ТЕМА 6

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Математическую модель САУ используют

для изучения работы систем автоматического регулирования при установившемся режиме работы, а также в переходных режимах.

Дифференциальное уравнение САУ

Динамику линейных автоматических систем исследуют на основе неоднородных дифференциальных уравнений n-го порядка с постоянными коэффициентами:

$$a_0 \frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{d^2 y}{dt^2} + a_n \frac{dy}{dt} =$$

$$= b_0 \frac{d^m x}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \dots + b_{m-1} \frac{d^2 x}{dt^2} + b_m \frac{dx}{dt}$$

a_i, b_i - постоянные коэффициенты,
y – управляемая (выходная) величина,
x – входная величина.

Уравнение описывает динамический процесс изменения выходной величины при <u>наличии возмущающих воздействий</u>.

Дифференциальное уравнение САУ

В операторной форме это уравнение:

$$\boxed{D(p)y = M(p)x;}$$

$$D(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n;$$

$$M(p) = b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m,$$

$p = \frac{d}{dt}$ - оператор дифференцирования

D(p) – оператор левой части

M(p) – оператор правой части

Дифференциальное уравнение САУ

Часто используют понятие передаточной функции, выражение которой получают:

$$\boxed{W(p) = \frac{M(p)}{D(p)} = \frac{b_0 p^m + \dots + b_m}{a_0 p^n + \dots + a_n}}$$

Передаточная функция – это отношение операторов правой и левой частей дифференциального уравнения. Знаменатель передаточной функции определяет характеристическое уравнение для исходного уравнения, с помощью которого описывают свободные движения (например, колебания) системы.

Преобразование Лапласа

Для решения дифференциального уравнения системы используют метод анализа, основанный на преобразованиях Лапласа.

Суть в том, что функция вещественных переменных заменяется ее изображением, связь между которыми осуществляется через оператор Лапласа:

$$\boxed{F(p)=\int_0^{\infty} e^{-pt} f(t)\,dt}$$

F(p) – изображение функции

$p=\frac{d}{dt}$ - оператор дифференцирования или оператор Лапласа

f(t) – функция вещественного переменного

Такая замена позволяет свести решение дифференциальных уравнений к простейшим алгебраическим операциям для нахождения изображения. А зная изображение, можно найти искомую функцию по специальным формулам:

Преобразование Лапласа

$$\boxed{f(t) \leftrightarrow F(p)}$$

$$\boxed{f^n(t) \leftrightarrow p^n F(p)}$$

$$\boxed{F(p)=\frac{1}{p},\ \text{то}\quad f(t)=1}$$

$$\boxed{F(p)=a(p^2+a^2),\ \text{то}\quad f(t)=\sin(at)}$$

$$\boxed{F(p)=\frac{1}{p+\alpha},\ \text{то}\quad f(t)=e^{-\alpha t}}$$

$$\boxed{F(p)=\frac{\alpha}{p(p+\alpha)},\ \text{то}\quad f(t)=1-e^{-\alpha t}}$$

Преобразование Лапласа

Применив преобразование Лапласа к дифференциальному уравнению, получим связь изображений входной и выходной функций:

$$\boxed{W(p) = \frac{y(p)}{x(p)} = \frac{b_0 p^m + \ldots + b_m}{a_0 p^n + \ldots + a_n}}$$

Откуда дифференциальное уравнение будет иметь вид:

$$\boxed{y(p) = W(p) \cdot x(p)}$$

Передаточная функция будет иметь вид:

$$\boxed{W(p) = \frac{y(p)}{x(p)}}$$

Амплитудно-фазовая частотная (АФЧ) характеристика системы

Если в выражение передаточной функции подставить вместо оператора *p* мнимую переменную $j\omega$, то полученное уравнение

$$\boxed{W(j\omega) = \frac{y(j\omega)}{x(j\omega)}}$$

определяет амплитудно-фазовую частотную характеристику системы

Линейные системы

Для линейных систем передаточная функция исчерпывающе характеризует поведение системы при любых возмущениях, так как значение *W(p)* не зависит от формы возмущения.

Если принять в качестве внешнего воздействия функцию *f(t)*=1, т.е. изображение функции *x(p)=1/p*, (соответствует единичному скачку внешней нагрузки - мгновенное приложение нагрузки), то изображение выходной величины имеет вид:

$$\boxed{y(p)=\frac{W(p)}{p}}$$

Т.О. зная передаточную функцию системы, можно получить изображение управляемой величины и по формулам преобразования Лапласа перейти к динамической характеристике звена или системы.

ЕСЛИ ЗНАМЕНАТЕЛЬ ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ *W(p)* ПРИРАВНЯТЬ К 0, ТО ПОЛУЧИМ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ, ОПИСЫВАЮЩЕЕ ЕЕ СВОБОДНОЕ ДВИЖЕНИЕ, Т.Е. МАТЕМАТИЧЕСКУЮ МОДЕЛЬ СИСТЕМЫ.

ПРИМЕР:

Пусть передаточная функция имеет вид: $$\boxed{W(p) = \frac{1}{Tp+1}}$$

Получить уравнение для выходного параметра *y(t)*.

РЕШЕНИЕ:

$$\boxed{\begin{aligned} y(p) &= \frac{W(p)}{p} = \frac{1}{p(Tp+1)} = \\ &= \frac{1}{Tp\left(p+\frac{1}{T}\right)} = \frac{\frac{1}{T}}{p\left(p+\frac{1}{T}\right)} = \frac{\alpha}{p(p+\alpha)} \end{aligned}}$$

Поскольку изображение функции изменения выходного параметра имеет полученный вид, то сама функция имеет вид:

$$\boxed{y(t) = 1 - e^{-\alpha t}}$$

Замечание

Для получения математической модели автоматической системы необходимо все реальные элементы в системе заменить типовыми динамическими звеньями, преобразовав функциональную блок-схему в структурную схему системы, которая представляет собой соединение типовых динамических звеньев. Для структурной схемы требуется получить передаточную функцию системы и, приравняв знаменатель $W(p)$ к 0, получить характеристическое уравнение системы или ее математическую модель.

Типовые динамические звенья и способы их соединения.

Типовое динамическое звено – часть автоматической системы, динамические свойства которого описываются дифференциальным уравнением *не выше второго порядка*.

ЛЮБОЕ ДИНАМИЧЕСКОЕ ЗВЕНО ХАРАКТЕРИЗУЕТСЯ

1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЕМ ЗВЕНА
2. ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИЕЙ
3. АМПЛИТУДНО-ФАЗОВОЙ ЧАСТОТНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ

Различают:

1. Безынерционные звенья
2. Инерционные звенья
3. Колебательные звенья
4. Дифференцирующие звенья
5. Интегрирующие звенья.

БЕЗЫНЕРЦИОННЫЕ ЗВЕНЬЯ.

Звенья у которых при скачкообразном изменении входного сигнала, выходной изменяется в k раз.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ (ДУ): $\boxed{y = kx}$

k – коэффициент статического преобразования или коэффициент преобразования

ПЕРЕДАТОЧНАЯ ФУНКЦИЯ (ПФ): $\boxed{y(p) = kx(p)}$

$$\boxed{W(p) = \frac{y(p)}{x(p)} = k}$$

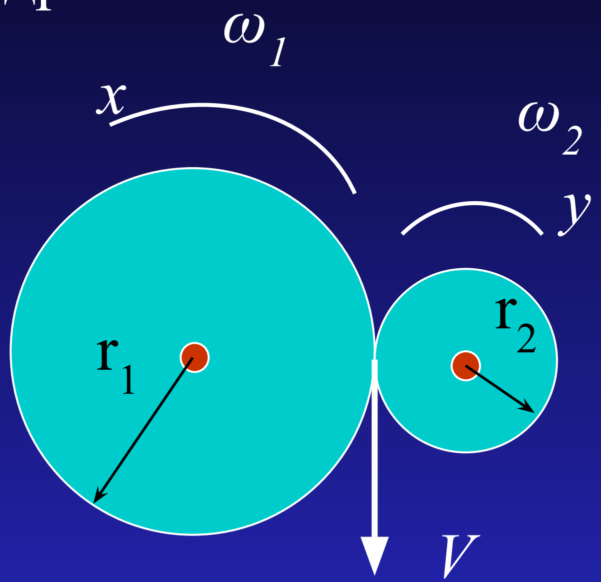
АФЧ-ХАРАКТЕРИСТИКА (АФЧХ): $\boxed{W(i\omega) = k}$

БЕЗЫНЕРЦИОННЫЕ ЗВЕНЬЯ.

К безынерционным звеньям можно отнести передаточные механизмы, усилители, насосы и др.

ПРИМЕР:

Механическая передача



$$\boxed{V = \omega r}$$

$$\boxed{\omega_1 r_1 = \omega_2 r_2}$$

$$\boxed{\omega_2 = \omega_1 \frac{r_1}{r_2} = k\omega_1}$$ - ПЕРЕДАТОЧНАЯ ФУНКЦИЯ (ПФ)

Для насоса x – атмосферное давление, y – давление, создаваемое насосом.

ИНЕРЦИОННЫЕ ЗВЕНЬЯ.

при скачкообразном изменении входного сигнала, выходной сигнал стремиться к новому установившемуся значению по экспоненциальному закону.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ (ДУ):

$$\boxed{T\frac{dy}{dt} + y = kx}$$

ПЕРЕДАТОЧНАЯ ФУНКЦИЯ (ПФ):

$$\boxed{Tpy(p) + y(p) = kx(p)}$$

$$\boxed{W(p) = \frac{k}{Tp+1}}$$

АФЧ-ХАРАКТЕРИСТИКА (АФЧХ):

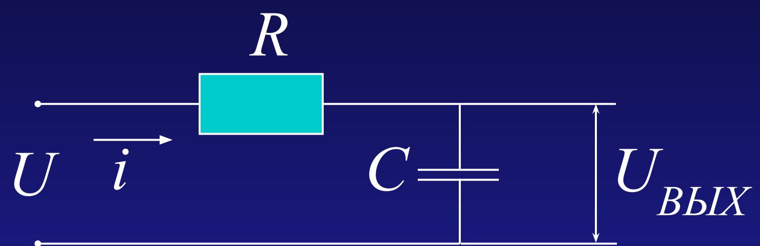
$$\boxed{W(j\omega) = \frac{k}{T(j\omega)+1}}$$

ИНЕРЦИОННЫЕ ЗВЕНЬЯ.

К инерционным звеньям можно отнести баки с жидкостью, электродвигатели пост. тока, генераторы (при определенных допущениях), термопары, электрические цепи R-C и др.

ПРИМЕР:

электрическая цепь R-C



По II закону Кирхгоффа составим уравнение электрической цепи

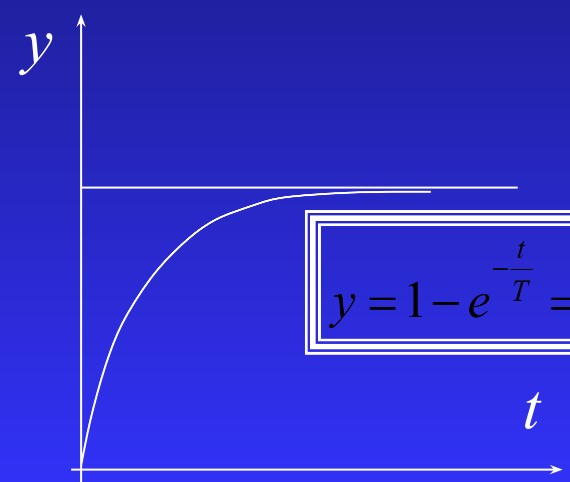
$$i = C\frac{dU_{ВЫХ}}{dt}$$

$$iR + U_{ВЫХ} = U$$

$$RC\frac{dU_{ВЫХ}}{dt} + U_{ВЫХ} = U$$

$$RC = T$$

$$T\frac{dy}{dt} + y = kx$$



$$y = 1 - e^{-\frac{t}{T}} = 1 - e^{-\frac{t}{RC}}$$

КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ ЗВЕНЬЯ.

при скачкообразном изменении входного сигнала, выходной сигнал колеблется относительного нового установившегося значения (положения равновесия) с амплитудой, затухающей по экспоненциальному закону.

ДИФФУР (ДУ):

$$\boxed{T_2^2 \frac{d^2 y}{dt^2} + T_1 \frac{dy}{dt} + y = kx}$$

ПЕРЕДАТОЧНАЯ ФУНКЦИЯ (ПФ):

$$\boxed{W(p) = \frac{k}{T_2^2 p^2 + T_1 p + 1}}$$

АФЧ-ХАРАКТЕР. (АФЧХ):

$$\boxed{W(j\omega) = \frac{k}{T_2^2 (j\omega)^2 + T_1 (j\omega) + 1}}$$

T_1 – коэффициент, характеризует демпфирование (диссипативные силы),
T_2 – коэффициент, характеризует раскачивающие свойства в системе

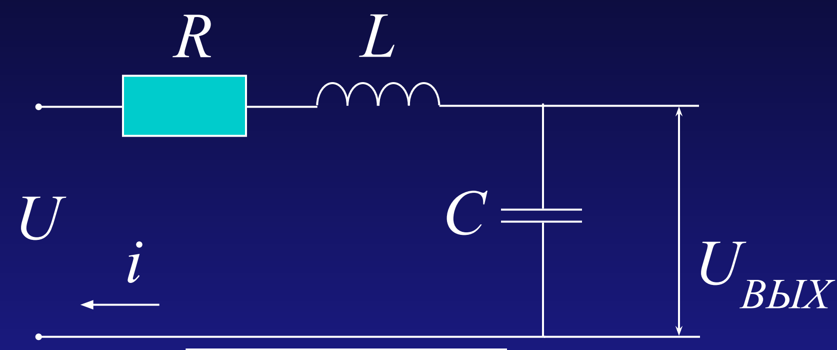
КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ ЗВЕНЬЯ.

К колебательным звеньям можно отнести объекты, имеющие подпружиненную массу, т.е. имеющие упругость

ПРИМЕР:

Колебательный контур R-L-C

По II закону Кирхгоффа составим уравнение электрической цепи



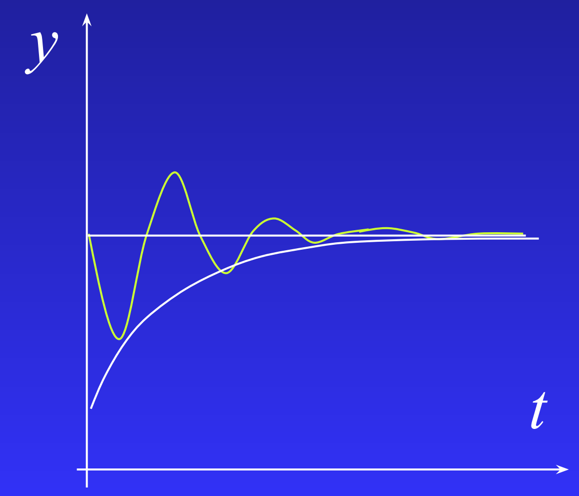
$$\boxed{L\frac{di}{dt}+iR+U_{ВЫХ}=U}$$

$$\boxed{i=C\frac{dU_{ВЫХ}}{dt}}$$

$$\boxed{LC\frac{d^2U_{ВЫХ}}{dt^2}+RC\frac{dU_{ВЫХ}}{dt}+U_{ВЫХ}=U}$$

$$\boxed{RC=T_1 \qquad LC=T_2}$$

$$\boxed{T_2^2\frac{d^2y}{dt^2}+T_1\frac{dy}{dt}+y=kx}$$



ДИФФЕРЕНЦИРУЮЩИЕ ЗВЕНЬЯ.

Выходной сигнал пропорционален скорости изменения входного сигнала.

ДИФФУР (ДУ): $$\boxed{y = k\frac{dx}{dt}}$$ ДЛЯ ИДЕАЛЬНОЙ СХЕМЫ

$$\boxed{T\frac{dy}{dt} + y = k\frac{dx}{dt}}$$

ДЛЯ РЕАЛЬНОЙ СХЕМЫ СУЩЕСТВУЕТ ИНЕРЦИОННОЕ ЗВЕНО (КОТОРОМУ СООТВЕТСТВУЕТ ПЕРВОЕ СЛАГАЕМОЕ)

ПЕРЕДАТОЧНАЯ ФУНКЦИЯ (ПФ): $$\boxed{W(p) = kp}$$

АФЧ-ХАРАКТЕР. (АФЧХ): $$\boxed{W(j\omega) = k(j\omega)}$$

Примером являются: тахогенераторы, цепь R-C с усилителем

ИНТЕГРИРУЮЩИЕ ЗВЕНЬЯ.

звено, в котором выходная величина пропорциональна интегралу по времени входной величины или скорость изменения выходного сигнала пропорциональна входному сигналу.

ДИФФУР (ДУ): $\boxed{y = k\int_0^t x\,d\tau}$ ИЛИ $\boxed{\frac{dy}{dt} = kx}$ ИДЕАЛЬНАЯ СХЕМА

$\boxed{T_И \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} = kx}$ реальная схема, $T_И$ – время разгона

ПЕРЕДАТОЧНАЯ ФУНКЦИЯ (ПФ): $\boxed{W(p) = \frac{k}{p}}$

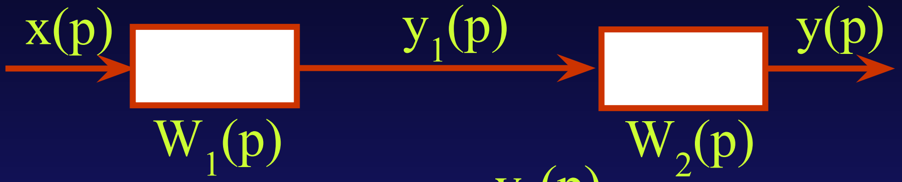
АФЧ-ХАРАКТЕР. (АФЧХ): $\boxed{W(j\omega) = \frac{k}{(j\omega)}}$

Примером являются: конденсатор, гидроцилиндр, пневмоцилиндр и др.

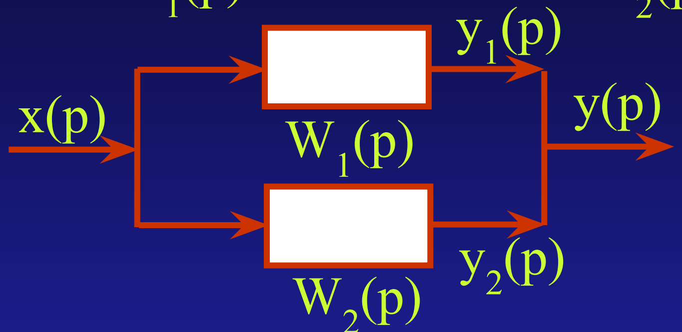
СОЕДИНЕНИЯ ЗВЕНЬЕВ

К ОСНОВНЫМ (СТАНДАРТНЫМ) СОЕДИНЕНИЯМ ЗВЕНЬЕВ ОТНОСЯТСЯ:

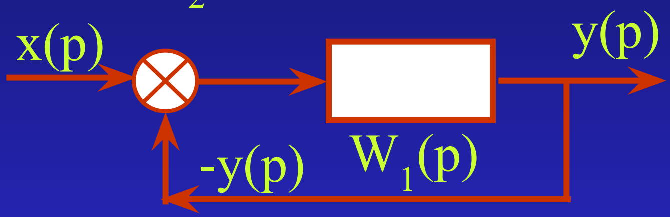
1. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЕ



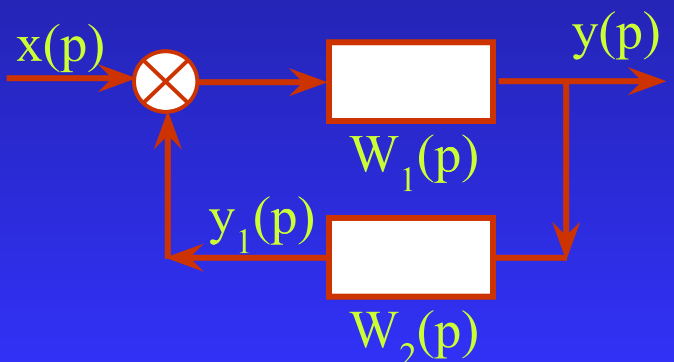
2. ПАРАЛЛЕЛЬНОЕ



3. ЗВЕНО, ОХВАЧЕННОЕ ЕДИНИЧНОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

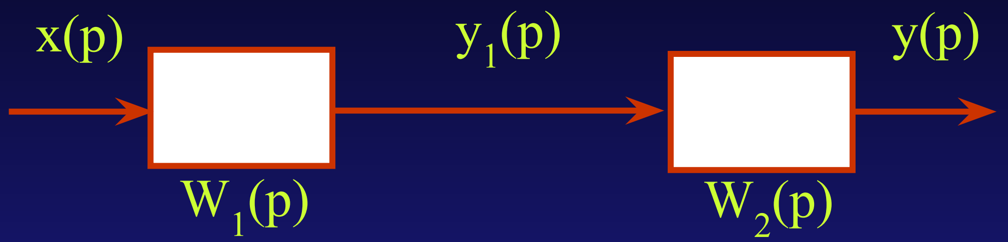


4. ЗВЕНО, ОХВАЧЕННОЕ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ ЧЕРЕЗ ПРОМЕЖУТОЧНОЕ ЗВЕНО



ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЕ СОЕДИНЕНИЕ

ОПРЕДЕЛИТЬ ПЕРЕДАТОЧНУЮ ФУНКЦИЮ



$$\boxed{y(p) = W_2(p) \cdot y_1(p)}$$

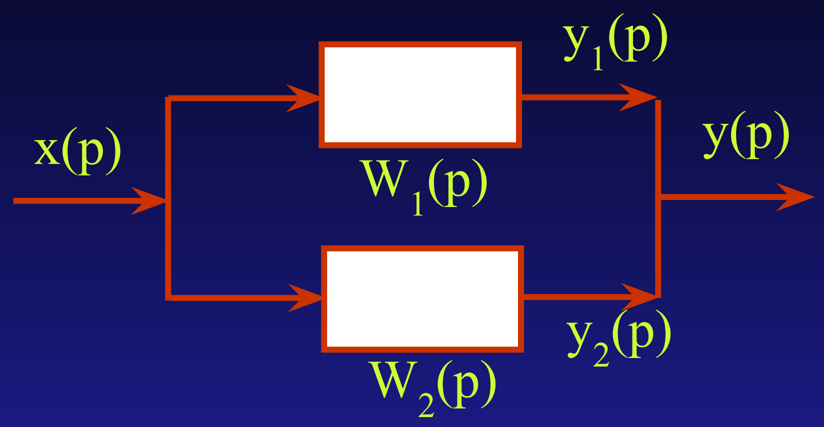
$$\boxed{y_1(p) = W_1(p) \cdot x(p)}$$

$$\boxed{y(p) = W_2(p) \cdot y_1(p) = W_2(p) \cdot W_1(p) \cdot x(p)}$$

$$\boxed{W(p) = W_2(p) \cdot W_1(p)}$$

ПАРАЛЛЕЛЬНОЕ СОЕДИНЕНИЕ

ОПРЕДЕЛИТЬ ПЕРЕДАТОЧНУЮ ФУНКЦИЮ



$$\boxed{y_1(p) = W_1(p)\cdot x(p)}$$

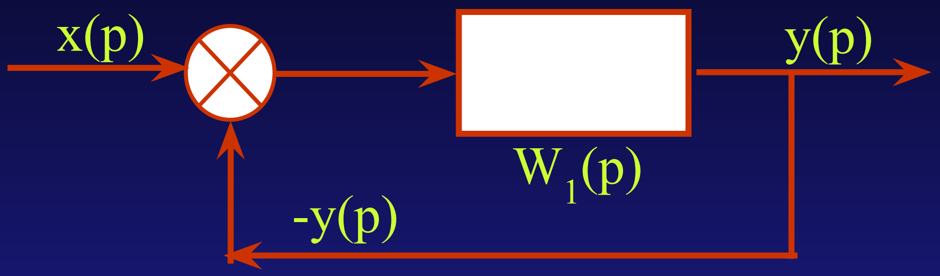
$$\boxed{y_2(p) = W_2(p)\cdot x(p)}$$

$$\boxed{y(p) = y_1(p) + y_1(p) = x(p)\cdot\left(W_2(p) + W_1(p)\right)}$$

$$\boxed{W(p) = W_2(p) + W_1(p)}$$

ОХВАЧЕННОЕ ЕДИНИЧНОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

ОПРЕДЕЛИТЬ ПЕРЕДАТОЧНУЮ ФУНКЦИЮ

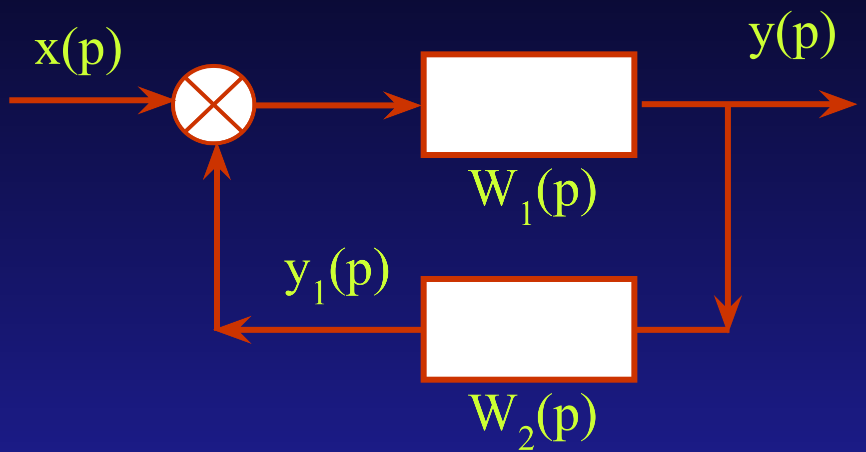


$$\boxed{y(p) = W_1(p)\cdot\left(x(p) - y(p)\right)}$$

$$\boxed{W(p) = \frac{W_1(p)}{1+W_2(p)}}$$

ОБРАТНАЯ СВЯЗЬ ЧЕРЕЗ ПРОМЕЖУТОЧНОЕ ЗВЕНО

ОПРЕДЕЛИТЬ ПЕРЕДАТОЧНУЮ ФУНКЦИЮ



$$\boxed{y(p) = W_1(p)\cdot\big(x(p) - y_1(p)\big) = W_1(p)\cdot\big(x(p) - W_2(p)\cdot y(p)\big)}$$

$$\boxed{W(p) = \frac{W_1(p)}{1 + W_1(p)\cdot W_2(p)}}$$

ТЕХНОЛОГИЯ ПОЛУЧЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ АВТОМАТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

Для получения математической модели автоматической системы управления необходимо:

1 все реальные элементы в системе заменить типовыми динамическими звеньями,

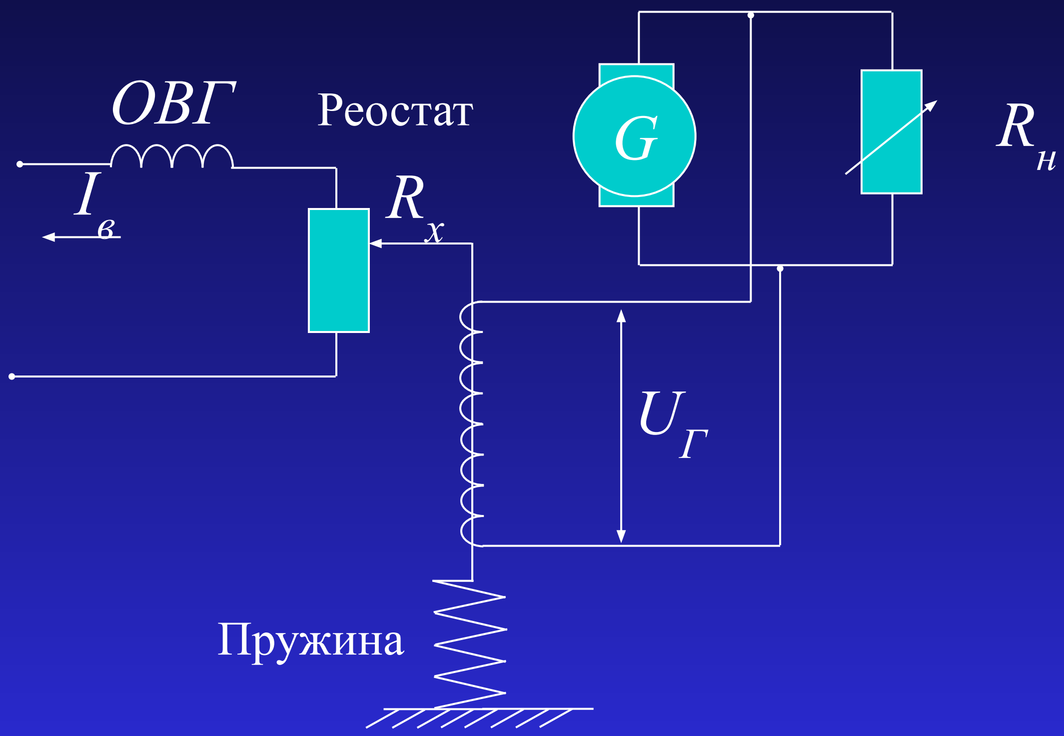
2 преобразовать функциональную блок-схему в структурную схему системы, которая представляет собой соединение типовых динамических звеньев.

3 получить передаточную функцию системы и,

4 получить характеристическое уравнение системы или ее математическую модель, приравняв знаменатель $W(p)$ к 0,.

ПРИМЕР ПОЛУЧЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ АВТОМАТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

САУ регулирования напряжения генератора с независимым возбуждением.



G - генератор

$R_н$ – нагрузка генератора (переменная величина)

$U_Г$ – выходное напряжение генератора

ОВГ – обмотка возбуждения генератора

$I_В$ – ток в обмотке возбуждения генератора

R_X – переменное сопротивление, позволяющее регулировать ток обмотки возбуждения и, следовательно, выходное напряжение генератора

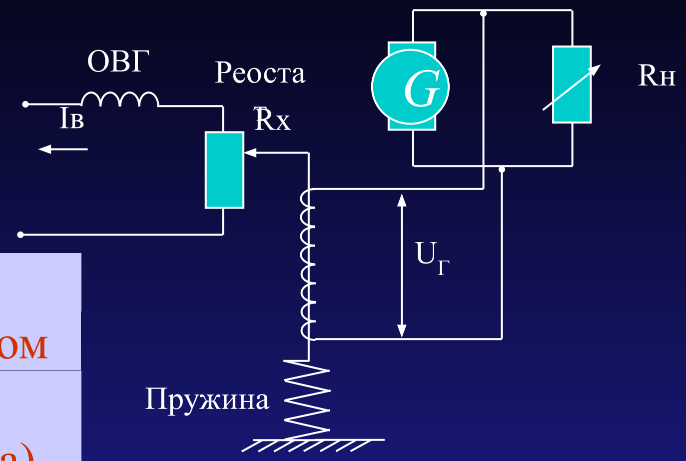
СОСТАВЛЯЕМ БЛОК-СХЕМУ САУ генератора

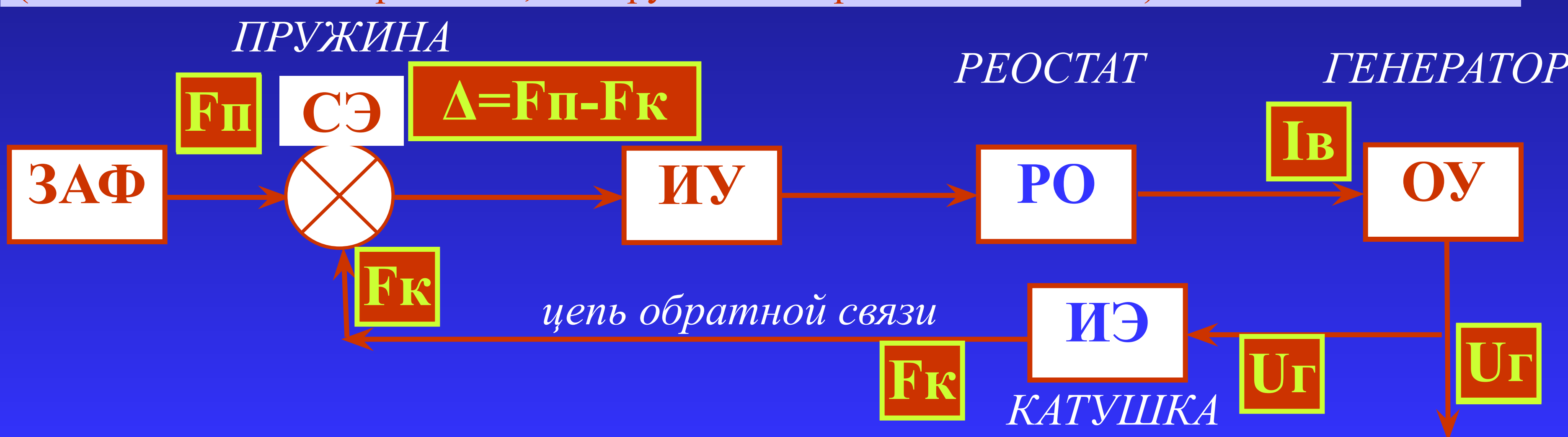
Объект управления ОУ – генератор
Выходной параметр – Uг (напряжение генератора)
Входной параметр – Iв (ток возбуждения)

Измерительный элемент ИЭ – катушка
На входе ИЭ – напряжение генератора
На выходе ИЭ – Fк – усилие, развиваемое электромагнитом

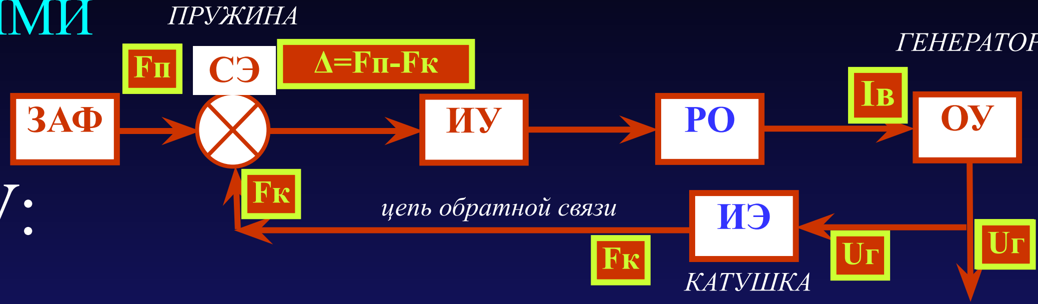
Сравнивающий элемент СЭ – пружина
На входе в СЭ – Fп – усилие пружины (начальная затяжка)
На выходе из СЭ – Δ=Fп-Fк

Регулирующий орган РО – реостат
Исполнительное устройство ИУ – должно поменять положение «движка» реостата (механическая часть реостата, т.е. пружина + сердечник + движок)





ЗАМЕНЯЕМ ЭЛЕМЕНТЫ АВТОМАТИКИ ТИПОВЫМИ ДИНАМИЧЕСКИМИ ЗВЕНЬЯМИ



Объект управления ОУ:

Генератор – инерционное звено

$$T_\Gamma \frac{dU_\Gamma}{dt} + U_\Gamma = k_1 I_B$$

$$T_\Gamma = \frac{L_B}{R_B}$$

$$k_1 = \frac{U_\Gamma}{I_B}$$

ПЕРЕДАТОЧНАЯ ФУНКЦИЯ

$$W_1(p) = \frac{k_1}{T_\Gamma p + 1}$$

Измерительный элемент ИЭ:

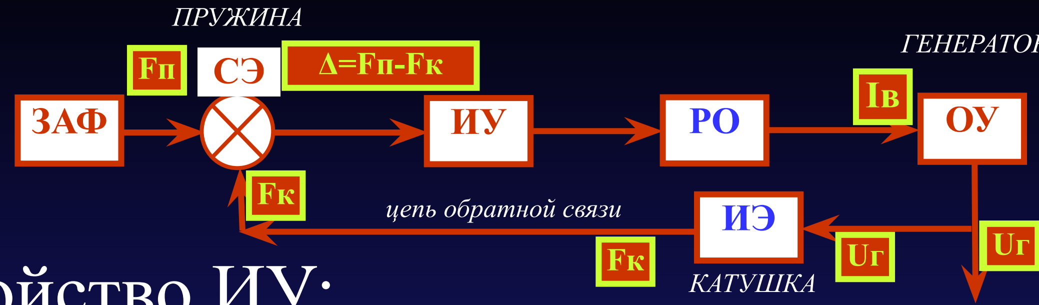
Катушка – безынерционное звено (с некоторым допущением)

$$F_K \cong k_2 U_\Gamma$$

ПЕРЕДАТОЧНАЯ ФУНКЦИЯ

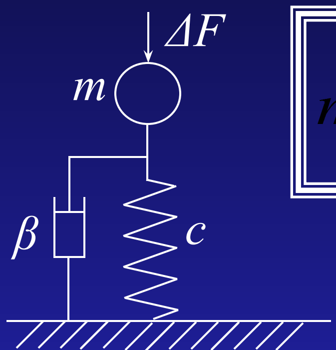
$$W_2(p) = k_2$$

ПРОДОЛЖЕНИЕ



Исполнительное устройство ИУ:

механическая часть реостата, т.е. пружина + сердечник + движок



$$m\frac{d^2\delta}{dt}+\beta\frac{d\delta}{dt}+c\delta=\Delta F$$

$$T_2^2=\frac{m}{c}\qquad T_1=\frac{\beta}{c}\qquad k_3=\frac{1}{c}$$

ПЕРЕДАТОЧНАЯ ФУНКЦИЯ

$$W3_1(p)=\frac{k_3}{T_2^2p^2+T_1p+1}$$

Рабочий орган РО:

Реостат – безынерционное звено (с некоторым допущением)

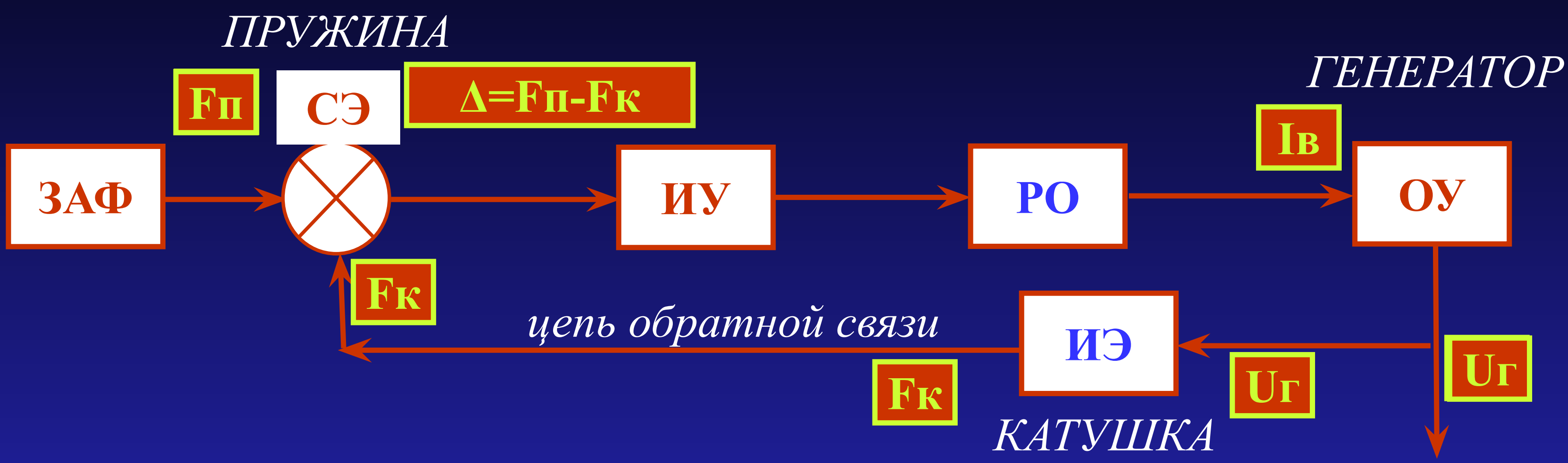
$$I_B\cong k_4\delta$$

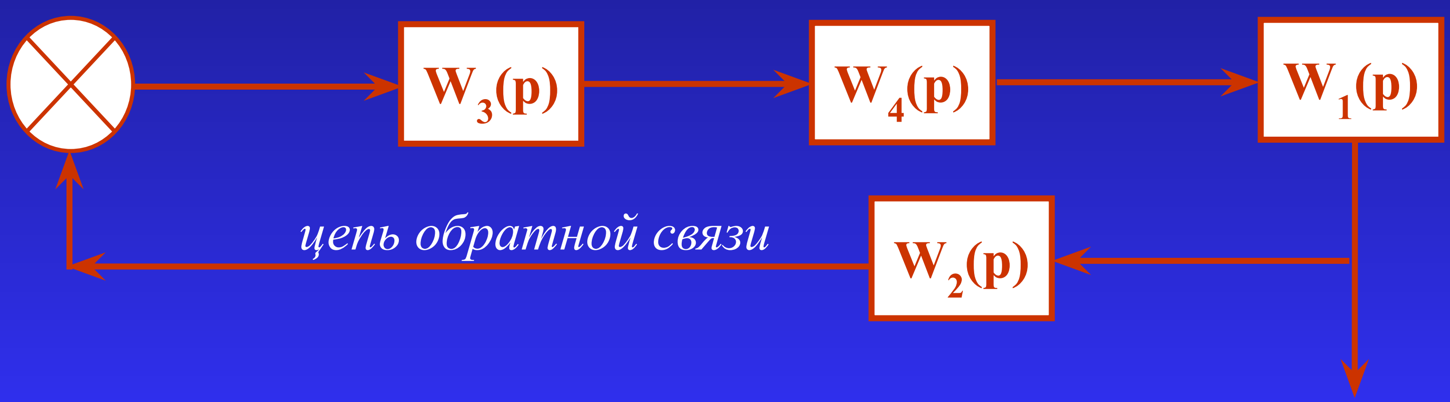
ПЕРЕДАТОЧНАЯ ФУНКЦИЯ

$$W_4(p)=k_4$$

СТРОИМ СТРУКТУРНУЮ СХЕМУ САУ,

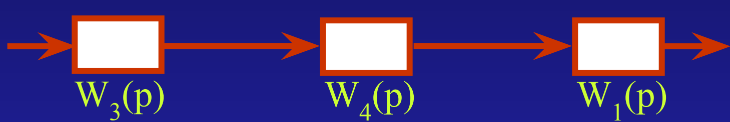
заменяя функциональные блоки типовыми звеньями

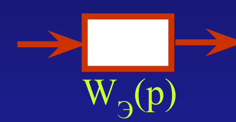




ПРИВОДИМ СХЕМУ К ПРОСТОМУ ВИДУ

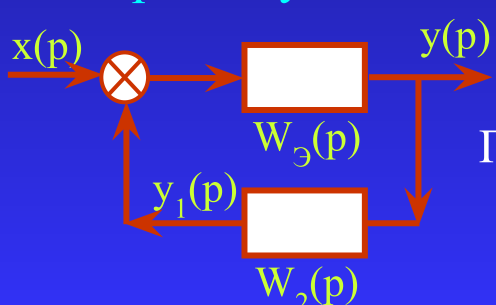
Заменим последовательное соединение типовых звеньев – эквивалентным звеном





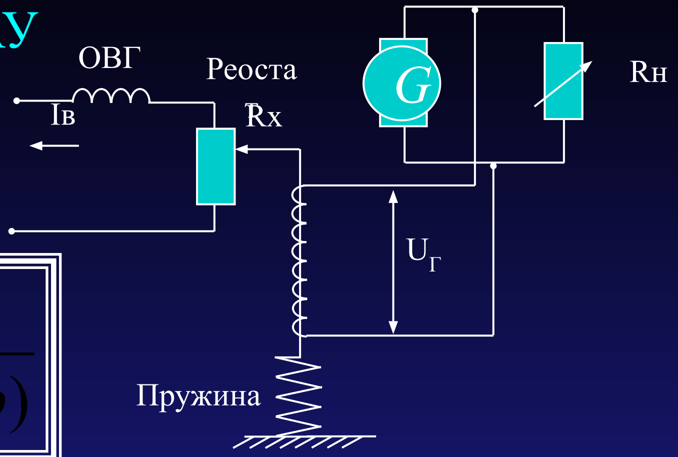
ПЕРЕДАТОЧНАЯ ФУНКЦИЯ $\boxed{W_Э(p) = W_3(p) \cdot W_4(p) \cdot W_1(p)}$

Получим типовое соединение – соединение с обратной связью через промежуточное звено



ПЕРЕДАТОЧНАЯ ФУНКЦИЯ $\boxed{W_{системы}(p) = \frac{W_Э(p)}{1 + W_Э(p) \cdot W_2(p)}}$

ПОЛУЧАЕМ МАТЕМАТИЧЕСКУЮ МОДЕЛЬ САУ



ИМЕЕМ ПЕРЕДАТОЧНУЮ ФУНКЦИЮ САУ

$$W_{системы}(p)=\frac{W_3(p)\cdot W_4(p)\cdot W_1(p)}{1+W_3(p)\cdot W_4(p)\cdot W_1(p)\cdot W_2(p)}$$

ПРИРАВНИВАЕМ ЗНАМЕНАТЕЛЬ К 0

$$1+W_3(p)\cdot W_4(p)\cdot W_1(p)\cdot W_2(p)=0$$

$$1+\frac{k_1\cdot k_2\cdot k_3\cdot k_4}{(T_Г p+1)(T_2^2 p^2+T_1 p+1)}=0$$

ПОЛУЧАЕМ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ НАПРЯЖЕНИЯ ГЕНЕРАТОРА – МАТЕМАТИЧЕСКУЮ МОДЕЛЬ САУ

$$a_0 p^3+a_1 p^2+a_2 p+a_3=0$$

$$a_0=T_Г T_2^2 \qquad a_1=T_Г T_1+T_2^2 \qquad a_2=T_Г+T_1 \qquad a_3=1+k_1\cdot k_2\cdot k_3\cdot k_4$$

ПРИМЕНЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

МАТЕМАТИЧЕСКУЮ МОДЕЛЬ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ПРМИЕНЯЮТ ПРИ ОЦЕНКЕ УСТОЙЧИВОСТИ РАБОТЫ МАШИНЫ С СИСТЕМОЙ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ ЗАМКНУТОГО ТИПА (НАПРИМЕР СИСТЕМЫ РЕГУЛИРОВАНИЯ НАПРЯЖЕНИЯ ГЕНЕРАТОРА).

Тема 6.1

УСТОЙЧИВОСТЬ АВТОМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Устойчивость –

свойство возвращаться в состояние устойчивого равновесия после снятия возмущения, нарушевшего равновесное состояние.

Устойчивая *в большом* система –

имеет устойчивость при любых отклонениях управляемой величины

Устойчивая *в малом* система –

обладает устойчивостью при небольших или строго определенных отклонениях

Устойчивость – необходимое свойство функционирования любой системы

МЕТОДЫ ОЦЕНКИ УСТОЙЧИВОСТИ

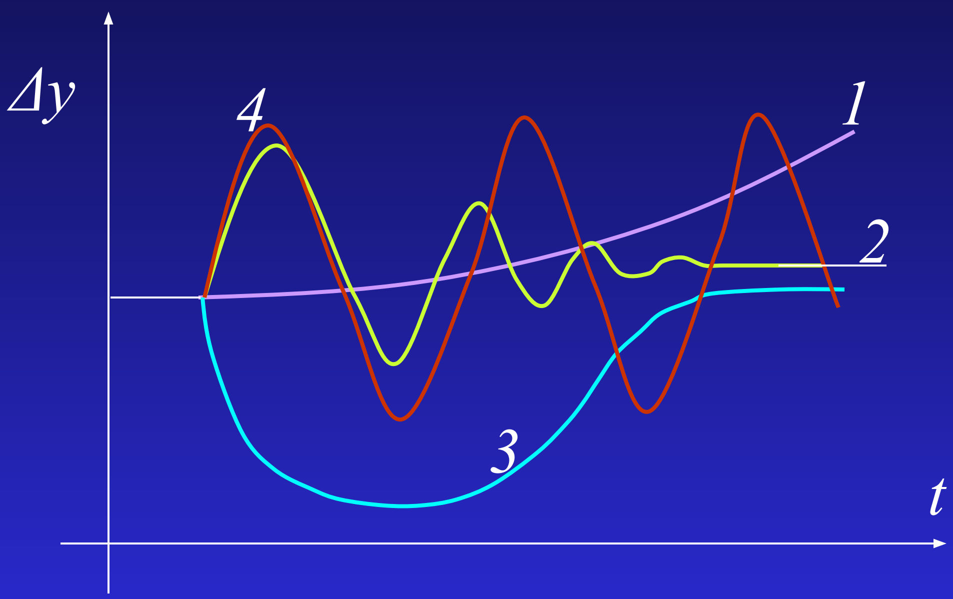
1. МЕТОД ДИНАМИЧЕСКИХ (ПЕРЕХОДНЫХ) ХАРАКТЕРИСТИК
2. МЕТОД КОРНЕЙ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ
3. СПЕЦИАЛЬНЫЕ КРИТЕРИИ УСТОЙЧИВОСТИ

Метод динамических характеристик

Использует условия:

если $t \to \infty$, $\Delta y \to 0$, то система устойчива

если $t \to \infty$, $\Delta y \to \infty$, то система неустойчива



1 – неустойчивая

2 – устойчивая

3 – устойчивая

4 – на грани устойчивости

Получить динамические характеристики можно

АНАЛИТИЧЕСКИ – требуется составить математическую модель y(p)=W(p)·x(p)

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНО – требуется провести натурные испытания

Метод корней характеристического уравнения

ИСПОЛЬЗУЮТ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ – МАТЕМАТИЧЕСКУЮ МОДЕЛЬ САУ

ПУСТЬ $$\boxed{a_0 p^2 + a_1 p + a_2 = 0}$$

ПУСТЬ имеем $a_0=1$, $a_1=2$, $a_2=0{,}5$

ДЛЯ ПОЛУЧЕНИЯ КОРНЕЙ РЕШАЕМ УРАВНЕНИЕ:

$$\boxed{p = \pm\frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0 a_2}}{2a_0}}$$

Корни уравнения: $p_1 = -0{,}3$ $p_2 = -1{,}7$

Для оценки устойчивости по корням уравнения используют теоремы устойчивости Ляпунова:

Теорема 1. ЕСЛИ ВЕЩЕСТВЕННЫЕ ЧАСТИ НЕКОТОРЫХ КОРНЕЙ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАНЕНИЯ МЕНЬШЕ 0 , ТО СИСТЕМА – УСТОЙЧИВА (необходимое и достаточное условие)

Теорема 2. ЕСЛИ ВЕЩЕСТВЕННАЯ ЧАСТЬ ХОТЯ БЫ ОДНОГО ИЗ КОРНЕЙ УРАНЕНИЯ БОЛЬШЕ 0, ТО СИСТЕМА – НЕУСТОЙЧИВА.

Теорема 3. ЕСЛИ ВЕЩЕСТВЕННАЯ ЧАСТЬ ХОТЯ БЫ ОДНОГО ИЗ КОРНЕЙ УРАНЕНИЯ РАВНА 0, ТО СИСТЕМА – НА ГРАНИ УСТОЙЧИВОСТИ.

Специальные критерии устойчивости систем

Алгебраические критерии:

критерий Гурвица,

критерий Раусса

Частотный критерий:

критерий Михайлова

Критерий Гурвица

ПУСТЬ система имеет уравнение: $\boxed{a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3 = 0}$

ИЗ КОЭФФИЦИЕНТОВ УРАВНЕНИЯ ФОРМИРУЕМ ДИАГОНАЛЬНЫЙ МИНОР

заполним диагональ минора коэффициентами уравнения, начиная с a_1

сверху от главной диагонали размещаем коэффициенты уравнения по мере увеличения индексов, если коэффициента нет, то ставим 0

снизу от главной диагонали размещаем коэффициенты уравнения по мере уменьшения индексов, если коэффициента нет, то ставим 0

$$\boxed{\begin{bmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{bmatrix}}$$

ЗНАЧЕНИЕ МИНОРА $\Delta_3=a_3(a_1a_2-a_3a_0)$

ИЗ МИНОРА ВЫСШЕГО ПОРЯДКА ФОРМИРУЕМ ОСТАЛЬНЫЕ МИНОРЫ

$$\boxed{\begin{bmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{bmatrix}}$$

ЗНАЧЕНИЕ МИНОРА $\Delta_2=a_1a_2-a_3a_0$

$$\boxed{\begin{bmatrix} a_1 \end{bmatrix}}$$

$\Delta_1=a_1$

ДЛЯ ТОГО, ЧТОБЫ СЧИТАТЬ СИСТЕМУ УСТОЙЧИВОЙ НЕОБХОДИМО И ДОСТАТОЧНО, ЧТОБЫ ВСЕ ДИАГОНАЛЬНЫЕ МИНОРЫ БЫЛИ БОЛЬШЕ 0

Критерий Раусса

ПУСТЬ система имеет уравнение: $\boxed{a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3 = 0}$

СОСТАВИМ СПЕЦИАЛЬНУЮ ТАБЛИЦУ

первая строка заполняется коэффициентами с *четными* индексами
вторая строка заполняется коэффициентами с *нечетными* индексами
остальные строки заполняют коэффициентами, вычисляемыми по формуле:

$$\boxed{c_{kn} = b_{k+1,n-2} - r_n \cdot b_{k+1,n-1},}$$

b – коэффициенты в двух предшествующих строках,
r_n – расчетный параметр
заполняем таблицу, пока в 1 столбце не останется свободный коэффициент, а все остальные коэффициенты в строке должны быть равны 0

№ строки n	r_n	номер столбца, k		
		1	2	3
1	——	a_0	a_2	0
2	——	a_1	a_3	0
3	$r_3 = a_0/a_2$	$c_{13} = a_2 - r_3 a_3$	$c_{23} = 0 - r_3\, 0$	$c_{33} = 0 - r_3\, 0$
4	$r_4 = a_1/a_3$	$c_{14} = a_3 - r_4 c_{23}$	0	0

ЧТОБЫ СИСТЕМА БЫЛА *УСТОЙЧИВОЙ* НЕОБХОДИМО И ДОСТАТОЧНО, ЧТОБЫ ВСЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ ПЕРВОГО СТОЛБЦА БЫЛИ БОЛЬШЕ 0

Критерий Михайлова

ПУСТЬ система имеет уравнение: $$a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3 = 0$$

Запишем уравнение в форме полинома через оператор Лапласса

$$D(p) = a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3$$

Заменим оператор *p* комплексной переменной *jω*

$$D(j\omega) = a_0 (j\omega)^3 + a_1 (j\omega)^2 + a_2 (j\omega) + a_3$$

Представим вектор *D(jω)* в виде

$$D(j\omega) = B(\omega) + jM(\omega)$$

B(ω) – действительная часть вектора,
jM(ω) – мнимая часть вектора

четные степени дают $$B(\omega) = a_3 + a_1 (j\omega)^2 = a_3 - a_1 \omega^2$$

нечетные степени дают $$jM(\omega) = a_0 (j\omega)^3 + a_2 (j\omega) \ = j\omega(a_2 - a_0 \omega^2)$$

ДЛЯ ОЦЕНКИ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМЫ НЕОБХОДИМО НАЙТИ ТОЧКИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ВЕКТОРА *D(jω)* С ОСЯМИ КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ

Точки пересечения с осями комплексной плоскости

ПУСТЬ система имеет уравнение: $\boxed{a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3 = 0}$

ПУСТЬ a_0=1, a_1=4, a_2=1, a_3=1

Пересечение с мнимой осью

$\boxed{B(\omega) = 0:}$ $\boxed{a_3 - a_1\omega^2 = 0}$ $\boxed{\omega_1 = \sqrt{\frac{a_3}{a_1}} = 0{,}5}$

$$\boxed{M(\omega_1) = j\omega_1(a_2 - a_0\omega_1^2) = 0{,}5(1 - 1\cdot 0{,}5^2) = 0{,}375}$$

Пересечение с действительной осью

$\boxed{M(\omega) = 0:}$ $\boxed{\omega(a_2 - a_0\omega^2) = 0}$ $\boxed{\omega_2 = 0}$ $\boxed{\omega_3 = \sqrt{\frac{a_2}{a_0}} = 1}$

$$\boxed{B(\omega_2) = a_3 - a_1\omega_2^2 = 1 - 2\cdot 0^2 = 1}$$

$$\boxed{B(\omega_3) = a_3 - a_1\omega_3^2 = 1 - 2\frac{1}{1} = -1}$$

Имеем три точки пересечения

ОТМЕТИМ ТОЧКИ НА МНИМОЙ ПЛОСКОСТИ

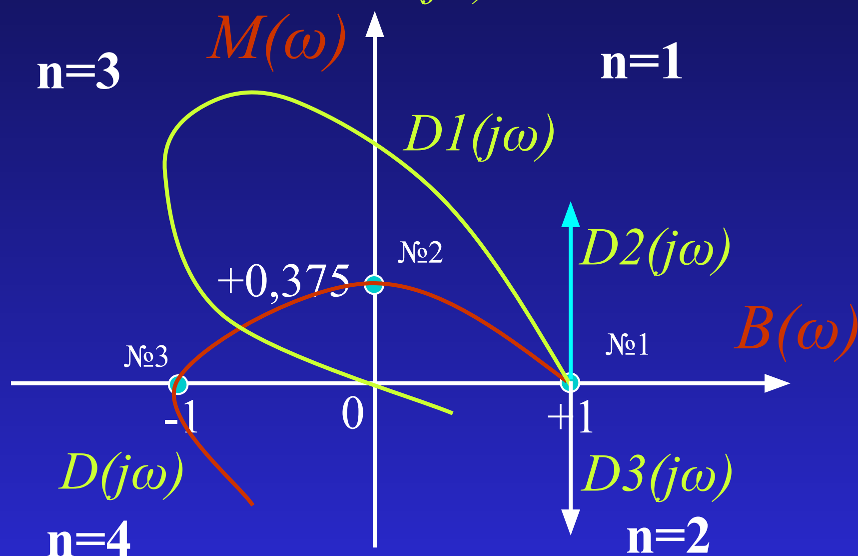
Начинаем с точки имеющей наименьшее значение частоты ω:

$\omega_2=0$ $M(\omega_2)=0$ $\mathrm{B}(\omega_2)=1$

$\omega_1=0{,}5$ $M(\omega_1)=0{,}375$ $\mathrm{B}(\omega_1)=0$

$\omega_3=1$ $M(\omega_3)=0$ $\mathrm{B}(\omega_3)=-1$

СТРОИМ ВЕКТОР $D(j\omega)$



ЧТОБЫ СИСТЕМА БЫЛА УСТОЙЧИВОЙ НЕОБХОДИМО И ДИСТАТОЧНО, ЧТОБЫ ВЕКТОР $D(j\omega)$ НАЧАЛ СВОЕ ДВИЖЕНИЕ С ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ ЧАСТИ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ ОСИ И ПРИ ИЗМЕНЕНИИ ω ОТ 0 ДО ∞ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНО ПРОШЕЛ n КВАДРАТОВ ПЛОСКОСТИ, ПОВЕРНУВШИСЬ ПРОТИВ ЧАСОВОЙ СТРЕЛКИ НА УГОЛ $n=\pi/2$ И НИГДЕ НЕ ОБРАТИЛЯ В 0

ВЫВОД:

СИСТЕМА, ИМЕЮЩАЯ ВЕКТОР $D(j\omega)$ - *УСТОЙЧИВА*

СИСТЕМА, ИМЕЮЩАЯ ВЕКТОР $D1(j\omega)$ - *НЕУСТОЙЧИВА*

СИСТЕМА, ИМЕЮЩАЯ ВЕКТОР $D2(j\omega)$ - *УСТОЙЧИВА*

СИСТЕМА, ИМЕЮЩАЯ ВЕКТОР $D3(j\omega)$ - *НЕУСТОЙЧИВА*