А. Байтұрсынов атындағы
Қостанай Мемлекеттік Университеті
Аграралық-техникалық институт
Математика және физика кафедрасы

Математика 3 пәні

Математика және физика кафедрасының аға оқытушысы , Берденова Г.Ж.

Қостанай, 2020

Тақырып:

Үзіліссіз кездейсоқ шамалар

Мақсат:

Үзіліссіз кездейсоқ шаманың үлестірім заңдарымен және сандық сипаттамаларымен танысу.

Қарастырылатын сұрақтар:

1. Кездейсоқ шамалар және үлестірім заңдары.
2. Кездейсоқ шаманың үлестірім функциясы және оның қасиеттері.
3. Кездейсоқ шаманың үлестірім тығыздығы және оның қасиеттері.
4. Үзіліссіз кездейсоқ шамалар.
5. Үзіліссіз кездейсоқ шаманың негізгі үлестірім заңдары.
6. Үзіліссіз кездейсоқ шаманың сандық сипаттамалары.

1 Анықтама.

Кездейсоқ себептен тәуелді, алдын-ала белгісіз бір мүмкін мәнді тәжірибе нәтижесінде қабылдайтын шама *кездейсоқ* деп аталады.

2 Анықтама.

Мәндері саналатын жиын құратын шама (элементтерін нөмірлеуге болатын жиын) *дискреттік кездейсоқ шама* деп аталады.

Анықтама.

Кейбір шектелген немесе шексіз интервалдан кез келген мән қабылдайтын шама *үзіліссіз кездейсоқ шама* деп аталады.

3 Анықтама.

Кездейсоқ шаманың мүмкін мәндері мен сәйкес ықтималдықтары арасындағы қатынасты тағайындайтын заң кездейсоқ шаманың *үлестірім заңы* деп аталады.

- Үзіліссіз кездейсоқ шаманың үлестірім заңы **үлестірім функциясы** немесе **үлестірім тығыздығы** арқылы берілуі мүмкін.

Анықтама.

X кездейсоқ шамасының ықтималдықтарының ***үлестірім функциясы*** (немесе интегралдық функциясы, үлестірім заңы) F(x) деп x-тің әрбір мәні үшін X -кездейсоқ шамасы $(X<x)$ x-тен кем мән қабылдау ықтималдығын анықтайтын функция аталады: $F(x) = P(X < x)$

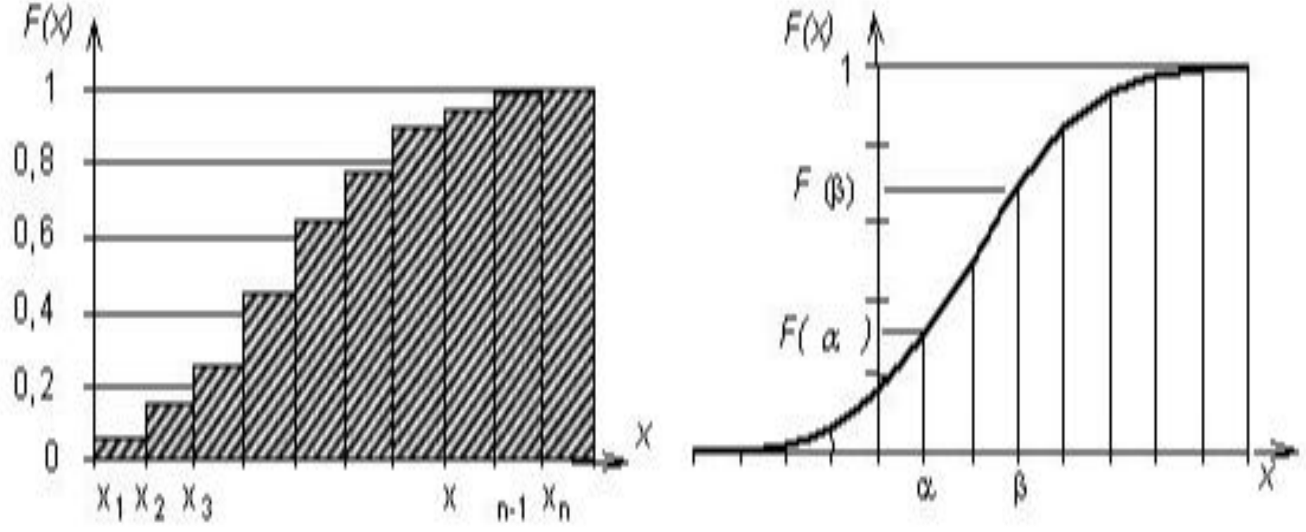
Анықтама.

X кездейсоқ шамасының ықтималдықтарының ***үлестірім функциясы*** (немесе интегралдық функциясы, үлестірім заңы)

$$F(x) = P(X < x)$$

деп x-тің әрбір мәні үшін X -кездейсоқ шамасы x-тен кем мән қабылдау ықтималдығын анықтайтын $F(x)$ функция аталады:

Үлестірім функциясының графиктері



Үлестірім функциясының қасиеттері:

1. Функция мәндері [0,1] кесіндісіне тиісті:

$$0 \le F(x) \le 1$$

2. Үлестірім функциясы кемімейтін функция:

егер $x_2 > x_1$ болса $\quad F(x_2) \ge F(x_1)$

3. Егер X кездейсоқ шамасының барлық мүмкін мәндері (a;$в$) интервалына тиісті болса, онда $\boldsymbol{x \le a}$ болғанда

$F(x)=0$ және $\quad x \ge в \quad$ болғанда $F(x)=1$.

Салдар 1.

$$P(\alpha \leq X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$$

Салдар 2.

X үзіліссіз кездейсоқ шамасының нақты бір мән қабылдау ықтималдығы нольге тең.

Салдар 3.

Егер X - кездейсоқ шамасының мүмкін мәндері осьтің барлық бойында орналасса, онда

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x \to \infty} F(x) = 1.$$

Анықтама.

Үлестірім функциясының туындысы *ықтималдықтар үлестірімінің тығыздығы* деп аталады:

$$f(x) = F'(x)$$

Теорема.

***X*- үзіліссіз кездейсоқ шамасының интервалынан мән қабылдау ықтималдығы мына формуламен анықталады:**

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$$

Үлестірім тығыздығының негізгі қасиеттері:

1. Үлестірім тығыздығы теріс емес функция: $f(x) \geq 0$.

2. Интегралдау шегі барлық сан осі болғанда үлестірім тығыздығының меншіксіз интегралы бірге тең:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

Үздіксіз кездейсоқ шаманың сандық сипаттамалары:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\ f(x)\,dx$$

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - M(X)]^2 f(x)\,dx$$

анықтама бойынша

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - [M(X)]^2$$

- теорема бойынша

Кездейсоқ шамалардың үлестірім заңдары:

Бірқалыпты үлестірім заңы –

кездейсоқ шаманың мүмкін мәндерінің интервалында үлестірім тығыздығы өзгермейтін үлестірім:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{в-a}, & егер \quad a \le x \le в \\ 0, \; егер \;\; x < a, & x > в \end{cases}$$

Көрсеткіштік (экспоненталық) үлестірім заңы –

– параметрі λ болатын үлестірім, егер ықтималдықтар тығыздығы мына түрде болса:

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & \text{егер} \quad x\geq 0\\ 0, & \text{егер} \quad x<0\end{cases}$$

Қалыпты үлестірім заңы (Гаусс заңы)

параметрлері *a* және σ , егер оның ықтималдықтар тығыздығы мына түрде болса:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

Параметрлері *a*=0, σ =1 болатын кездейсоқ шаманың қалыпты үлестірім заңы *стандартты* немесе *мөлшерленген* деп аталады.

Мөлшерленген **үлестірімнің ықтималдықтар тығыздығы мына түрде болады:**

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

функциясы Лапластың локалдық функциясы деп аталады.

σ^{2}.

Теорема.

Қалыпты заңмен үлестірімді *X* - кездейсоқ шамасының

$$M(X) = a, \qquad D(X) = \sigma^2$$

X қалыпты үлестірімді шамасы

(α, β) **интервалына тиісті мән қабылдау ықтималдығы:**

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right)$$

мұнда *Φ* (*x*) – Лаплас интегралдық функциясы.

σ 2.

Қалыпты кездейсоқ шаманың өз математикалық үмітінен ауытқуы

$\delta > 0$ шамасынан кем болу ықтималдығы мынаған тең:

$$P(|X - a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$$

Мысал

1. X - кездейсоқ шамасының ықтималдықтар үлестірімінің функциясы берілген:

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{егер } x\le 2\\ (x-2)^2, & \text{егер } 2<x\le 3\\ 1, & \text{егер } x>3\end{cases}$$

Ықтималдықтар үлестірімінің тығыздығын $f(x)$ және X кездейсоқ шамасының (1; 2,5), (2,5; 3,5) интервалына түсу ықтималдығын тап.

Шешуі: Ықтималдықтар үлестірімінің тығыздығын $f(x)=F'(x)$ формуласымен табамыз:

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}0, & \text{егер } x\le 2\\ 2x-4, & \text{егер } 2<x\le 3\\ 0 & \text{егер } x>3\end{cases}$$

X кездейсоқ шамасының (1; 2,5), (2,5; 3,5) интервалына түсу ықтималдығын $P(x_1<X<x_2)=F(x_2)-F(x_1)$ формуласымен есептеледі:

$$P(1<X<2{,}5)=F(2{,}5)-F(1)=0{,}5^2-0=0{,}25;$$

$$P(2{,}5<X<3{,}5)=F(3{,}5)-F(2{,}5)=1-0{,}25=0{,}75.$$

2. X үзіліссіз кездейсоқ шамасының ықтималдықтар үлестірімінің тығыздығы берілген:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \textit{егер} \quad x \le 1 \\ x-1/2, & \textit{егер} \quad 1 < x \le 2 \\ 0, & \textit{егер} \quad x > 2 \end{cases}$$

Үлестірім функциясын $F(x)$ тап және оның графигін сал.

Шешуі: $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx = 0$, егер $x \le 1$,

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{x} f(x)dx = 0 + x^2/2-(1/2)x = (x^2-x)/2, \text{ егер } 1<x\le 2,$$

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{2} f(x)dx = (x^2-x)/2 \,\Big|_1^2 = 1, \text{ егер } x>2.$$

3. X кездейсоқ шамасының (0;1) интервалында ықтималдықтар тығыздығы $f(x)= C(x^2+2x)$ түрінде берілген. Бұл интервалдан тыс жерде $f(x)=0$.
C параметрін тап.

Шешуі: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1,$ болғандықтан

$$C\int\limits_{0}^{1}(x^2+2x)dx = C\left(\frac{x^3}{3}+x^2\right)\Big|_0^1 = C\cdot\frac{4}{3} = 1,\quad \text{бұдан } C=\frac{3}{4}.$$

4. X үзіліссіз кездейсоқ шамасының ықтималдықтар тығыздығы $f(x) = 2C/(1+x^2)$ түрінде берілген. C параметрін тап.

Шешуі: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ теңдігі бойынша

$$2C = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = 2C\,arctgx\Big|_{-\infty}^{\infty} = 2C\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) = 2C\pi = 1,\ \text{Бұдан}\ \ C = \frac{1}{2\pi}.$$

5. X кездейсоқ шамасының (0;2) интервалында ықтималдықтар тығыздығы $f(x) = x/2$ түрінде берілген. Бұл интервалдан тыс жерде $f(x) = 0$. X кездейсоқ шамасының математикалық үмітін тап.

Шешуі: $M(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$ формуласы бойынша

$$M(X) = \int\limits_{0}^{2} x \cdot \frac{1}{2} x dx = \frac{x^3}{2 \cdot 3}\Big|_0^2 = \frac{4}{3}.$$

6. X кездейсоқ шамасының $(0;\pi)$ интервалында ықтималдықтар тығыздығы $f(x)=\frac{1}{2}\sin x$ - түрінде берілген. Бұл интервалдан тыс жерде $f(x)=0$.
X кездейсоқ шамасының дисперсиясын тап.

Шешуі: Дисперсияны табу үшін мына формуланы қолданамыз:

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx-[M(X)]^2$$

Ең әуелі математикалық үмітті есептейміз:

$$M(X)=\int_0^{\pi} xf(x)dx=\frac{1}{2}\int_0^{\pi} x\sin x dx.$$

Бөліктеп интегралдау әдісін қолданамыз, сонда $M(X)=\frac{\pi}{2}$ болады.
Дисперсия формуласының бірінші бөлігінің мәнін табамыз:

$$\int_0^{\pi} x^2 f(x)dx=\frac{1}{2}\int_0^{\pi} x^2 \sin x dx.$$

Оны екі рет бөліктеп интегралдаймыз, сонда мына өрнекті аламыз:

$$\int_0^{\pi} x^2 f(x)dx=\frac{\pi^2}{2}-2.$$

Дисперсия формуласына қойып, оның мәнін аламыз:

$$D(X)=\frac{\pi^2}{4}-2.$$

7. X кездейсоқ шамасы [1;6] кесіндісінде бірқалыпты үлестірімді. Осы кездейсоқ шаманың үлестірім функциясын $F(x)$, математикалық үмітін, дисперсиясын және орташа квадраттық ауытқуын тап.

Шешуі: X шамасы үшін ықтималдық тығыздығы мына түрде болады.

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \textit{егер} \quad x\le 1 \\ 1/5, & \textit{егер} \quad 1<x\le 6 \\ 0, & \textit{егер} \quad x>6 \end{cases}$$

Оған сәйкес үлестірім функциясы мына формула бойынша есептеледі.

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx,$$

Ол мына түрде жазылады

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \textit{егер} \quad x\le 1 \\ \frac{1}{5}\int_{1}^{x} dx=\frac{1}{5}x=\frac{x-1}{5}, & \textit{егер} \quad 1<x\le 6 \\ 0, & \textit{егер} \quad x>6 \end{cases}$$

Математикалық үміт M(X) = (1+6)/2=3,5 тең болады. Дисперсияны және орташа квадраттық ауытқуды табамыз.

$D(X)=(6-1)^2/12=25/12 \qquad \sigma_ч = 5\sqrt{3}/6$

8. Цех жасаған бөлшектердің диаметрінің өлшемі қалыпты үлестірімді. Бөлшек диаметрінің стандартты ұзындығы (математикалық үміті) 40 мм, ал орта квадраттық ауытқуы – 0,4 мм.

Табу керек:

а) кездейсоқ алынған бөлшектің диаметрі 39,5 мм-ден артық және 41 мм-ден кем болу ықтималдығын;

б) бөлшек диаметрінің стандартты ұзындықтан ауытқуы 0,6 мм-ден артпау ықтималдығын.

Шешуі:

а) Қалыпты үлестірімді X кездейсоқ шамасының (α, β) интервалынан мән қабылдау ықтималдығы мына формуламен анықталады:

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right)$$, где $\Phi\ (X)$ - функция Лапласа.

Есеп шарты бойынша $a = 40$, $\sigma = 0{,}4$, $\alpha = 39{,}5$, $\beta = 41$.

Сонда $P(39{,}5 < X < 41) = \Phi\left(\frac{41-40}{0{,}4}\right) - \Phi\left(\frac{39{,}5-40}{0{,}4}\right) = \Phi(2{,}5) - \Phi(-1{,}25) =$

$= 0{,}4938 + 0{,}3944 = 0{,}8882.$

б) Қалыпты кездейсоқ шамасының өз математикалық үмітінен ауытқуы $\delta > 0$-ден кем болу ықтималдығы мына формуламен есептеледі:

$$P(|X-a|<\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

Есеп шарты бойынша $\delta = 0{,}6$.

Сонда $P(|X-40|<0{,}6)=2\Phi\left(\frac{0{,}6}{0{,}4}\right)=2\Phi\,(1{,}5)\approx 2\cdot 0{,}4332 = 0{,}8664.$

Сонымен, дайындалған бөлшек диаметрінің ұзындығы 39,5-тен 41 мм-ге дейін болу ықтималдығы 0,8864-ге тең.

Тексеруге арналған сұрақтар:

1. Қандай кездейсоқ шамалар үзіліссіз деп аталады?
2. Кездейсоқ шаманың үлестірім функциясы деп не аталады?
3. Кездейсоқ шаманың ықтималдықтарының үлестірім тығыздығы деп не аталады?
4. Кездейсоқ шаманың қандай үлестірімі бірқалыпты деп аталады?
5. Кездейсоқ шаманың қандай үлестірімі көрсеткіштік деп аталады?
6. Кездейсоқ шаманың қандай үлестірімі қалыпты деп аталады?
7. Үзіліссіз кездейсоқ шаманың математикалық үміті қалай есептеледі?
8. Үзіліссіз кездейсоқ шаманың дисперсиясы қалай есептеледі?

Ұсынылатын әдебиеттер тізімі

1 Жаңбырбаев Б.С. Ықтималдықтар теориясы және математикалық статистика элементтері.- Алматы: «Қайнар», 2018.- 384б.

2 Бектаев Қ. Ықтималдықтар теориясы және математикалық статистика. Алматы: «Рауан», 2011ж.

3 Казешев А, Абенов М, Қойлышев Ү. Ықтималдықтар теориясы және математикалық статистика бойынша есептер жинағы.–А.: Ғылым, 2005.-183 б.

4 Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика.- М.: Высшая школа, 2000.- 479 б.

5 Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике.- М.: Высшая школа, 2000.- 400 б.

6 Виленкин Н.Я., Потапов В.Г. Задачник практикум по теории вероятности и математической статистике – М. Просвещение, 2010. -108 б.


Назарларыңызға
рахмет!