НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

3 СЕМЕСТР

Лекция 1. Дифференциальное исчисление.

Лекция 2. Интегральное исчисление.

ИСТОРИЧЕСКАЯ СПРАВКА

- Математический анализ как раздел математики возник в результате объединения двух различных и первоначально не связанных направлений математических исследований – дифференциального и интегрального исчислений
- Интуитивное представление об определенном интеграле использовалось еще в Древней Греции при вычислении площадей и объемов (Архимед для вычисления объемов и площадей поверхностей тел пользовался разбиением фигур на элементы с последующим суммированием этих элементов, предвосхищая тем самым понятие интегральных сумм)
- В средние века аналогичными задачами, развивая метод Архимеда, занимались Кеплер, Паскаль, Ферма

ИСТОРИЧЕСКАЯ СПРАВКА

- Ферма также занимался задачами, которые мы сейчас относим к дифференциальному исчислению – проведением касательных к кривым, нахождением min и max значений функции, причем для решения этих задач он пользовался понятием приращения функции
- Связь между этими классами задач была осознана учеными после исследований Ньютона и Лейбница
- В 1675 г. Лейбницем были введены используемые в настоящее время обозначения интеграла и дифференциала
- Строгое обоснование большинства понятий математического анализа было дано Коши в середине XIX в. на основе теории пределов

ГО́ТФРИД ВИ́ЛЬГЕЛЬМ ЛЕ́ЙБНИЦ (*GOTTFRIED WILHELM VON LEIBNIZ*)

(1646-1716) саксонский философ, логик, математик, механик, физик, юрист, историк, дипломат, изобретатель и языковед. Основатель и первый президент Берлинской Академии наук, иностранный член Французской Академии наук

- Лейбниц, независимо от Ньютона, создал математический анализ — дифференциальное и интегральное исчисления
- Лейбниц создал комбинаторику как науку
- Заложил основы математической логики.
- Описал двоичную систему счисления с цифрами 0 и 1.
- В механике ввёл понятие «живой силы» (прообраз современного понятия кинетической энергии) и сформулировал закон сохранения энергии[
- В психологии выдвинул понятие бессознательно «малых перцепций» и развил учение о бессознательной

ЛЕКЦИЯ 1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Понятие производной.

Геометрический и физический смысл производной.

Основные теоремы дифференциального исчисления.

Дифференцирование функций, заданных параметрически.

Дифференцирование функции нескольких переменных, частые производные.

Приближенное вычисление производной

ПОНЯТИЕ ПРОИЗВОДНОЙ

- Понятие производной является одним из основных математических понятий. Производная широко используется при решении ряда задач математики, физики, других наук, в особенности при изучении скорости разных процессов, поскольку производная характеризует скорость изменения дифференцируемой функции

ПОНЯТИЕ ПРОИЗВОДНОЙ

- Пусть функция y = f(x) определена на интервале (a, b).
  Чтобы ввести понятие производной проделаем следующее:
  - аргументу $x \in (a, b)$ придадим приращение Δx: $x + \Delta x \in (a, b)$
  - найдем соответствующее приращение функции:
  $$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x);$$
  - составим отношение приращения функции к приращению аргумента: $\frac{\Delta y}{\Delta x}$
  - найдем предел этого отношения при $\Delta x \to 0$: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$
- Если этот предел существует, то его называют **производной функции f(x)** и обозначают одним из символов
  $$f'(x),\ f'_x,\ y', \frac{dy}{dx}, \frac{df}{dx}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ

- **Производной функции** y = f(x) в точке x называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \text{ или } y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

- Функция y = f(x) , имеющая производную в каждой точке интервала (a,b), называется **дифференцируемой** в этом интервале
- Операция нахождения производной функции называется **дифференцированием**

ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ

- Из физики известно, что скорость прямолинейного движения

$$V = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

Где Δt – приращение времени, а $\Delta S = S(\mathrm{t} + \Delta t) - S(\mathrm{t})$ - приращение расстояния, перемещение точки за время Δt

- т. е. скорость прямолинейного движения материальной точки в момент времени t есть производная от пути S по времени t

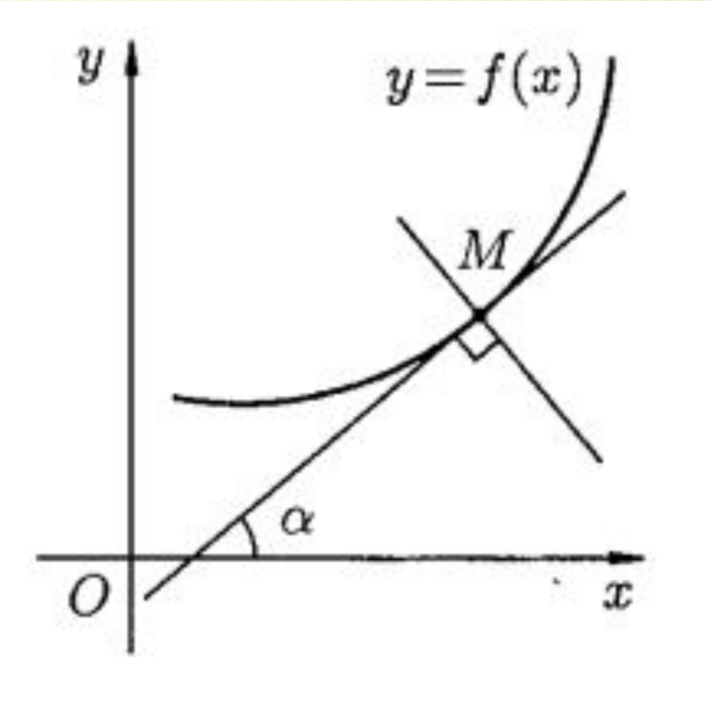
$$V = S'(t)$$

- В этом заключается **механический смысл производной**
- Обобщая, можно сказать, что если функция y = f(x) описывает какой-либо физический процесс, то производная y' есть скорость протекания этого процесса. В этом состоит **физический смысл производной**

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ

- производная $f^{'}(x)$ в точке x равна угловому коэффициенту касательной к графику функции y = f(x) в точке, абсцисса которой равна x
- Если точка касания M имеет координаты (x_0, y_0), то угловой коэффициент касательной

$$k = tg(\alpha) = f'(x_0)$$



Основные теоремы дифференциального исчисления

- Пусть функция f = f(x) дифференцируема в интервале (a,b), а c=const, тогда функция $c \cdot f(x)$ также дифференцируема в интервале (a,b), причем

$$(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$$

Пусть функции u = u(x) и v = v(x) - две дифференцируемые в интервале (a,b) функции, тогда

- 1) Производная суммы (разности) двух функций равна сумме (разности) производных этих функций

$$(u \pm v)' = u' \pm v'$$

- 2) Производная произведения двух функций равна произведению производной первого сомножителя на второй плюс произведение первого сомножителя на производную второго:

$$(u \cdot v)' = u'v + v'u$$

- 3) Производная частного двух функций равна произведению производной числителя на знаменатель минус произведение числителя на производную знаменателя, деленное на квадрат знаменателя

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

- **Теорема о производной сложной функции:**

Если функция $u = \varphi(x)$ имеет производную u'_x в точке x, а функция $y = f(u)$ имеет производную y'_u в соответствующей точке $u=\varphi(x)$, то сложная функция $y = f(u(x))$ имеет производную y'_x в точке x, которая находится по формуле

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x$$

- **Теорема Ферма**

Пусть функция f(x) определена и непрерывна на отрезке [a,b] и дифференцируема в интервале (a,b) и во внутренней точке $c \in [a, b]$ принимает наибольшее (или наименьшее) значение. Тогда производная в этой точке равна нулю

$$f'(c) = 0$$

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

- **Теорема Ролля**

Если функция f(x) определена и непрерывна на отрезке [a,b], дифференцируема в интервале (a,b) и ее значения на границах отрезка равны f(a)=f(b), то найдется внутренняя точке $c \in [a, b]$ такая, что производная в этой точке будет равна нулю

$$f^{'}(c) = 0$$

- **Теорема Лагранжа**

Если функция f(x) определена и непрерывна на отрезке [a,b] и дифференцируема в интервале (a,b), то найдется внутренняя точке $c \in [a, b]$ такая, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f^{'}(c)$$

ПРОИЗВОДНЫЕ ОСНОВНЫХ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ (u=u(x))

1. $(c)' = 0;$
2. $(u^\alpha)' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'$, в частности, $(\sqrt{u})' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u';$
3. $(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$, в частности, $(e^u)' = e^u \cdot u';$
4. $(\log_a u)' = \dfrac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'$, в частности, $(\ln u)' = \dfrac{1}{u} \cdot u';$
5. $(\sin u)' = \cos u \cdot u';$
6. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u';$
7. $(\operatorname{tg} u)' = \dfrac{1}{\cos^2 u} \cdot u';$
8. $(\operatorname{ctg} u)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u} \cdot u';$
9. $(\arcsin u)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u';$
10. $(\arccos u)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u';$
11. $(\operatorname{arctg} u)' = \dfrac{1}{1+u^2} \cdot u';$
12. $(\operatorname{arcctg} u)' = -\dfrac{1}{1+u^2} \cdot u';$
13. $(\operatorname{sh} u)' = \operatorname{ch} u \cdot u';$
14. $(\operatorname{ch} u)' = \operatorname{sh} u \cdot u';$
15. $(\operatorname{th} u)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 u} \cdot u';$
16. $(\operatorname{cth} u)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 u} \cdot u'.$

ПРИМЕРЫ

Найти производную функции

- $y = x^4 - 3 \cdot x^2 + 2 \cdot x - 1$
- $y = \frac{2 \cdot x^3}{tg\, x}$
- $y = \cos(ln^{12}(2 \cdot x))$
- $y = \sqrt[3]{2} + \sqrt[4]{x + 2} - \frac{1}{\sqrt[5]{x}} - \sqrt[x]{6}$

ЛОГАРИФМИЧЕСКОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

- В ряде случаев для нахождения производной целесообразно заданную функцию *сначала* прологарифмировать. А затем результат продифференцировать. Такую операцию называют ***логарифмическим дифференцированием.***
- *Например, найти производную функции*

$$y = \frac{(x^2+2)\cdot\sqrt[4]{(x-1)^3\cdot e^x}}{(x+5)^3}$$

- Можно найти *y'* с помощью правил и формул дифференцирования. Однако такой способ слишком громоздкий. Применим логарифмическое дифференцирование. Логарифмируем функцию у, пользуясь при этом основными свойствами логарифма (логарифм произведения равен сумме логарифмов, логарифм частного – разности логарифмов, показатель степени можно вынести как коэффициент:

$$\ln y = \ln(x^2+2) + \frac{3}{4}\cdot ln(\mathrm{x}-1) + \ln(e^x) - 3\cdot\ln(x+5)$$

ЛОГАРИФМИЧЕСКОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

- $$\ln y = \ln(x^2+2) + \frac{3}{4}\cdot ln(\mathrm{x}-1) + \mathrm{x} - 3\cdot\ln(x+5)$$
- Дифференцируем это равенство по x

$$\frac{y'}{y} = \frac{2\cdot x}{x^2+2} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x-1} + 1 + \frac{1}{x+5}$$

- Выражаем y'

$$y' = y\cdot(\frac{2\cdot x}{x^2+2} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x-1} + 1 + \frac{1}{x+5})$$

или

$$y' = \frac{(x^2+2)\cdot\sqrt[4]{(x-1)^3\cdot e^x}}{(x+5)^3}\cdot(\frac{2\cdot x}{x^2+2} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x-1} + 1 + \frac{1}{x+5})$$

ЛОГАРИФМИЧЕСКОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

- Существуют функции, производные которых находят лишь логарифмическим дифференцированием. К их числу относится *степенно-показательная функция* $y = u^v$,

где u = *u(x) и* v = *v(x)* - заданные дифференцируемые функции

Например, найти производную функции $y = (x+1)^x$

- Прологарифмируем обе части равенства и воспользуемся свойством логарифма, переместив показатель степени аргумента

$$\ln(y) = x \cdot \ln(x+1)$$

- Продифференцируем обе части по x

$$\frac{y'}{y} = \ln(x+1) + \frac{x}{x+1}$$

- Выражаем y'

$$y' = y \cdot \left(\ln(x+1) + \frac{x}{x+1}\right) = (x+1)^x \cdot \left(\ln(x+1) + \frac{x}{x+1}\right)$$

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ, ЗАДАННЫХ ПАРАМЕТРИЧЕСКИ

- Пусть зависимость между аргументом *x* и функцией *y* задана параметрически в виде двух уравнений

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

где *t* — вспомогательная переменная, называемая параметром

- Производная $y'(x)$ находится по формуле

$$y' = \frac{y'(t)}{x'(t)}$$

- Например, найти $y'(x)$ если $\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \end{cases}$

$$y' = \frac{2 \cdot t}{3 \cdot t^2} = \frac{2}{3 \cdot t}$$

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

- Функции одной независимой переменной не охватывают *все* зависимости, существующие в природе. Поэтому естественно расширить известное понятие функциональной зависимости и ввести понятие функции нескольких переменных.
- Будем рассматривать функции двух переменных, так как все важнейшие факты теории функций нескольких переменных наблюдаются уже на функциях двух переменных. Эти факты обобщаются на случай большего числа переменных. Кроме того, для функций двух переменных можно дать наглядную геометрическую интерпретацию.
- Примером функции двух переменных может служить площадь S прямоугольника со сторонами, длины которых равны x *и* y:

$$S\ (x,y)=xy$$

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

- Пусть задана функция *z = f(x,y)*. Так как *x и y* — независимые переменные, то одна из них может изменяться, а другая сохранять свое значение. Дадим независимой переменной *x* приращение Δx, сохраняя значение *y* неизменным. Тогда *z* получит приращение, которое называется ***частным приращением z по x*** и обозначается $\Delta_x z$

$$\Delta_x z = f(x+\Delta x, y) - f(x, y)$$

- Аналогично получаем частное приращение z по y:

$$\Delta_y z = f(x, y+\Delta y) - f(x, y)$$

- Полное приращение функции z определяется равенством

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y)$$

Дифференцирование функции нескольких переменных

- Если существует предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

то он называется частной производной функции z = f(x, y) по переменной x и обозначается одним из символов:

$$z'_x \quad \frac{\partial z}{\partial x} \quad f'_x \quad \frac{\partial f}{\partial x}$$

- Аналогично определяется и обозначается частная производная от z = f(x,y) по переменной y:

$$z'_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

- Таким образом, частная производная функции нескольких (двух, трех и больше) переменных определяется как производная функции по одной из этих переменных при условии постоянства значений остальных независимых переменных.
- Частные производные функции *нескольких переменных* находят по формулам и правилам вычисления производных функции одной переменной (при этом остальные независимые переменные считаются постоянными величинами).

ПРИМЕРЫ

Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ функций

- $z = 3x + 2y + e^{x^2 - y} + 1$
- $z = y \cdot \ln(1 + x^3)$
- $z = x\sqrt{y} + y\sqrt{x}$

Приближенное вычисление производной

Конечно-разностная аппроксимация производной

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = h_i$$

$$\Delta f_i = f(x_i) - f(x_{i-1}) = f_i - f_{i-1}$$

$f'(x_i) \approx \dfrac{f_i - f_{i-1}}{h}$ - формула левых разностей

$f'(x_i) \approx \dfrac{f_{i+1} - f_i}{h}$ - формула правых разностей

$f'(x_i) \approx \dfrac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h}$ - формула центральных разностей

ПРИМЕРЫ

- Рассчитать приближенные значения производной функции $f(x)=x^2$ на отрезке [1,2] с шагом 0,1, сравнить с точными значениями

x	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2
f(x)	1	1,21	1,44	1,69	1,96	2,25	2,56	2,89	3,24	3,61	4

ПРИМЕРЫ

h	0,1										
x	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2
f(x)	1	1,21	1,44	1,69	1,96	2,25	2,56	2,89	3,24	3,61	4
f'	2	2,2	2,4	2,6	2,8	3	3,2	3,4	3,6	3,8	4
левых разн		2,1	2,3	2,5	2,7	2,9	3,1	3,3	3,5	3,7	3,9
правых разн	2,1	2,3	2,5	2,7	2,9	3,1	3,3	3,5	3,7	3,9	
центр. разн.		2,2	2,4	2,6	2,8	3	3,2	3,4	3,6	3,8	