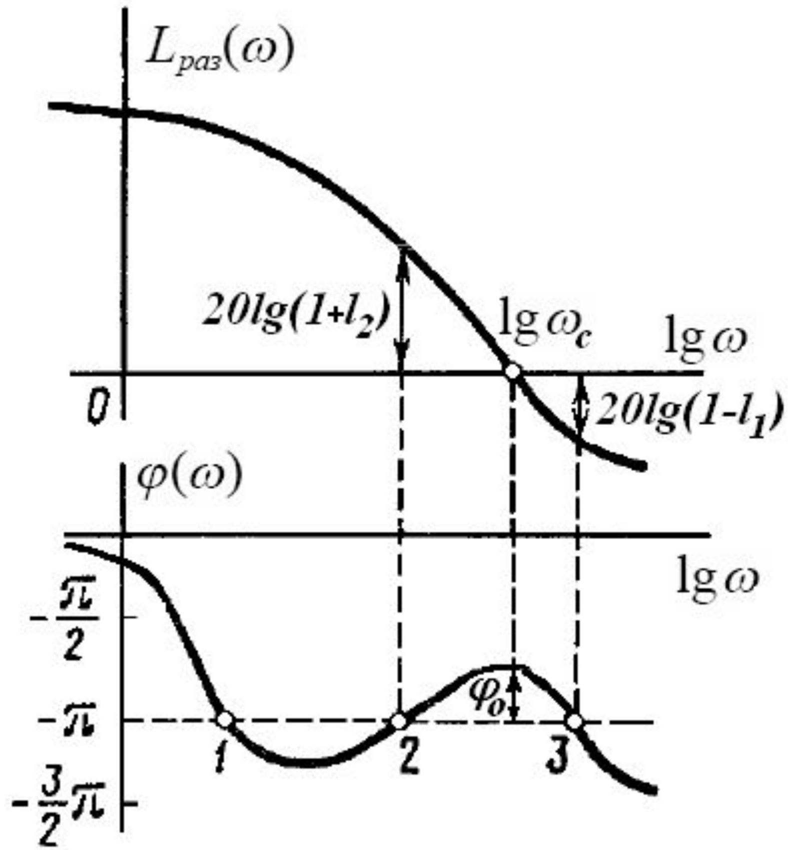


Юркевич В.Д.

Логарифмический аналог критерия устойчивости Найквиста

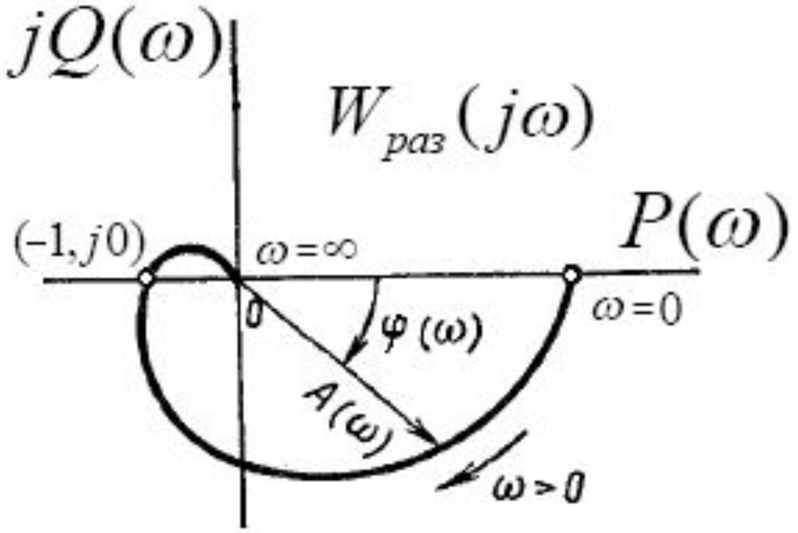
Для устойчивой (нейтрально-устойчивой) разомкнутой системы, замкнутая система будет устойчива, если ЛФЧХ разомкнутой системы пересекает значение $-\pi$ четное число раз в области частот от 0 до ω_c

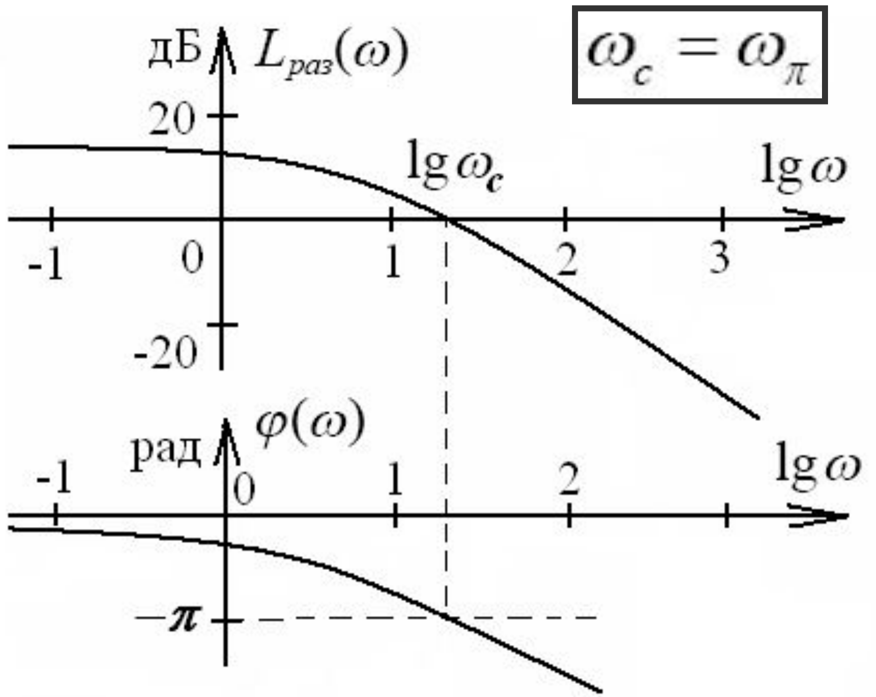




Условие для границы устойчивости системы

Для устойчивой (нейтрально-устойчивой) разомкнутой системы, замкнутая система будет находиться на колебательной границе устойчивости, если ЛАЧХ разомкнутой системы пересекает ось абсцисс в точке, где ЛФЧХ принимает значение $-\pi$, т.е. $\omega_c = \omega_\pi$





Юркевич В.Д.

Тема 7.
Область устойчивости, запасы устойчивости