РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ПО ПРАВИЛУ КРАМЕРА, МАТРИЧНЫМ МЕТОДОМ, МЕТОДОМ ГАУССА

ПОЛНАЯ СХЕМА ИССЛЕДОВАНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Основные обозначения:

- система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

- матричная запись СЛАУ: $A \cdot X = B$,

где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

основная матрица системы,

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

столбец неизвестных системы,

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

столбец свободных членов

- расширенная матрица системы: $\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right);$

- однородная СЛАУ:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0\,; \end{cases}$$

Методы решения СЛАУ:

- правило Крамера;
- матричный метод;
- метод Гаусса

Правило Крамера

- Решает системы n – линейных алгебраических уравнений с n – неизвестными общего вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases}$$

причем определитель основной матрицы системы отличен от нуля.

Определение. Определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных системы называется ***главным определителем системы***, обозначается Δ:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2n} \\ \dots. & \dots. & \dots. & \dots. & \dots. & \dots. \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Правило Крамера

Вспомогательный определитель Δ*i* получается из определителя Δ путем замены соответствующего *i*-го столбца столбцом свободных членов:

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & b_1 & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & b_2 & \ldots & a_{2n} \\ \ldots. & \ldots. & \ldots. & \ldots. & \ldots. & \ldots. \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & b_n & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Теорема (*правило Крамера*)

- Если главный определитель Δ системы размерности $n \times n$ отличен от нуля, то система имеет решение, и притом, единственное. Это решение можно найти по формулам:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad \ldots \quad x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad \ldots, \; x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta},$$

Алгоритм решения СЛАУ матричным методом:

1. Вычисляем главный определитель Δ системы, убеждаемся, что он отличен от нуля.
2. Находим матрицу A^{-1}, обратную основной матрице системы.
3. Находим решение системы по формуле

$$X = A^{-1} \cdot B \ .$$

4. Делаем проверку, подставляя полученное решение в исходную систему.

Метод Гаусса решения СЛАУ

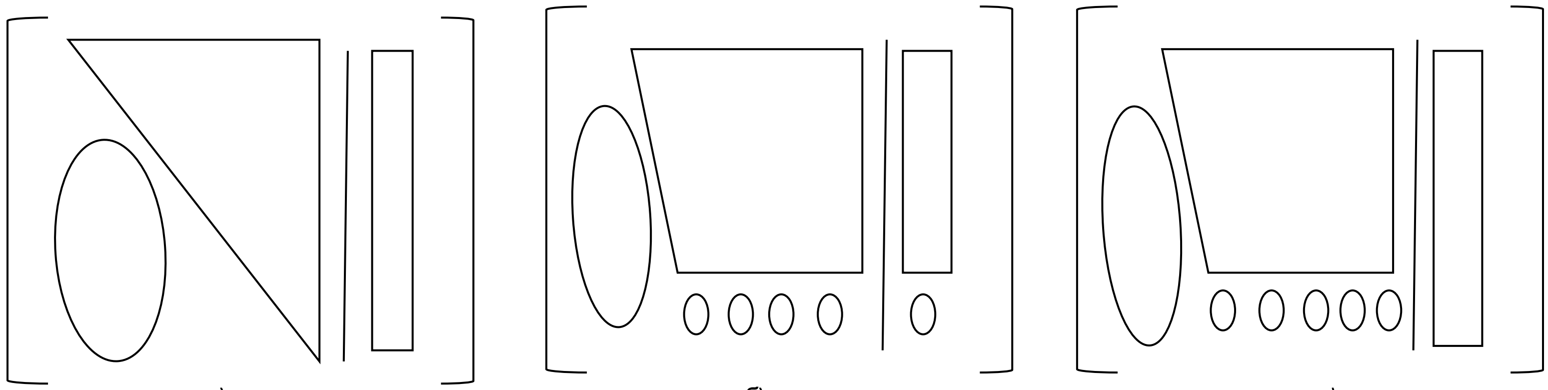
Суть метода Гаусса

Чтобы решить систему m – линейных алгебраических уравнений с n – неизвестными методом Гаусса, необходимо записать расширенную матрицу системы и, используя элементарные преобразования расширенной матрицы системы, привести ее к трапециевидной форме.

Элементарные преобразования расширенной матрицы системы :

1. перестановка строк (столбцов) матрицы;
2. умножение строки матрицы на действительное число отличное от нуля и сложение с другой строкой;
3. вычеркивание строки матрицы, все элементы которой равны нулю;
4. вычеркивание одной из пропорциональных строк матрицы;
5. умножение строки матрицы на число отличное от нуля.

В результате этих преобразований матрица примет один их трех видов:



а) б) в)

- Если матрицу можно свести к виду ***а)*** , то система совместна и имеет ***единственное решение***.
- Если матрицу можно свести к виду ***б)*** , то система совместна и имеет ***множество решений***.
- Если матрицу можно свести к виду ***в)*** , то система ***несовместна***.

Теорема Кронекера-Капелли

Для того чтобы СЛАУ была совместной, необходимо и достаточно, чтобы ранг основной матрицы системы был равен рангу расширенной матрицы, то есть $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(\overline{A}) = r$, причем, если $r = n$ – числу неизвестных, то система имеет единственное решение, если $r < n$, то система имеет множество решений.

$\overline{A}$

ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ТЕОРЕМЫ КРОНЕКЕРА-КАПЕЛЛИ	Ранг	Система неоднородная $AX=B$, где m – уравнений, n – неизвестных	Система однородная $AX=0$, где m – уравнений, n – неизвестных
1.	$\operatorname{rang}(A) \neq \operatorname{rang}(\overline{A})$	Система несовместна	Это невозможно при $b_1=b_2=\ldots=b_n=0$, то есть однородная система всегда совместна
2.	$\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(\overline{A})$	Система совместна	Совместна
	а) $r = n$	Решение единственное	Решение только тривиальное $(x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0)$
	б) $r < n$	Решений множество	Имеются нетривиальные решения (решений множество)

Общая схема исследования и решения систем линейных алгебраических уравнений

1. Записываем СЛАУ в ***матричном виде***.
2. Выписываем ***расширенную матрицу*** системы.
3. Находим ***ранг основной и расширенной матриц*** системы:

а) если ***ранги*** матриц ***различны***, то система ***несовместна***;

б) если ***ранги*** матриц ***равны***, причем $\boldsymbol{r = n}$, где n – число неизвестных, то система ***совместна***, имеет ***единственное решение***, которое может быть найдено с помощью методов: <u>правила Крамера, матричного метода, метода Гаусса;</u>

в) если ***ранги*** матриц ***равны***, но $\boldsymbol{r < n}$, то система ***совместна***, имеет ***множество решений***, которое можно найти <u>только методом Гаусса</u>, вводя r – базисных переменных и n – свободных переменных.

Спасибо за внимание!!! =)