Б.1.13. Математика

38.03.02 Менеджмент
Маркетинг,
Менеджмент недвижимости,
Производственный менеджмент
38.03.01 Экономика
Бухгалтерский учет анализ и аудит,
Экономика предприятий и организаций

Демонстрационный материал (учебно-наглядное пособие)

Введение

Математика — фундаментальная наука, предоставляющая (общие) языковые средства другим наукам; тем самым она выявляет их структурную взаимосвязь и способствует нахождению самых общих законов природы.

Элементы теории матриц

- Таблица чисел вида

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

состоящая из строк и столбцов, называется матрицей размера (читается «*m*» на «*n*»).

Если $n = m$, то матрица называется <u>квадратной</u>, а число *n* называют её порядком. Более компактная форма записи матрицы имеет вид $A = (a_{ij})$.

Сумма (разность) двух матриц и одинакового размера определяется следующим образом:

$$A \pm B = (a_{ij} \pm b_{ij})$$

Для умножения матрицы на число нужно каждый элемент матрицы умножить на это число

$$\lambda \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \end{pmatrix}$$

<u>Произведением</u> матрицы A из m строк и k столбцов на матрицу B из k строк и n столбцов называется матрица

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{2k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ik} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mk} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & \dots & b_{2j} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{k1} & \dots & b_{kj} & \dots & b_{kn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{i1} & \cdots & c_{ij} & \cdots & c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mj} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

где

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ik}b_{kj}$$

Пример.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 5+2\cdot 7 & 1\cdot 6+2\cdot 8 \\ 3\cdot 5+4\cdot 7 & 3\cdot 6+4\cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\cdot 1+6\cdot 3 & 5\cdot 2+6\cdot 4 \\ 7\cdot 1+8\cdot 3 & 7\cdot 2+8\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{pmatrix}$$

В частности, $\quad A \cdot B \neq B \cdot A$

Правило Крамера и определители матриц 2-го и 3-го порядков

Рассмотрим матрицу второго порядка: $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$

Число $\Delta(A) = a_1 b_2 - a_2 b_1$ называется определителем

матрицы ***A*** и обозначается следующим образом

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \Delta(A) = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

Определитель третьего порядка обозначается

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

и вычисляется по формуле

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Решение системы трех уравнений с тремя неизвестными

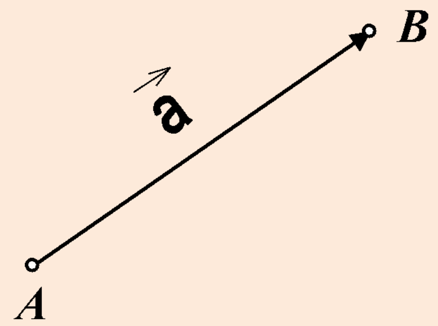
$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z = d_3 \end{cases}$$

выражается через определители третьего порядка по <u>фор-мулам Крамера:</u>

$$x = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_1 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} = \frac{\Delta_x}{\Delta} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} = \frac{\Delta_y}{\Delta} \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} = \frac{\Delta_z}{\Delta}$$

Элементы векторной алгебры и аналитической геометрии

Вектор – это направленный отрезок. Обозначается вектор символом $\vec{a}$ или $\overrightarrow{AB}$, где точка *A* – начало, а *B* – конец.



Длиной или модулем вектора называется расстояние между его началом и концом и обозначается $|\overrightarrow{AB}|$ или $|\vec{a}|$.

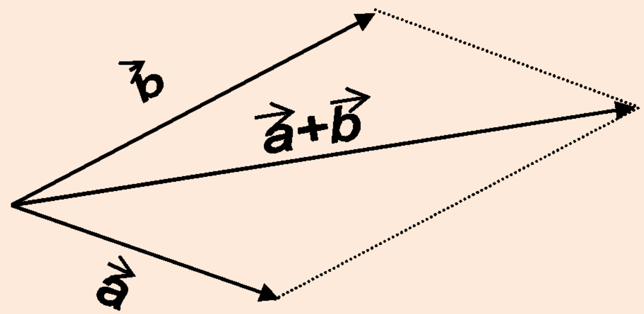
Векторы называются коллинеарными, если они параллельны одной прямой. Векторы называются компланарными, если они параллельны одной плоскости.

Линейные операции над векторами

Произведением вектора $\vec{a}$ на число *к* называется вектор $\vec{b} = k\vec{a}$, который:

- имеет длину $|\vec{b}| = |k| \cdot |\vec{a}|$
- коллинеарен вектору $\vec{a}$
- если $k > 0$, то $\vec{b} \uparrow\uparrow \vec{a}$;
- если $k < 0$, то $\vec{b} \uparrow\downarrow \vec{a}$;
- если $k = 0$, то $\vec{b} = \vec{0}$.

Суммой двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$, получаемый по правилу параллелограмма:



<u>Теорема</u>. Любой вектор на плоскости единственным образом представим в виде линейной комбинации двух данных неколлинеарных векторов и этой плоскости.

<u>Теорема</u>. Любой вектор в пространстве единственным образом представим в виде линейной комбинации трех данных некомпланарных векторов.

Базисом $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ *называются взятые в определенном порядке линейно независимые векторы.*

Если базисные векторы взаимно перпендикулярны, то базис называется ортогональным, а если плюс к этому базисные векторы имеют единичную длину, то – ортонормированным.

Выражение данного вектора $\vec{a}$ в виде линейной комбинации базисных векторов называется его разложением в данном базисе (или по базису)

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$$

Коэффициенты разложения называются координатами вектора в данном базисе.

<u>Декартовой прямоугольной системой координат</u> называется совокупность фиксированной точки *O* (начала координат) и базиса векторов $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, исходящих из точки *O*.

Оси, проходящие через базисные векторы, называют соответственно

- ✔осью абсцисс (ось *OX*),
- ✔осью ординат (ось *OУ*),
- ✔осью аппликат (ось *OZ*).

Радиус-вектором произвольной точки *M* называют вектор $\overrightarrow{OM}$, а его координаты называют <u>координатами этой точки.</u>

Для произвольной точки *M* в декартовой системе координат с ортонормированным базисом в разложении вектора

$$\overrightarrow{OM} = x\ \vec{i} + y\ \vec{j} + z\ \vec{k}$$

его координаты являются проекциями вектора $\overrightarrow{OM}$ на оси.

Длина вектора может быть найдена по формуле

$$|\overrightarrow{OM}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Скалярное произведение

Скалярным произведением векторов $<\vec{a}, b>$ *называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними.*

Скалярное произведение ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы перпендикулярны (ортогональны)

$$<\vec{a}, b> = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} \perp \vec{b}$$

Скалярное произведение в прямоугольных координатах:

$$<\vec{a}, \vec{b}> = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

С помощью скалярного произведения можно вычислить угол между векторами:

$$\cos\varphi = \frac{<\vec{a},\vec{b}>}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$$

В частности, условие ортогональности двух векторов выражается через их координаты следующим образом

$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b = 0$$

Прямая линия на плоскости

Общее уравнение прямой – *уравнение прямой L, проходящей через заданную точку $M_0(x_0, y_0)$ перпендикулярно заданному вектору $\vec{N} = \{A, B\}$:*

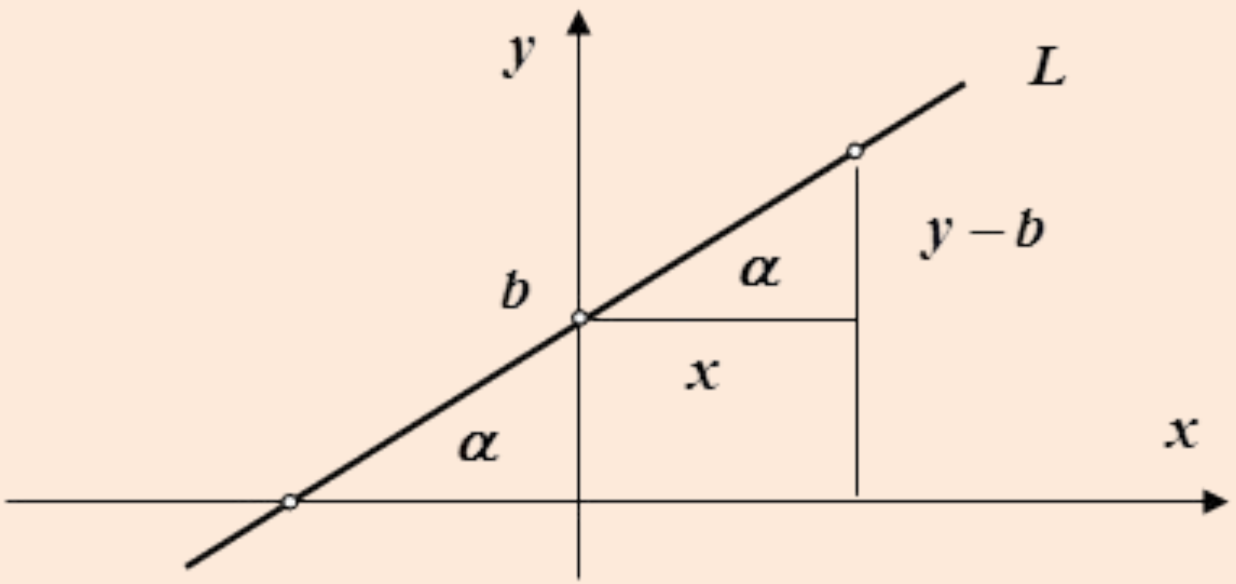
$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$$

или

$$Ax + By + C = 0$$

Уравнение прямой с угловым коэффициентом

$$y = kx + b$$



прямая *L* пересекает ось ординат в точке (0, *b*) и образует с положительным направлением оси абсцисс угол α , тангенс которого равен *к* .

Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$$

Положительный угол φ, который отсчитывается от прямой $y=k_1x+b_1$ *до прямой* $y=k_2x+b_2$ *находится по формуле*

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2}$$

Пример 1. Составить общее уравнение прямой на плоскости, если она проходит через точку $M(-3;\ 5)$ и вектор нормали к ней $\vec{n}(2;\ -8)$.

Решение. Используя формулу общего уравнения прямой, получаем:

$$2(x+3)-8(y-5)=0$$

$$2x+6-8y+40=0$$

$$x-4y+23=0$$

Пример 2. Найти угол между прямыми, заданными общими уравнениями $x-3y+5=0$ и $2x+4y-7=0$.

Решение. Используя формулу, получаем:

$$\cos\varphi=\frac{1\bullet 2-3\bullet 4}{\sqrt{1+9}\bullet\sqrt{4+16}}=\frac{-10}{\sqrt{10}\bullet\sqrt{20}}=$$
$$=\frac{-10}{\sqrt{200}}=\frac{-10}{\sqrt{25}\bullet\sqrt{2}\bullet\sqrt{4}}=\frac{-10}{10\bullet\sqrt{2}}=$$
$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Получаем угол $\varphi=-\frac{\pi}{4}=45^0$.

Пример 3. Написать уравнение прямой, которая проходит через две заданные точки (-1, 2) и (2, 1).

Решение.

По уравнению $$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

полагая в нем x1 = -1, у1 = 2, x2 = 2, y2 = 1 (без разницы, какую точку считать первой, какую - второй), получим

$$\frac{y-2}{1-2} = \frac{x+1}{2+1} \quad \text{или} \quad \frac{y-2}{-1} = \frac{x+1}{3}$$

после упрощений получаем окончательно искомое

уравнение в виде x + 3y - 5 = 0.

Элементы математического анализа

Пусть заданы два множества X и Y произвольной природы. Допустим, что каждому элементу x некоторого подмножества $D \subseteq X$ поставлен в соответствие определенный элемент $y \in Y$. Это соответствие (отображение) называют <u>функцией</u> y от x и обозначают $y = f(x)$.

Множество D называется <u>областью определения</u> функции, а множество всех элементов y, которые соответствуют элементам множества D, называется <u>областью значений</u> этой функции.

Предел функции — одно из основных понятий математического анализа. Функция f(x) имеет предел A в точке x_0 если для всех значений x, достаточно близких к x_0, значение f(x) близко к A.

Первый замечательный предел:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Второй замечательный предел:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

Таблица чисел вида

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

состоящая из   строк и   столбцов, называется матрицей   размера   (читается «m» на «n»).

Если $n = m$, то матрица называется <u>квадратной</u>, а число n называют её порядком. Более компактная форма записи матрицы имеет вид $A = \left(a_{ij}\right)$.

Дифференцирование

Производная (функции в точке) — основное понятие дифференциального исчисления, характеризующее скорость изменения функции (в данной точке).

Определяется как предел отношения приращения функции к приращению её аргумента при стремлении приращения аргумента к нулю, если такой предел существует.

Функцию, имеющую конечную производную (в некоторой точке), называют дифференцируемой (в данной точке).

Процесс вычисления производной называется дифференци́рованием. Обратный процесс — нахождение первообразной — интегрированием.

Вычисление производных

Правила дифференцирования:

Производная суммы конечного числа дифференцируемых функций равна сумме производных этих функций

$$(u(x)+v(x))' = u'(x)+v'(x)$$

Производная произведения двух дифференцируемых функций равна сумме произведений каждой функции на производную другой функции

$$(u(x)v(x))' = u(x)v'(x)+v(x)u'(x)$$

Постоянный множитель при дифференцировании выносится за знак производной

$$(cf(x))' = cf'(x)$$

Производная частного вычисляется по следующей формуле

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

Таблица основных производных

1. $c' = 0,\ c = \text{const}$
2. $\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$
3. $\left(a^x\right)' = a^x \cdot \ln a$
4. $\left(e^x\right)' = e^x$
5. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$
6. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$
7. $(\sin x)' = \cos x$
8. $(\cos x)' = -\sin x$
9. $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
10. $(\mathrm{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
11. $(\mathrm{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
12. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
13. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
14. $(\mathrm{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$
15. $(\mathrm{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$
16. $(\mathrm{sh}\, x)' = \mathrm{ch}\, x$
17. $(\mathrm{ch}\, x)' = \mathrm{sh}\, x$
18. $(\mathrm{th}\, x)' = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$
19. $(\mathrm{th}\, x)' = -\dfrac{1}{\mathrm{sh}^2 x}$

Производная сложной функции по независимой переменной равна произведению производной функции по промежуточной переменной на производную промежуточной переменной по независимой переменной:

$$y'_x = f'_u(u(x))u'(x)$$

Пример

Найти производную функции $s = (\sin x - 2\cos x)^3$

Решение.

$$s' = \left((\sin x - 2\cos x)^3\right)' = $$
$$= 3(\sin x - 2\cos x)^2 \bullet (\sin x - 2\cos x)'.$$

=

$$(\sin x - 2\cos x)' = (\sin x)' - (2\cos x)' =$$
$$= \cos x - 2(\cos x) = \cos x - 2(-\sin x) =$$
$$= \cos x + 2\sin x.$$

Таблица чисел вида

$$(a,b)$$

$$f'(x_0) = 0$$

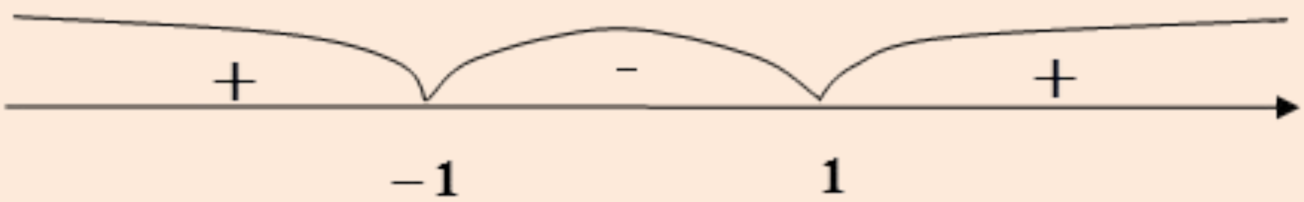
состоящая из   строк и   столбцов, называется матрицей   размера   (читается «*m*» на «*n*»).

Если $n = m$, то матрица называется <u>квадратной</u>, а число n называют её порядком. Более компактная форма записи матрицы имеет вид $A = (a_{ij})$.

<u>Пример</u>. Найти экстремумы функции

$$y = f(x) = x^3 - 3x + 1$$

Функция определена на всей числовой прямой. Её производная $f'(x) = 3(x^2 - 1) = 3(x+1)(x-1)$ всюду существует, поэтому абсциссы точек подозрительных на экстремум это те значения переменной, при которых производная равна нулю, т. е. *x = -1* и *x = 1*. Отметим на следующей схеме знаки производной в соответствующих интервалах



Отсюда видно, что в интервале $(-\infty,-1)$ функция возрастает, а в интервале $(-1,1)$ – убывает, значит, при $x = -1$ функция имеет максимум $y_{\max} = f(-1) = 3$. Соответственно, $y_{\min} = f(1) = -1$.

<u>***Интегрирование***</u>

Функция F(x) называется <u>первообразной</u> для функции f(x) на интервале X=(a, b) (конечном или бесконечном), если в каждой точке этого интервала f(x) является производной для F(x), т.е. $F'(x) = f(x)$

Множество первообразных функции f(x) называется неопределённым интегралом от этой функции и обозначается символом

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Правила интегрирования

$$\int k \cdot f(x)\,dx = k \cdot \int f(x)\,dx \qquad (k = const)$$

$$\int (f(x) \pm g(x))\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$$

Таблица интегралов

1. $\int 0 \cdot dx = C$
2. $\int dx = \int 1 \cdot dx = x + C$
3. $\int x^n \cdot dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C,$

   $n \neq -1,\ x > 0$
4. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$
5. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$
6. $\int e^x dx = e^x + C$
7. $\int \sin x dx = -\cos x + C$
8. $\int \cos x dx = \sin x + C$
9. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg} x + C$
10. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg} x + C$
11. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \dfrac{x}{a} + C,\ |x| < |a|$
12. $\int \dfrac{dx}{a^2 + x^2} = \dfrac{1}{a} \mathrm{arctg} \dfrac{x}{a} + C$
13. «Высокий» логарифм:

   $$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C,\ |x| \neq a$$
14. «Длинный» логарифм:

   $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$$

Пример. Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}$

Решение. Согласно тождеству $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, получим

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx =$$

$$= \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C$$

Интегрирование методами подстановки и замены переменной.

Формула подстановки

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int f(\varphi(t))\,d\varphi(t) = F(\varphi(t)) + C$$

Пример. Вычислить $\int \cos(3x+2)\,dx$

Решение. Делая в этой формуле подстановку $u = 3x + 2$, *получим*

$$\int \cos(3x+2)\,d(3x+2) = \sin(3x+2) + C$$

откуда найдем

$$\int \cos(3x+2)\,dx = \frac{1}{3}\sin(3x+2) + C$$

Таблица чисел вида

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$$

$$t = \psi(x)$$

состоящая из строк и столбцов, называется матрицей размера (читается «*m*» на «*n*»).

$$t = 2 - 3x$$

$$dt = d(2-3x) = (2-3x)'\,dx = -3dx \qquad dx = \frac{dt}{-3}$$

Если $n = m$, то матрица называется <u>квадратной</u>, а число n называют её порядком. Более компактная форма записи матрицы имеет вид $A = (a_{ij})$.

$$\int \frac{dx}{2-3x} = \int \frac{dt/(-3)}{t} = -\frac{1}{3}\int \frac{dt}{t} = -\frac{1}{3}\ln|2-3x| + C$$

Формула интегрирования по частям

$$\int u(x)\cdot dv(x) = u(x)\cdot v(x) - \int v(x)\cdot du(x)$$

Пример. Вычислить $\int x\cdot e^{-x}dx$

Решение. Введем обозначения: $u(x)=x$, $dv(x)=e^{-x}dx$

Тогда $du(x)=dx$, $v(x)=-\int e^{-x}d(-x)=-e^{-x}$

Применяя формулу интегрирования по частям, получим:

$$\int x\cdot e^{-x}dx = x\cdot\left(-e^{-x}\right)-\int -e^{-x}dx = -x\cdot e^{-x}-e^{-x}+C$$

Определённым интегралом функции на промежутке называется конечный предел интегральных сумм

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(p_k)\Delta x_k = \int_a^b f(x)dx, \quad (\lambda = \max_k \Delta x_k \to 0)$$

если он существует и не зависит ни от способа разбиения промежутка $[a,b]$, ни от выбора точек p_k.

Ценность этого математического понятия состоит в том, что функцию можно «наполнять» разным содержанием: это может быть функция, определяющая границу криволинейной трапеции, и тогда определенный интеграл выражает площадь трапеции, или это может быть функция, определяющая линейную плотность неоднородного стержня, и тогда определенный интеграл выражает массу стержня.

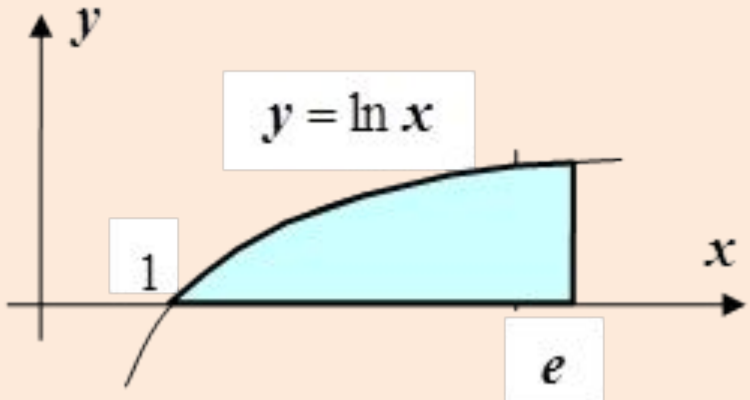
Формула Ньютона – Лейбница вычисления определенного интеграла:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Формула интегрирования по частям:

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$$

Пример. Найти площадь фигуры, ограниченной линией $y = \ln x$ осью абсцисс и прямой $x = e$. Искомая площадь (см. рис.) выражается интегралом $S = \int_1^e \ln x \, dx$



Интегрируем по частям $u = \ln x$, $du = \frac{1}{x} dx$, $dv = dx$, $v = x$

$$S = x \ln x \Big|_1^e - \int_1^e x \frac{1}{x} dx = e - x \Big|_1^e = e - e + 1 = 1$$

Правило замены переменной в определённом интеграле.

Пусть требуется вычислить интеграл $\int_a^b f(x)dx$.

Заменим $x=\varphi(t)$, причем концам промежутка $[\alpha,\beta]$ соответствуют концы промежутка $[a,b]$, $\varphi(\alpha)=a,\ \varphi(\beta)=b$ или $\varphi(\alpha)=b\ \ \varphi(\beta)=a$.

При этих условиях имеют место формула:

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

.

Пример. Вычислить определенный интеграл $I = \int_4^5 x\sqrt{x^2-16}\,dx.$

Решение. Произведём замену переменной, полагая

$t = x^2 - 16.$ Тогда *dt = 2x dx*, откуда *x dx = (1/2) dt*, и

подынтегральное выражение преобразуется так:

$$x\sqrt{x^2-16}\,dx = \sqrt{x^2-16}\bullet x\,dx = (1/2)\sqrt{t}\,dt.$$

Найдём новые пределы интегрирования. Подстановка

значений x = 4 и x = 5 в уравнение $t = x^2 - 16.$ дает

$\alpha = 4^2 - 16 = 0,\ \beta = 5^2 - 16 = 9.$ Используя теперь формулу, получим

$$I = \int_0^9 \frac{1}{2}\sqrt{t}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^9 t^{1/2}dt =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{t^{3/2}}{3/2}\Big|_0^9 = \frac{1}{3}t\sqrt{t}\Big|_0^9 = \frac{1}{3}\bullet 9\sqrt{9} = 9.$$

Основные понятия теории дифференциальных уравнений

Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее независимую переменную, неизвестную функцию и ее производные.

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

Решением уравнения назовем любую функцию, обращающую это уравнение в тождество. Порядком дифференциального уравнения называют порядок наивысшей производной, входящей в это уравнение.

Уравнения первого порядка

Общий вид дифференциального уравнения первого порядка:

$$F(x, y, y') = 0$$

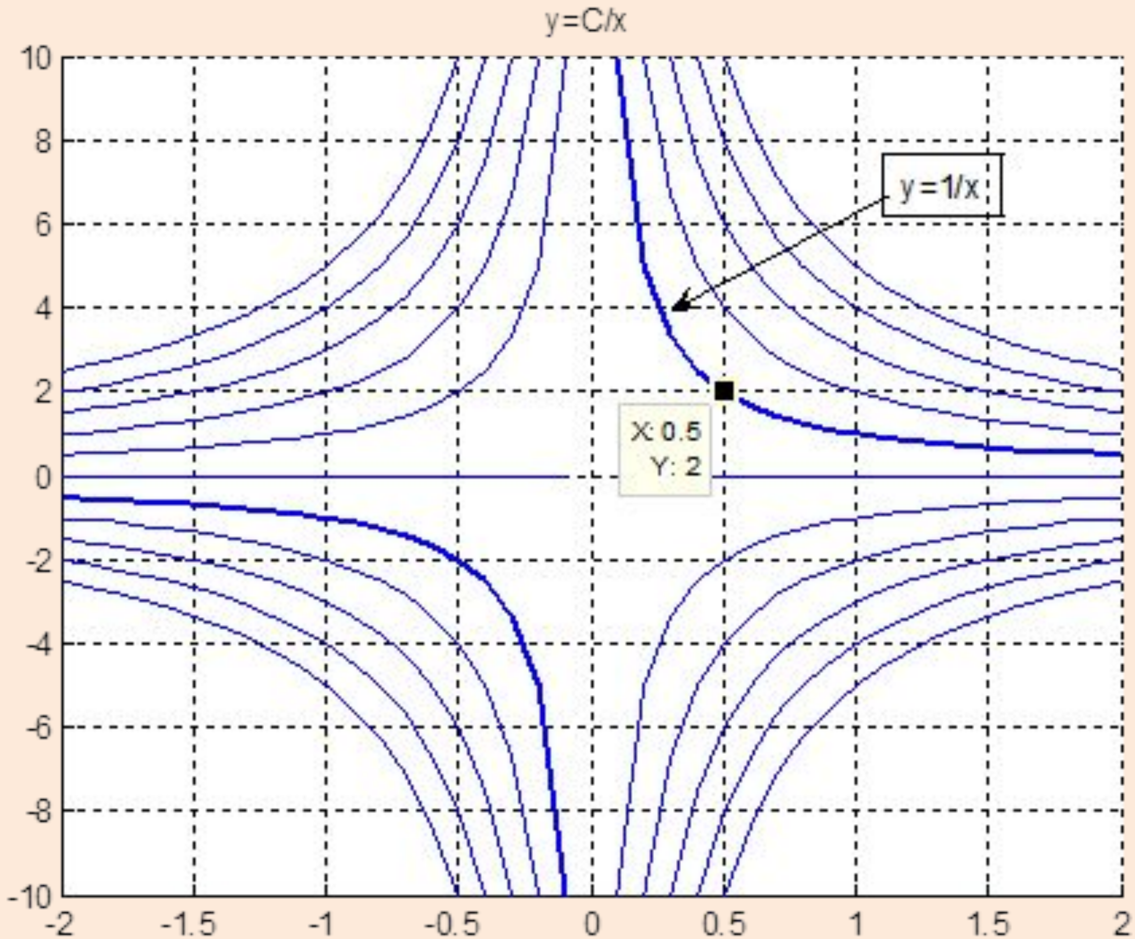
Пример. Пусть имеется уравнение $y' = -\dfrac{y}{x}$

Непосредственной подстановкой убеждаемся в том, что функции

$$y = \frac{C}{x} \qquad (*)$$

обращают это уравнение в тождество.

Построим графики этих функций при различных значениях С в плоскости переменных x, y.



Формула (*) определяет общее решение уравнения, представляющее собой семейство кривых.

Выберем точку с координатами (на рис. это точка (0.5, 2)). Через нее проходит кривая из семейства (*), которой соответствует значение $C = x_0 y_0$. Соответствующее решение

$$y = \frac{x_0 y_0}{x}$$

называют частным решением дифференциального уравнения, удовлетворяющим начальным условиям

$$y(x_0) = y_0$$

Для произвольного дифференциального уравнения первого порядка общее решение имеет вид функции

$$y = \varphi(x, C)$$

содержащей параметр *С*. Графики функций этого семейства называют интегральными кривыми.

Задачей Коши называют нахождение частного решения, удовлетворяющего данным начальным условиям (x_0, y_0).

Уравнения с разделяющимися переменными

Если в дифференциальном уравнении

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

правая часть может быть представлена в виде произведения функций

$$f(x, y) = f_1(x) f_2(y)$$

то такое уравнение называют уравнением с разделяющимися переменными.

Пример. Решить дифференциальное уравнение

$$xy' = y$$

Решение. Так как $y' = \frac{dy}{dx}$, *то* $x \cdot \frac{dy}{dx} = y$.

Далее разделяем переменные:

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

Следующий этап – интегрирование дифференциального уравнения:

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$$

Ответ. Общее решение *y* = *Cx*, где *C* – константа.

Таблица чисел вида

состоящая из строк и столбцов, называется матрицей размера (читается «m» на «n»).

Если $n = m$, то матрица называется <u>квадратной</u>, а число n называют её порядком. Более компактная форма записи матрицы имеет вид $A = \left(a_{ij}\right)$.

Таблица чисел вида

состоящая из строк и столбцов, называется матрицей размера (читается «*m*» на «*n*»).

Если *n = m* , то матрица называется квадратной, а число *n* называют её порядком. Более компактная форма записи матрицы имеет вид $A = \left(a_{ij}\right)$.

линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Общий вид:

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 \qquad (**)$$

Характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0 \qquad (**)$$

- ✔ Если уравнение (*) имеет два различных действительных корня λ_1 и λ_2, то общее решение уравнения (**) имеет вид

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$$

- ✔ Если характеристическое уравнение (*) имеет два одинаковых действительных корня $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{a_1}{2}$, то общее решение уравнения (**) имеет вид

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x e^{\lambda_1 x} = e^{\lambda_1 x}(C_1 + C_2 x)$$

- ✔ Если уравнение (*) имеет комплексные корни $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ то общее решение уравнения (**) имеет вид

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$$

Пример 1. Решить уравнение y`` + 3y` + 2y = 0.

Решение. Данное уравнение является линейным однородным уравнением 2-го порядка с постоянными коэффициентами. Выпишем и решим характеристическое уравнение:

$$k^2+3k+2=0 \Rightarrow k_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot1\cdot2}}{2}=-1;-2$$

Так как оба корня вещественные и различные, общее решение имеет вид:

$$y=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}$$

Таблица чисел вида

состоящая из строк и столбцов, называется матрицей размера (читается «*m*» на «*n*»).

Если *n* = *m* , то матрица называется квадратной, а число *n* называют её порядком. Более компактная форма записи матрицы имеет вид $A = (a_{ij})$.

Пример 3. Решить уравнение $y'' - 2y' + 10y = 0$

Решение.

Составим и решим характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 10 = 0$$

$$D = 4 - 40 = -36$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm 6i}{2} = 1 \pm 3i$$

Получены сопряженные комплексные корни.

Ответ: Общее решение:

$$y = e^x (C_1 \sin 3x + C_2 \cos 3x), \ \text{где} \ \ C_1, C_2 - const$$