Основы математической обработки информации

Семестр: 1

Лекции: 6

Практические занятия: 10

Контрольная работа: 1

Зачёт

Лекция 4. Детерминированные модели

§1. Пример модели, приводящей к дифференциальному уравнению

§2. Пример модели, приводящей к разностному уравнению

§1. Пример модели, приводящей к дифференциальному уравнению

Скорость остывания воды в чайнике пропорциональна разности температуры чайника (Т) и температуры кухни (20 С°). Чайник выключился в 10.20 при температуре воды 100С°.

В 10.30 температура воды в чайнике была 80 С°.

Выясните, когда температура воды в чайнике будет равна 40 С°.

§1. Пример модели, приводящей к дифференциальному уравнению

Исходные данные:

Температура кухни: **20 С°**

Момент закипания чайника - 100С°: **0 мин**

Момент остывания чайника до 80С°: **10 мин**

Характер процесса остывания воды в чайнике: **скорость остывания воды в чайнике пропорциональна разности температуры чайника и температуры кухни .**

Содержательная постановка задачи

Разработать математическую модель, которая позволяет определить температуру воды в чайнике в любой момент времени.

§1. Пример модели, приводящей к дифференциальному уравнению

1. **t – время**

(независимая переменная, аргумент) ;

T – температура воды в чайнике

(зависимая переменная, функция).

2. **t – неотрицательно;**

T (0)=100, T(10)=80.

3. **T'(t) =k(T-20).**

Математическая постановка задачи

1. Выбрать переменные.
2. Записать ограничения на переменные.
3. Формулировка требований задачи на языке математики.

§1. Пример модели, приводящей к дифференциальному уравнению

Математическая постановка задачи

Найти решение дифференциального уравнения

$$T'(t) = k(T - 20)$$

при следующих начальных условиях

$$T(0) = 100, T(10) = 80$$

§1. Пример модели, приводящей к дифференциальному уравнению

$$T'(t) = k(T - 20)$$

$$T(0) = 100, T(10) = 80$$

Математическая постановка задачи

Задача свелась к обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка с заданными начальными условиями.

Существование и единственность решения такой задачи доказывается в теории обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), поэтому модель можно считать корректной.

§1. Пример модели, приводящей к дифференциальному уравнению

$$T'(t) = k(T - 20)$$

$$T(0) = 100, T(10) = 80$$

Аналитическое решение задачи

Данное ОДУ является уравнением с разделяющимися переменными. Этапы решения такого уравнения известны:

1. Представить производную функции в виде отношения дифференциалов.
2. Разделить переменные.
3. Проинтегрировать обе части уравнения.
4. Выразить искомую функцию.
5. Найти значения констант по заданным начальным условиям.
6. Записать искомую функцию.

§1. Пример модели, приводящей к дифференциальному уравнению

$$\frac{dT}{dt} = k(T-20) \qquad T'(t) = k(T-20)$$

$$\frac{dT}{T-20} = kdt$$

$$\int \frac{dT}{T-20} = \int kdt$$

$$\ln(T-20) = kt + \ln C$$

Аналитическое решение задачи

Данное ОДУ является уравнением с разделяющимися переменными. Этапы решения такого уравнения известны:

1. Представить производную функции в виде отношения дифференциалов.
2. Разделить переменные.
3. Проинтегрировать обе части уравнения.

§1. Пример модели, приводящей к дифференциальному уравнению

$$\ln\left(T-20\right)=kt+\ln C$$

$$e^{\ln\left(T-20\right)}=e^{kt+\ln C}$$

$$T-20=e^{kt}\cdot e^{\ln C}$$

$$T-20=C\cdot e^{kt}$$

$$T\left(t\right)=20+C\cdot e^{kt}$$

Аналитическое решение задачи

Данное ОДУ является уравнением с разделяющимися переменными. Этапы решения такого уравнения известны:

4. Выразить искомую функцию.

§1. Пример модели, приводящей к дифференциальному уравнению

$$T(t)=20+C\cdot e^{kt}$$

$$T(0)=100, T(10)=80$$

$$\begin{cases} 20+C\cdot e^{k\cdot 0}=100, \\ 20+C\cdot e^{k\cdot 10}=80 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C=80, \\ 20+80\cdot e^{k\cdot 10}=80 \end{cases} \quad \begin{cases} C=80, \\ e^{k\cdot 10}=\dfrac{3}{4} \end{cases} \quad \begin{cases} C=80, \\ k=\dfrac{1}{10}\ln\left(\dfrac{3}{4}\right) \end{cases}$$

Аналитическое решение задачи

Данное ОДУ является уравнением с разделяющимися переменными. Этапы решения такого уравнения известны:

5. Найти значения констант по заданным начальным условиям.

§1. Пример модели, приводящей к дифференциальному уравнению

$$T(t) = 20 + C \cdot e^{kt}$$

$$T(t) = 20 + 80e^{\frac{1}{10}\ln\left(\frac{3}{4}\right)\cdot t}$$

$$\begin{cases} C = 80, \\ k = \frac{1}{10}\ln\left(\frac{3}{4}\right) \end{cases}$$

Аналитическое решение задачи

Данное ОДУ является уравнением с разделяющимися переменными. Этапы решения такого уравнения известны:

6. Записать искомую функцию.

§1. Пример модели, приводящей к дифференциальному уравнению

$$T(t) = 20 + 80e^{\frac{1}{10}\ln\left(\frac{3}{4}\right)t}$$

Проверка адекватности модели

В любой момент времени температура воды в чайнике не ниже температуры кухни.

В начальный момент времени температура воды в чайнике 100С°.

Через 10 минут температура воды в чайнике 80С°.

§1. Пример модели, приводящей к дифференциальному уравнению

$$20+80e^{\frac{1}{10}\ln\left(\frac{3}{4}\right)t}=40$$

$$e^{\frac{1}{10}\ln\left(\frac{3}{4}\right)t}=\frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{10}\ln\left(\frac{3}{4}\right)t=\ln\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$t=10\frac{\ln\left(\frac{1}{4}\right)}{\ln\left(\frac{3}{4}\right)}=10\log_{\frac{3}{4}}\left(\frac{1}{4}\right)=10\log_{\frac{4}{3}}4$$

$$T(t)=20+80e^{\frac{1}{10}\ln\left(\frac{3}{4}\right)t}$$

Практическое использование модели

Выясним, когда температура воды в чайнике будет равна 40 С°.

§1. Пример модели, приводящей к дифференциальному уравнению

$$t = 10\log_{\frac{4}{3}} 4$$

$$t = 10\log_{\frac{4}{3}} 4 \approx 48,188416793$$

$$10.20 + 48 = 11.08$$

$$T(t) = 20 + 80e^{\frac{1}{10}\ln\left(\frac{3}{4}\right)t}$$

Практическое использование модели

Выясним, когда температура воды в чайнике будет равна 40 С°.

§1. Пример модели, приводящей к дифференциальному уравнению

Ответ: Приблизительно в 11.08 температура воды в чайнике будет равна 40 С° .

Скорость остывания воды в чайнике пропорциональна разности температуры чайника (Т) и температуры кухни (20 С°). Чайник выключился в 10.20 при температуре воды 100С°.
В 10.30 температура воды в чайнике была 80 С°.
Выясните, когда температура воды в чайнике будет равна 40 С°.

§1. Пример модели, приводящей к дифференциальному уравнению

Пример корректного вопроса:
когда температура воды в чайнике будет отличаться от температуры кухни меньше, чем на 10 градусов?

Примеры некорректных вопросов:
когда температура воды в чайнике будет 15 градусов?
какой была температура воды в чайнике в 10.00?

Сформулируйте: а) корректный вопрос;
б) некорректный вопрос,
который можно изучать с помощью данной модели.

§1. Пример модели, приводящей к дифференциальному уравнению

Пример корректного вопроса: когда температура воды в чайнике будет отличаться от температуры кухни меньше, чем на 10 градусов?

$$\left|T(t)-20\right|<10$$

$$T(t)=20+80e^{\frac{1}{10}\ln\left(\frac{3}{4}\right)t}$$

$$\left|20+80e^{\frac{1}{10}\ln\left(\frac{3}{4}\right)t}-20\right|<10 \qquad e^{\frac{1}{10}\ln\left(\frac{3}{4}\right)t}<\frac{1}{8} \qquad \frac{1}{10}\ln\left(\frac{3}{4}\right)\cdot t<\ln\left(\frac{1}{8}\right)$$

$$t>\frac{10\cdot\ln\left(\frac{1}{8}\right)}{\ln\left(\frac{3}{4}\right)}\approx 72{,}28262$$

Ответ: через 72 минуты.

§1. Пример модели, приводящей к дифференциальному уравнению

Пример некорректного вопроса:

когда температура воды в чайнике будет 15 градусов?

$$T(t) = 15$$

$$T(t) = 20 + 80e^{\frac{1}{10}\ln\left(\frac{3}{4}\right)t}$$

$$20 + 80e^{\frac{1}{10}\ln\left(\frac{3}{4}\right)t} = 15$$

$$e^{\frac{1}{10}\ln\left(\frac{3}{4}\right)t} = -\frac{5}{80}$$

$$t \in \varnothing$$

§1. Пример модели, приводящей к дифференциальному уравнению

Пример некорректного вопроса:
какой была температура воды в чайнике в 10.00?

$$T(-20)=?$$

$$T(t)=20+80e^{\frac{1}{10}\ln\left(\frac{3}{4}\right)t}$$

$$T(-20)=20+80e^{\frac{1}{10}\ln\left(\frac{3}{4}\right)\cdot(-20)}=20+80e^{-2\ln\left(\frac{3}{4}\right)}=20+80e^{\ln\left(\frac{16}{9}\right)}=$$

$$=20+80\cdot\frac{16}{9}\approx 162\;>100$$

§1. Пример модели, приводящей к дифференциальному уравнению

Классификация математических моделей в зависимости от:

- **Сложности объекта моделирования**;
- Оператора модели;
- Входных и выходных параметров;
- Способа исследования модели;
- Цели моделирования.

§1. Пример модели, приводящей к дифференциальному уравнению

Классификация математических моделей в зависимости от:

- Сложности объекта моделирования;
- **Оператора модели**;
- Входных и выходных параметров;
- Способа исследования модели;
- Цели моделирования.

§1. Пример модели, приводящей к дифференциальному уравнению

Классификация математических моделей в зависимости от:

- ❑Сложности объекта моделирования;
- ❑Оператора модели;
- **❑Входных и выходных параметров;**
- ❑Способа исследования модели;
- ❑Цели моделирования.

§1. Пример модели, приводящей к дифференциальному уравнению

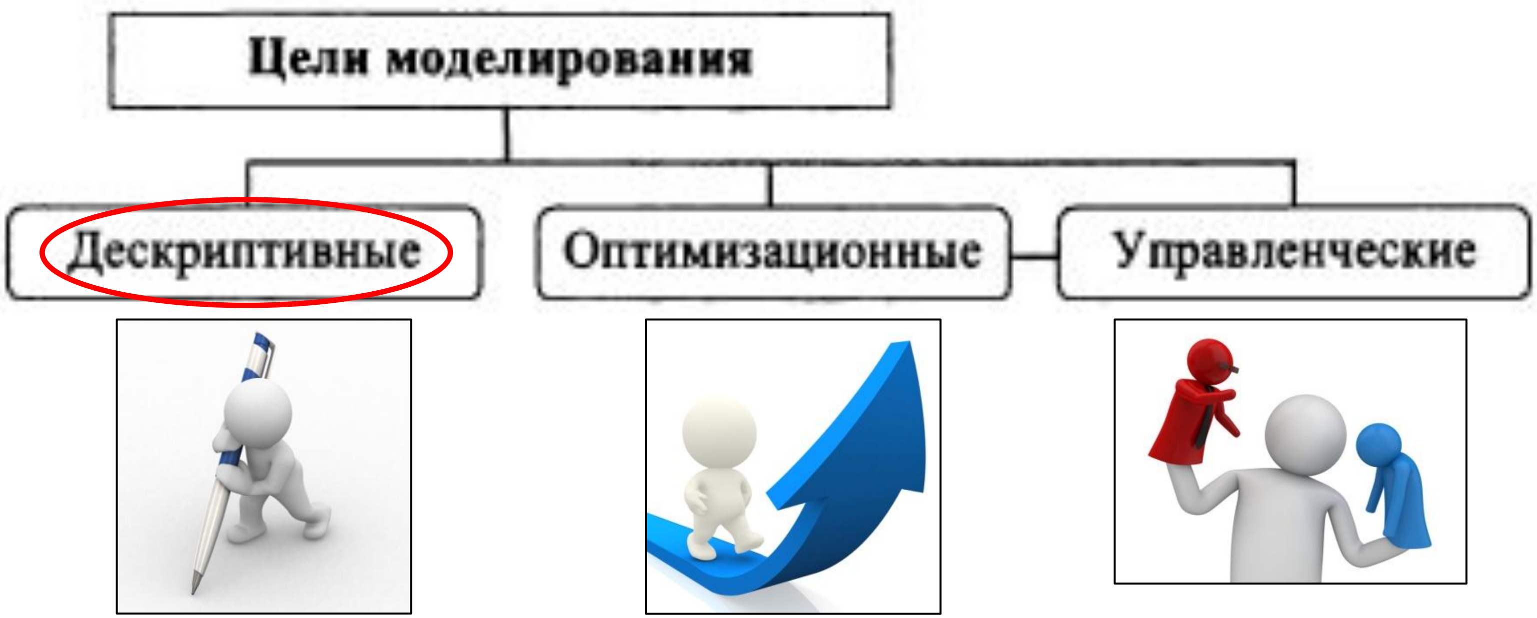
Классификация математических моделей в зависимости от:

- Сложности объекта моделирования;
- Оператора модели;
- Входных и выходных параметров**;**
- **Способа исследования модели**;
- Цели моделирования.

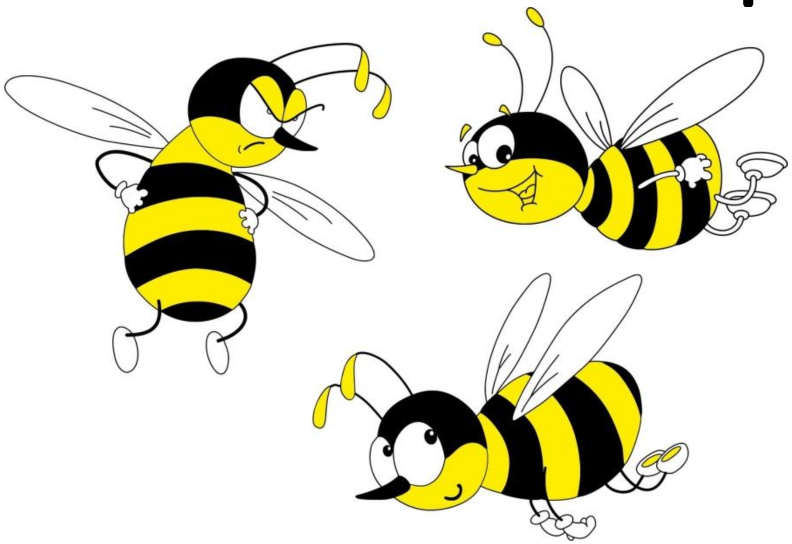
§1. Пример модели, приводящей к дифференциальному уравнению

Классификация математических моделей в зависимости от:

- Сложности объекта моделирования;
- Оператора модели;
- Входных и выходных параметров;
- Способа исследования модели;
- **Цели моделирования**.

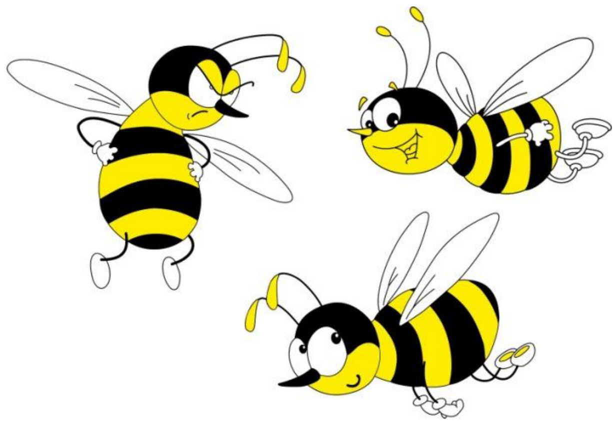


§2. Пример модели, приводящей к разностному уравнению



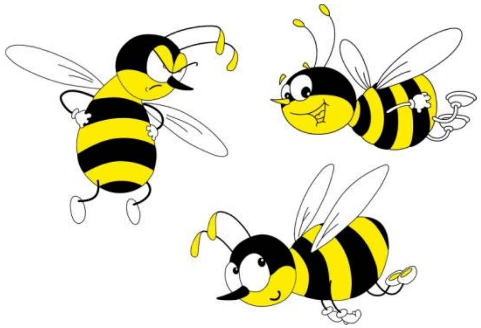
Математические модели теории популяций можно разделить на две группы: непрерывные и дискретные. В непрерывных моделях численность или плотность расселения популяции считается непрерывной функцией времени и/или пространственных координат. Непрерывные модели, как правило, представляются в виде одного или нескольких дифференциальных уравнений. Такой подход правомерен, когда численность популяции можно аппроксимировать непрерывной кривой, что возможно лишь для достаточно многочисленной популяции.

§2. Пример модели, приводящей к разностному уравнению



В реальности численность популяции представляет собой дискретную величину, которая принимает определенные значения в фиксированные моменты времени. Дискретные значения численности популяции могут быть получены из экспериментальных данных по изучению реальных популяций (лабораторных или полевых) в дискретные моменты времени. Если при этом предположить, что численность популяции x_n в момент времени t зависит от численностей в некоторые предшествующие моменты времени, то для описания динамики численности популяций можно применять аппарат разностных уравнений.

§2. Пример модели, приводящей к разностному уравнению



Пример. *Популяция насекомых увеличивается так, что прирост за n-й период времени вдвое больше прироста за предыдущий период времени.*

Пусть x_n – численность популяции в n-й период времени. Тогда приросты Δx_n и Δx_{n-1} численности популяции за n и n-1 периоды времени выразятся как разности

$$\Delta x_n = x_n - x_{n-1}, \quad \Delta x_{n-1} = x_{n-1} - x_{n-2} \tag{1.1}$$

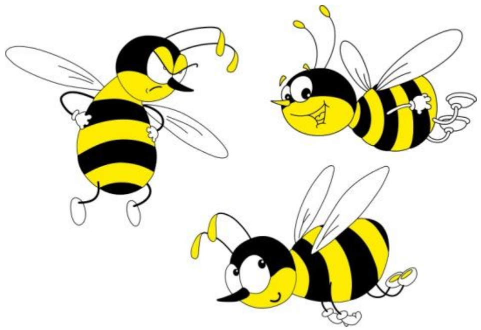
Из условия задачи можно записать

$$\Delta x_n = 2\Delta x_{n-1}, \tag{1.2}$$

Подставляя (1.2) в (1.1) придем к разностному уравнению

$$x_n - 3x_{n-1} + 2x_{n-2} = 0 \tag{1.3}$$

§2. Пример модели, приводящей к разностному уравнению



Пример. *Каждое поколение без учета внешнего влияния удваивается, но при этом в каждом поколении изымается 9 особей. Найти* x_n, *если* $x_0 = 10$.

Записывая последовательность

$$x_1 = 2x_0 - 9 = 20 - 9 = 11 = 9 + 2,$$

$$x_2 = 2x_1 - 9 = 4x_0 - 2*9 - 9 = 2^2 x_0 - 3*9 = 13 = 9 + 2^2,$$

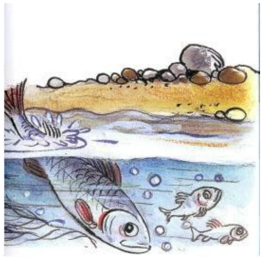
$$x_3 = 2x_2 - 9 = 26 - 9 = 17 = 9 + 2^3$$

по индукции придем к решению

$$x_n = 9 + 2^n$$

§2. Пример модели, приводящей к разностному уравнению

Зоолог выпускает в озеро 100 рыб каждой весной до тех пор, пока количество рыбы не достигнет 2000. Сама популяция развивается с темпом 50% каждый год. Сколько лет понадобилось зоологу для достижения его цели, если начальная численность рыб равна нулю?



§2. Пример модели, приводящей к разностному уравнению

Исходные данные:

Количество рыб в озере в начале эксперимента: **0 .**

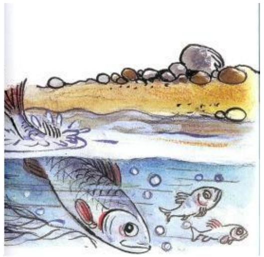
Количество рыб, которое каждый год выпускает в озеро зоолог: **100 .**

Количество рыб, которые ежегодно погибают: **0.**

Характер процесса размножения рыб в озере: **популяция развивается с темпом 50% ежегодно .**

Содержательная постановка задачи

Разработать математическую модель, которая позволяет ежегодно определять численность популяции рыб в озере.



§2. Пример модели, приводящей к разностному уравнению

1. **n – номер года**

(независимая переменная, аргумент) ;

xn – численность популяции рыб в n-ом году

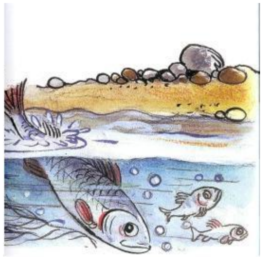
(зависимая переменная, функция).

2. **n – неотрицательно; x0=0**

$$3.\ x_{n+1} = 1{,}5 \cdot x_n + 100$$

Математическая постановка задачи

1. Выбрать переменные.
2. Записать ограничения на переменные.
3. Формулировка требований задачи на языке математики.



§2. Пример модели, приводящей к разностному уравнению

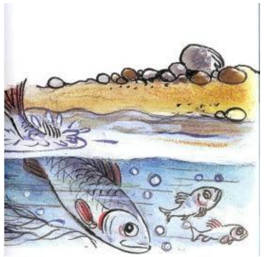
Математическая постановка задачи

Найти решение разностного уравнения

$$x_{n+1} = 1{,}5x_n + 100$$

при следующем начальном условии

$$x_0 = 0$$



§2. Пример модели, приводящей к разностному уравнению

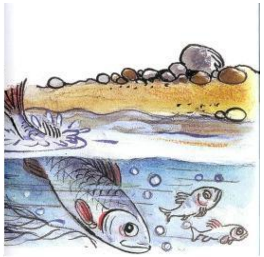
$$x_{n+1} = 1{,}5x_n + 100$$

$$x_0 = 0$$

Математическая постановка задачи

Задача свелась разностному уравнению первого порядка с заданным начальным условием.

Существование и единственность решения такой задачи доказывается в теории разностных уравнений (РУ), поэтому модель можно считать корректной.



§2. Пример модели, приводящей к разностному уравнению

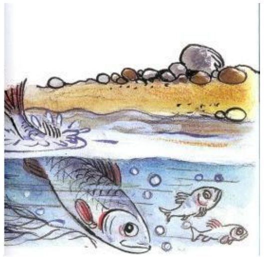
$$x_{n+1} = 1{,}5x_n + 100$$

$$x_0 = 0$$

Аналитическое решение задачи

Данное РУ является линейным уравнением с постоянными коэффициентами. Этапы решения такого уравнения известны:

1. Записать последовательно значения x1, x2, x3,…
2. По индукции получить зависимость xn=xn(n, x0).



§2. Пример модели, приводящей к разностному уравнению

$$x_{n+1} = 1{,}5 x_n + 100$$

$$x_1 = 1{,}5 x_0 + 100$$

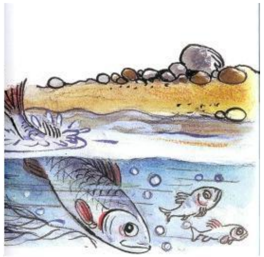
$$x_2 = 1{,}5 x_1 + 100 = 1{,}5(1{,}5 x_0 + 100) + 100 =$$
$$= 1{,}5^2 x_0 + (1{,}5 + 1) \cdot 100$$

$$x_3 = 1{,}5 x_2 + 100 = 1{,}5(1{,}5^2 x_0 + (1{,}5 + 1) \cdot 100) + 100 =$$
$$= 1{,}5^3 x_0 + (1{,}5^2 + 1{,}5 + 1) \cdot 100$$

Аналитическое решение задачи

Данное РУ является линейным уравнением с постоянными коэффициентами. Этапы решения такого уравнения известны:

1. Записать последовательно значения x1, x2, x3,…



§2. Пример модели, приводящей к разностному уравнению

$$x_3 = 1{,}5^3 x_0 + \left(1{,}5^2 + 1{,}5 + 1\right)\cdot 100$$

$$x_n = 1{,}5^n x_0 + \left(1{,}5^{n-1} + 1{,}5^{n-2} + \ldots + 1{,}5 + 1\right)\cdot 100$$

$$x_n = 1{,}5^n x_0 + \left(1 + 1{,}5 + \ldots + 1{,}5^{n-2} + 1{,}5^{n-1}\right)\cdot 100$$

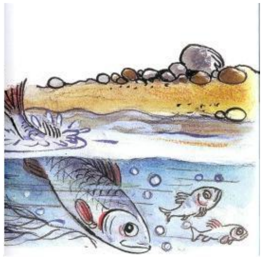
$$S_n = \frac{b_n q - b_1}{q - 1}, q \neq 1$$

$$x_n = 1{,}5^n x_0 + \frac{1{,}5^{n-1}\cdot 1{,}5 - 1}{1{,}5 - 1}\cdot 100 = 1{,}5^n x_0 + 200\cdot\left(1{,}5^n - 1\right)$$

Аналитическое решение задачи

Данное РУ является линейным уравнением с постоянными коэффициентами. Этапы решения такого уравнения известны:

2. По индукции получить зависимость xn=xn(n, x0).



§2. Пример модели, приводящей к разностному уравнению

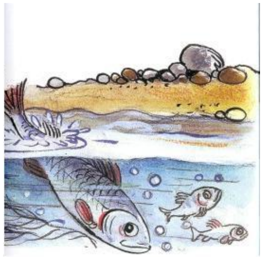
$$x_n = 1{,}5^n x_0 + 200 \cdot \left(1{,}5^n - 1\right)$$

$$x_0 = 0$$

Аналитическое решение задачи

Данное РУ является линейным уравнением с постоянными коэффициентами. Этапы решения такого уравнения известны:

2. По индукции получить зависимость xn=xn(n, x0).



§2. Пример модели, приводящей к разностному уравнению

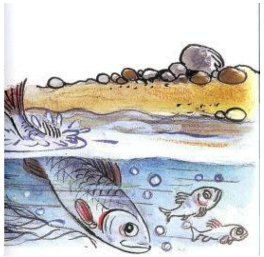
$$x_n = 1{,}5^n x_0 + 200 \cdot \left(1{,}5^n - 1\right)$$

$$x_0 = 0$$

Проверка адекватности модели

В любой год численность популяции неотрицательна.
В год начала эксперимента численность популяции равна нулю.

ФГБОУ ВО «УлГПУ им. И.Н. Ульянова»
Основы математической обработки информации
лектор Макеева О.В.



§2. Пример модели, приводящей к разностному уравнению

$$1{,}5^n \cdot 0 + 200 \cdot \left(1{,}5^n - 1\right) = 2000$$

$$200 \cdot \left(1{,}5^n - 1\right) = 2000$$

$$1{,}5^n - 1 = 10$$

$$1{,}5^n = 11$$

$$n = \log_{\frac{3}{2}} 11$$

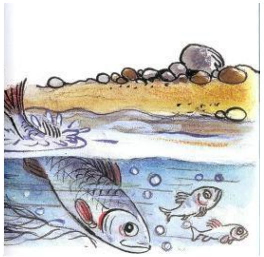
$$n \approx 5{,}91393$$

$$x_n = 1{,}5^n x_0 + 200 \cdot \left(1{,}5^n - 1\right)$$

$$x_0 = 0$$

Практическое использование модели

Выясним, через сколько лет численность популяции достигнет 2000 рыб.



§2. Пример модели, приводящей к разностному уравнению

$$n = 6$$

$$x_n = 1{,}5^n x_0 + 200 \cdot \left(1{,}5^n - 1\right)$$

$$x_0 = 0$$

Практическое использование модели

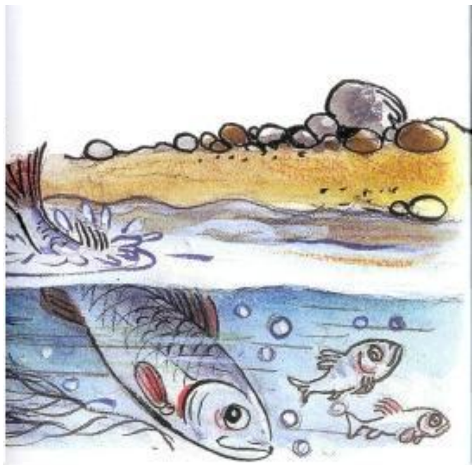
Выясним, через сколько лет численность популяции достигнет 2000 рыб.

§2. Пример модели, приводящей к разностному уравнению

Зоолог выпускает в озеро 100 рыб каждой весной до тех пор, пока количество рыбы не достигнет 2000. Сама популяция развивается с темпом 50% каждый год. Сколько лет понадобилось зоологу для достижения его цели, если начальная численность рыб равна нулю?

Ответ: Численность популяции достигнет 2000 рыб через 6 лет после начала эксперимента.

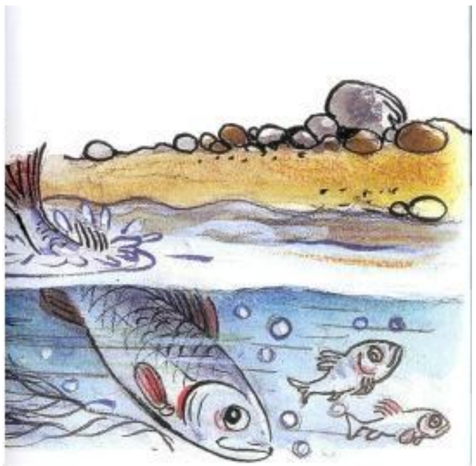
§2. Пример модели, приводящей к разностному уравнению



Пример 1:
какой будет численность популяции через 3 года, если *на начало эксперимента в озере обитало 10 рыб*?

Приведите примеры задачи, которую можно решить с помощью аналогичной модели и требуется изменить лишь начальное условие.

§2. Пример модели, приводящей к разностному уравнению



Пример 1:
какой будет численность популяции через 3 года, если *на начало эксперимента в озере обитало 10 рыб*?

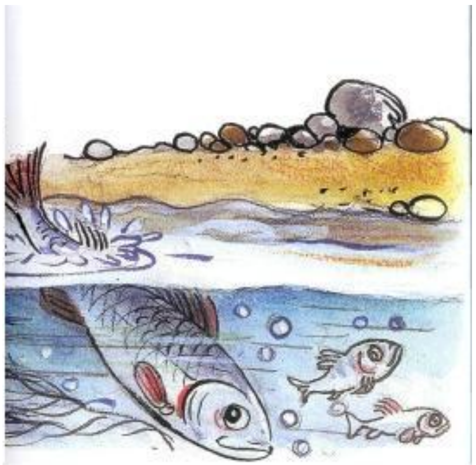
$$x_n = 1{,}5^n x_0 + 200 \cdot \left(1{,}5^n - 1\right)$$

$$x_0 = 10$$

$$x_3 = 1{,}5^3 \cdot 10 + 200 \cdot \left(1{,}5^3 - 1\right) = 508{,}75$$

Ответ: Численность популяции через три года составит 508 рыб.

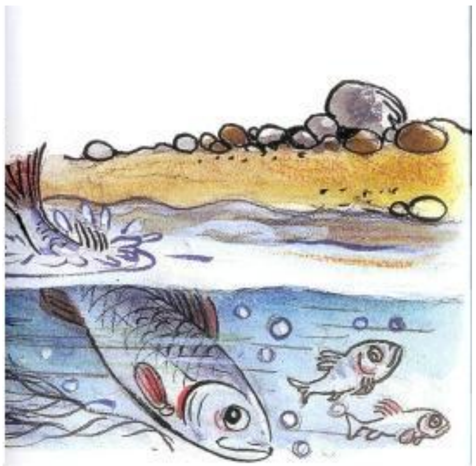
§2. Пример модели, приводящей к разностному уравнению



Пример 2:
сможет ли численность популяции достичь 2000 особей, если рыбы *погибают с темпом 5% в год* из-за плохой экологической ситуации?

Приведите примеры задачи, которую можно решить с помощью аналогичной модели, но потребуется внести изменение в характер процесса развития популяции.

§2. Пример модели, приводящей к разностному уравнению



Пример 2:
сможет ли численность популяции достичь 2000 особей, если рыбы *погибают с темпом 5% в год* из-за плохой экологической ситуации?

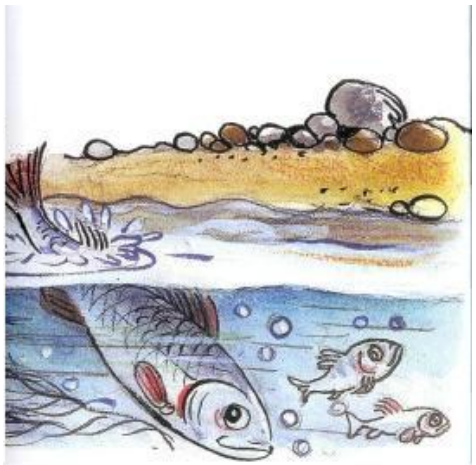
$$x_{n+1} = 0{,}95 \cdot x_n + 100$$
$$x_0 = 0$$

$$x_n = 0{,}95^n x_0 + \left(1 + 0{,}95 + \ldots + 0{,}95^{n-2} + 0{,}95^{n-1}\right) \cdot 100$$

$$x_n = 0{,}95^n x_0 + \frac{0{,}95^{n-1} \cdot 0{,}95 - 1}{0{,}95 - 1} \cdot 100 =$$

$$= 0{,}95^n x_0 - 2000 \cdot \left(0{,}95^n - 1\right)$$

§2. Пример модели, приводящей к разностному уравнению



Пример 2:
сможет ли численность популяции достичь 2000 особей, если рыбы *погибают с темпом 5% в год* из-за плохой экологической ситуации?

$$x_n = 0{,}95^n x_0 - 2000 \cdot \left(0{,}95^n - 1\right)$$

$$x_0 = 0$$

$$0{,}95^n x_0 - 2000 \cdot \left(0{,}95^n - 1\right) = 2000$$

$$-2000 \cdot \left(0{,}95^n - 1\right) = 2000$$

$$0{,}95^n = 0$$

Ответ: Численность популяции никогда не достигнет 2000 рыб.

Основы математической обработки информации

Продолжение следует…