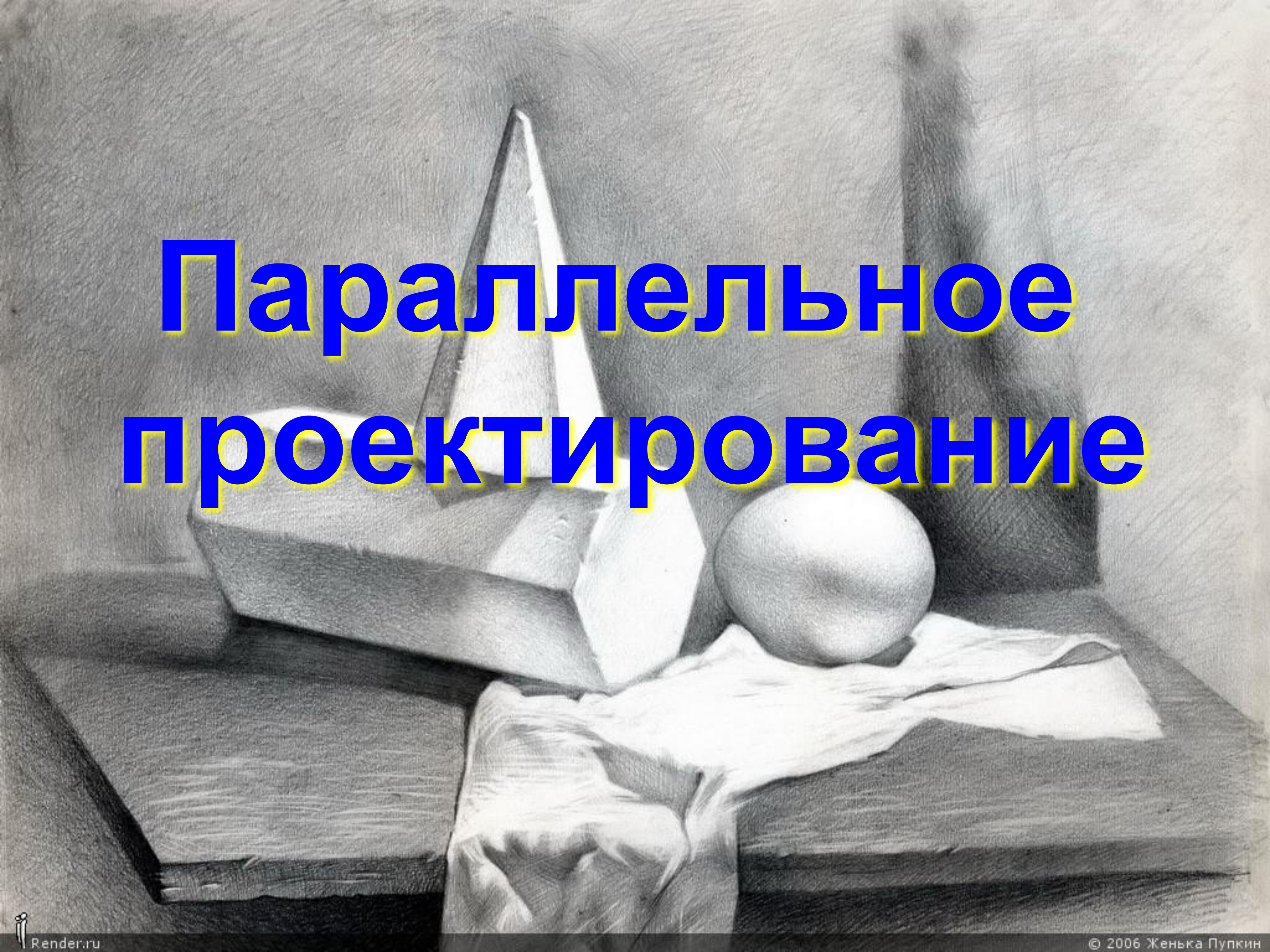
Параллельное проектирование



Стереометрия – это геометрия в пространстве. Нам необходимо уметь изображать геометрические фигуры, причем все чертежи мы по-прежнему выполняем на плоскости (на странице тетради, на доске и т.д.). Каким образом пространственную фигуру (например, куб) можно «уложить» в плоскость?

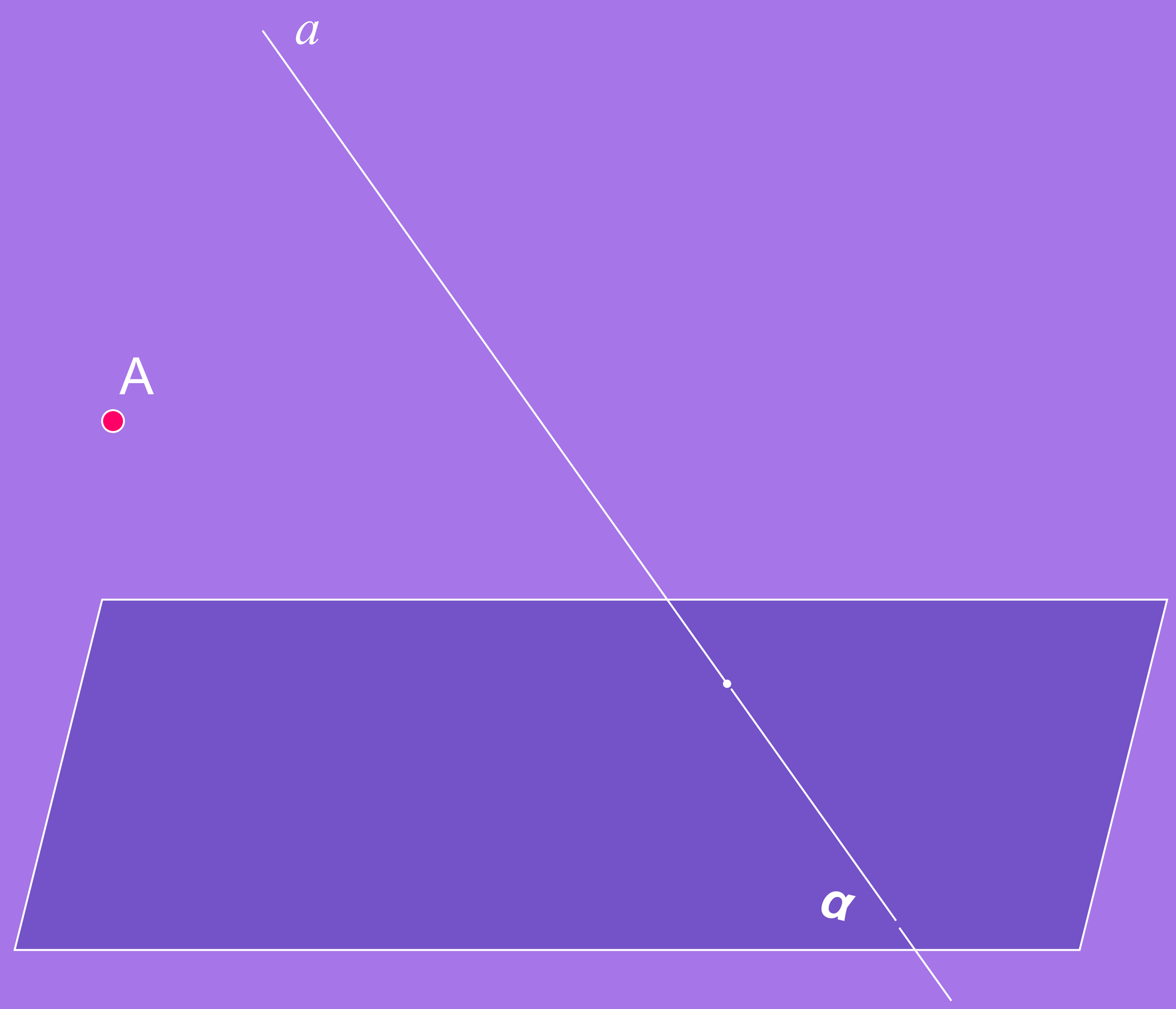
Для этого применяется ***метод параллельного проектирования***.

Выясним его суть на примере простейшей геометрической фигуры – точки.

Итак, у нас есть геометрическая фигура в пространстве – точка А.

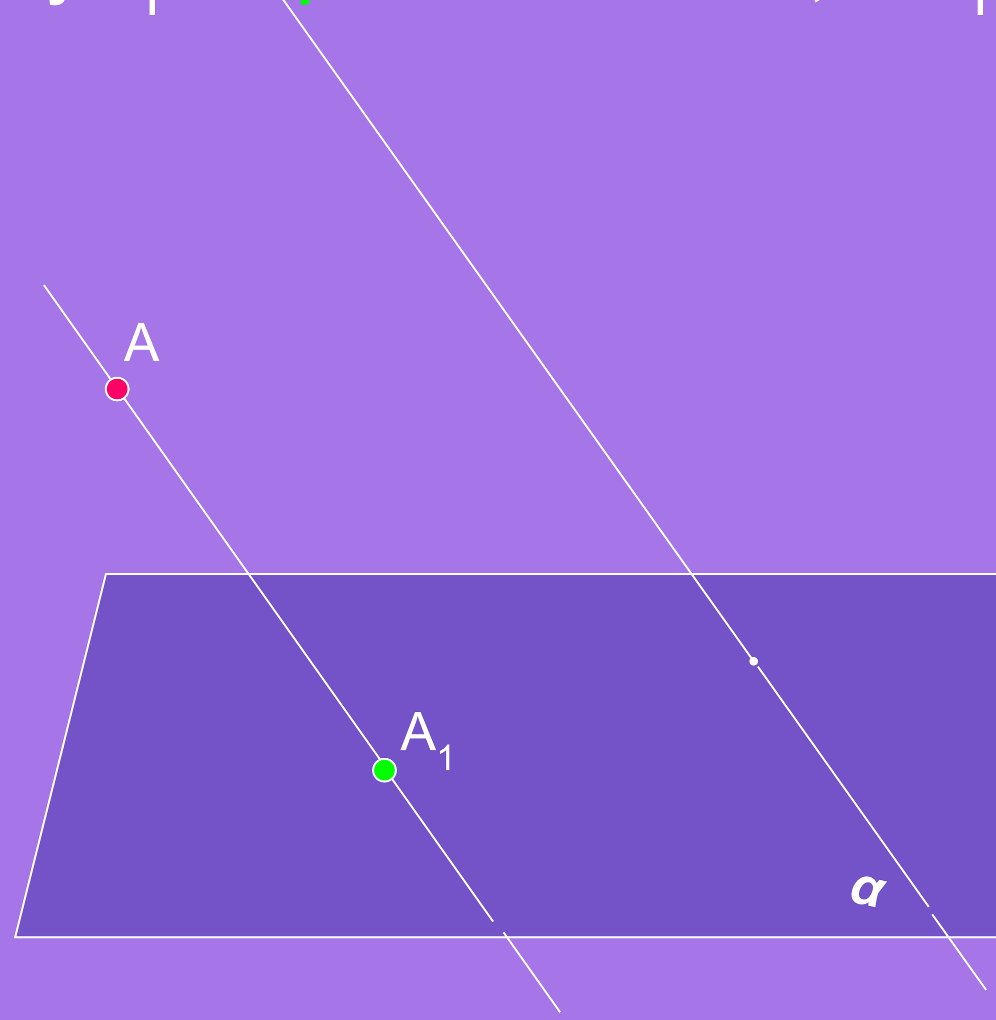
А

Выберем в пространстве произвольную плоскость α (плоскость проекций) и любую прямую a∩α (она задает *направление параллельного проектирования*).

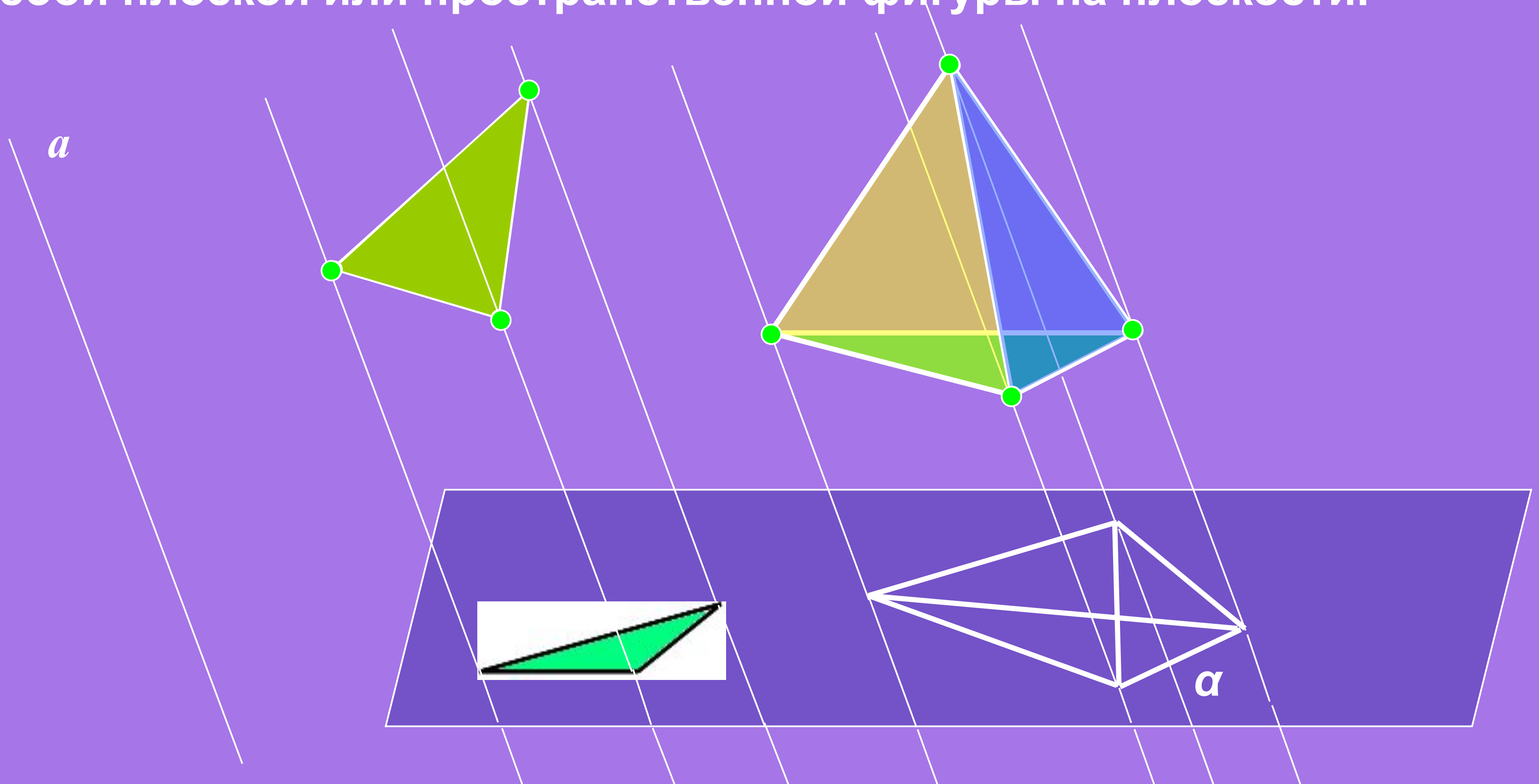


Проведем через точку А прямую, параллельную прямой a.

Точка А1 пересечения этой прямой с плоскостью и есть *проекция* точки А на плоскость α. Точку А ещё называют *прообразом*, а точку A_1 – *образом*. Если $A \in \alpha$, то A_1 совпадает с А.

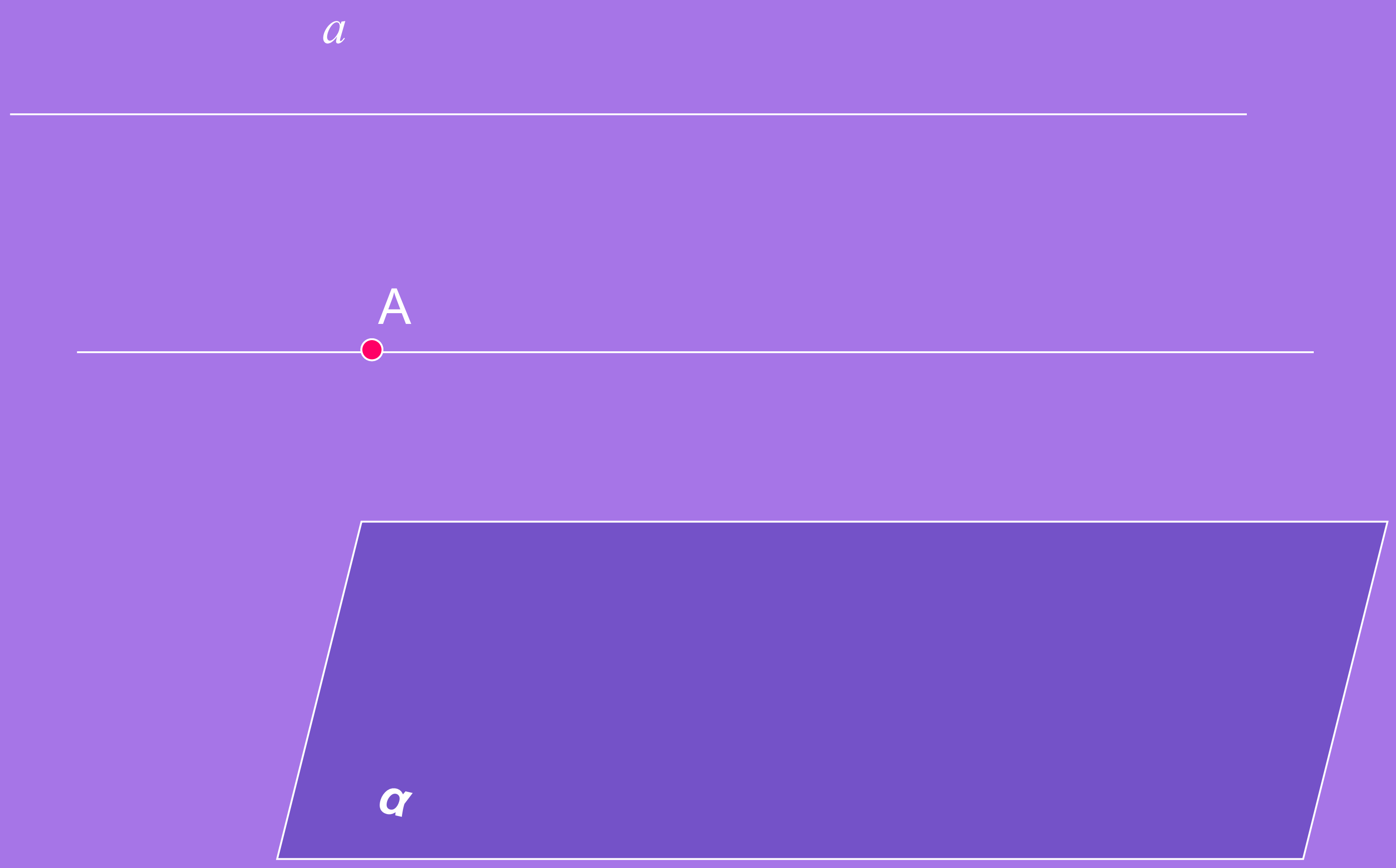


Рассматривая любую геометрическую фигуру как множество точек, можно построить в заданной плоскости проекцию данной фигуры. Таким образом можно получить изображение (или «проекцию») любой плоской или пространственной фигуры на плоскости.

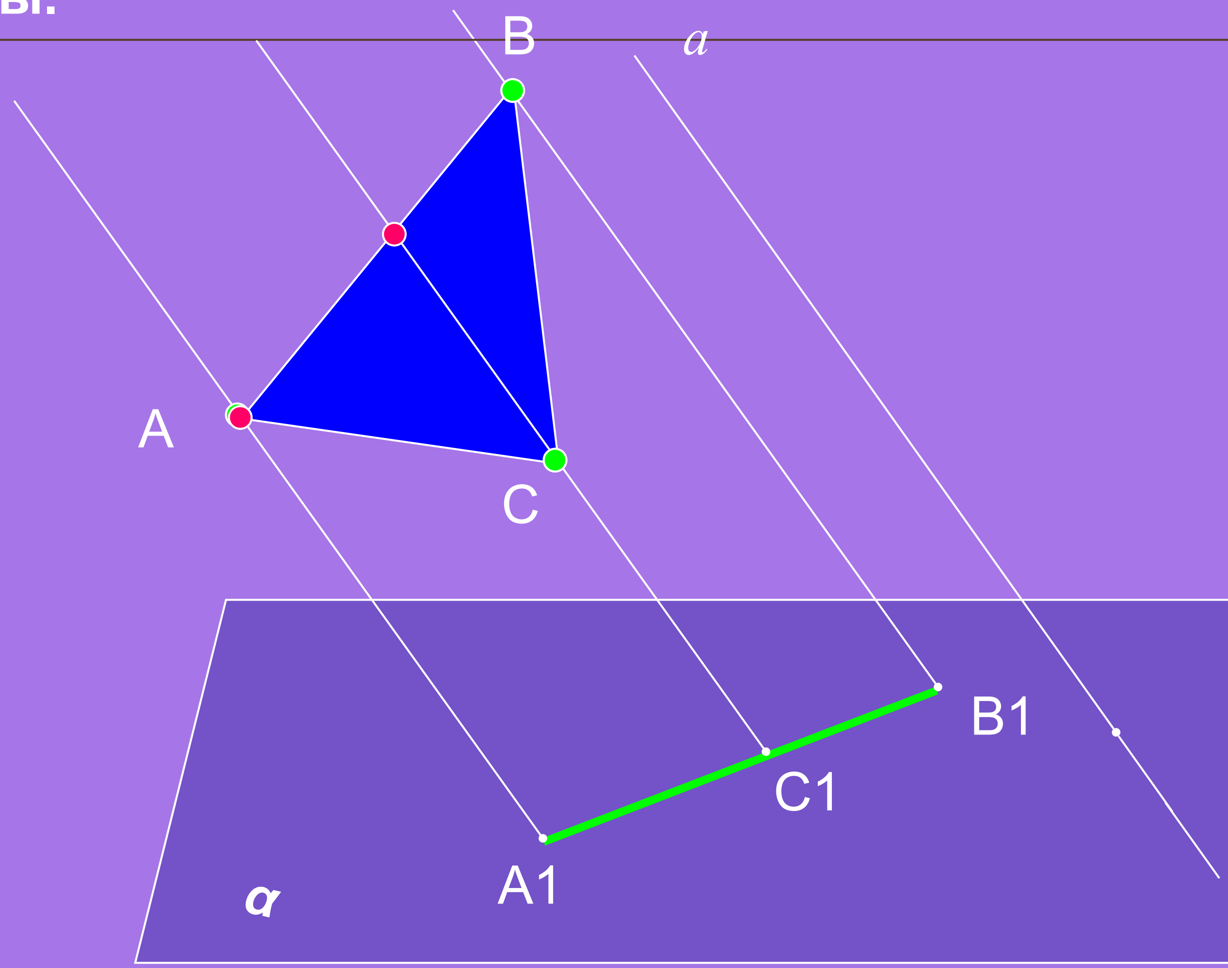


Наглядным примером параллельного проектирования является отбрасываемая любым объектом(*прообраз*) в пространстве тень (*образ*) от солнечных лучей(*направление параллельного проектирования*) на Земле(*плоскость проекций*).

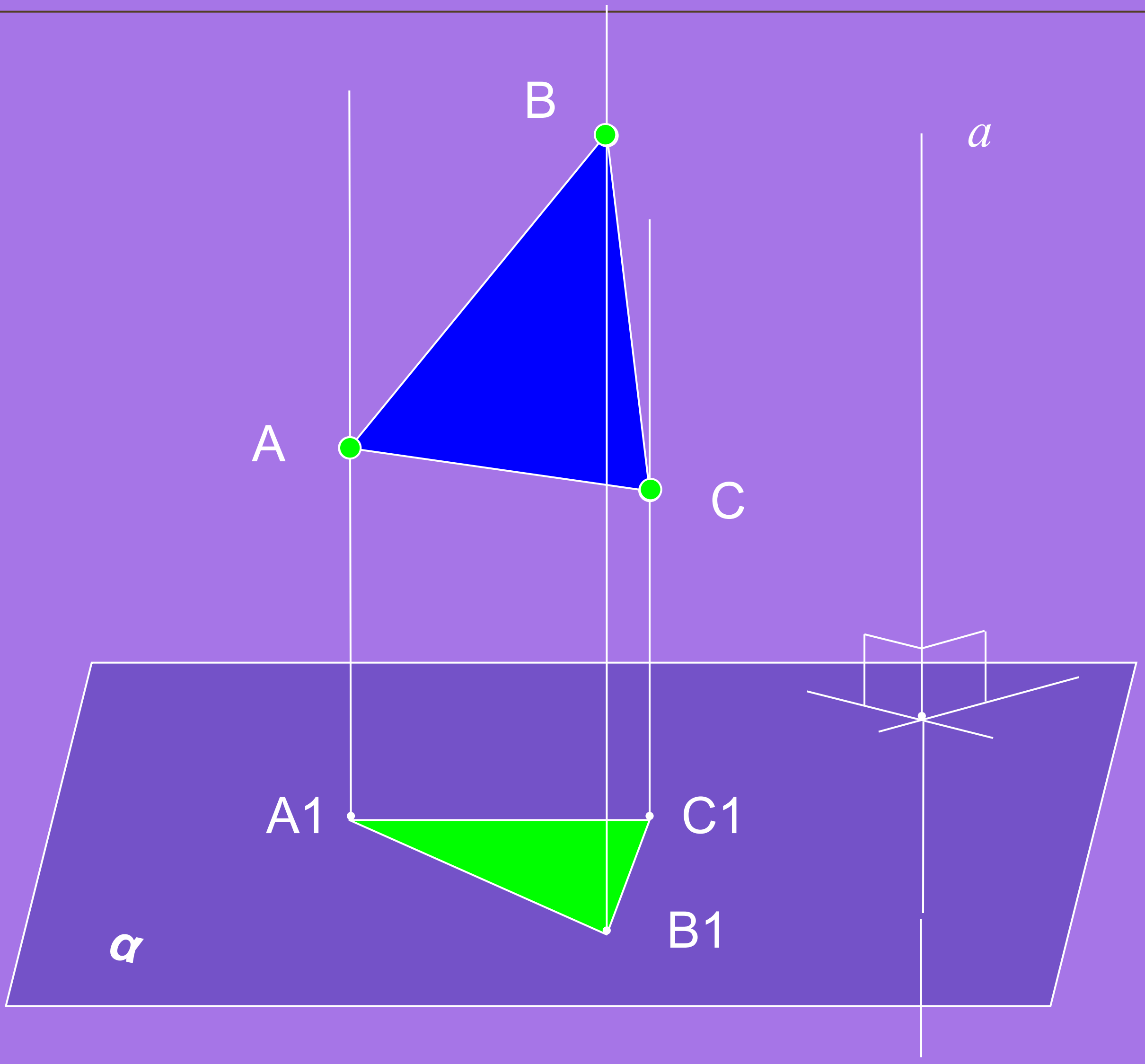
При параллельном проектировании **не выбирают** направление параллельного проектирования **параллельно плоскости проекции**



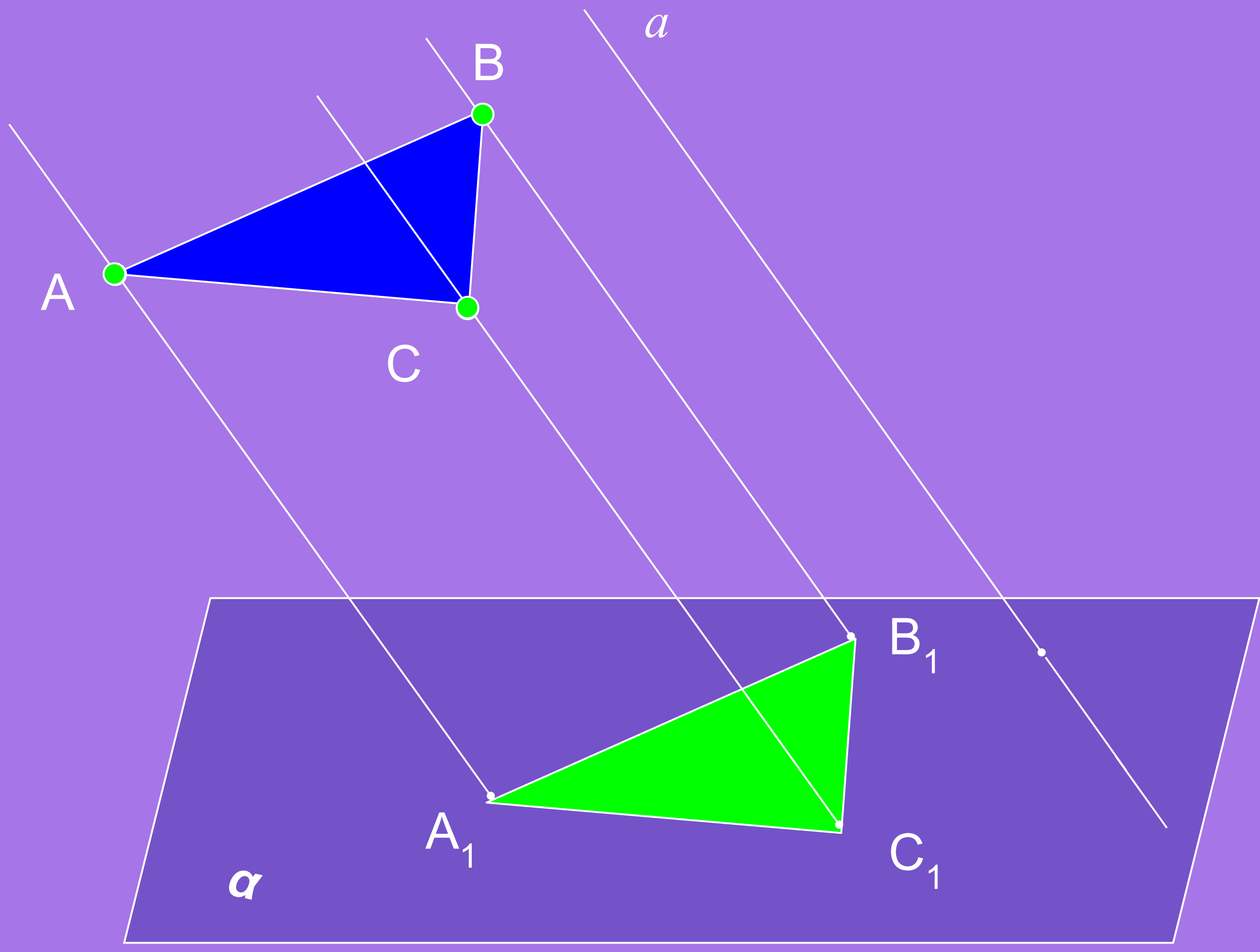
При параллельном проектировании плоских фигур не выбирают направление параллельного проектирования параллельно плоскости, которой принадлежит эта плоская фигура, т.к. получающаяся при этом проекция не отражает свойства данной плоской фигуры.



Если направление параллельного проектирования перпендикулярно плоскости проекций, то такое параллельное проектирование называется ортогональным(*прямоугольным*) проектированием.

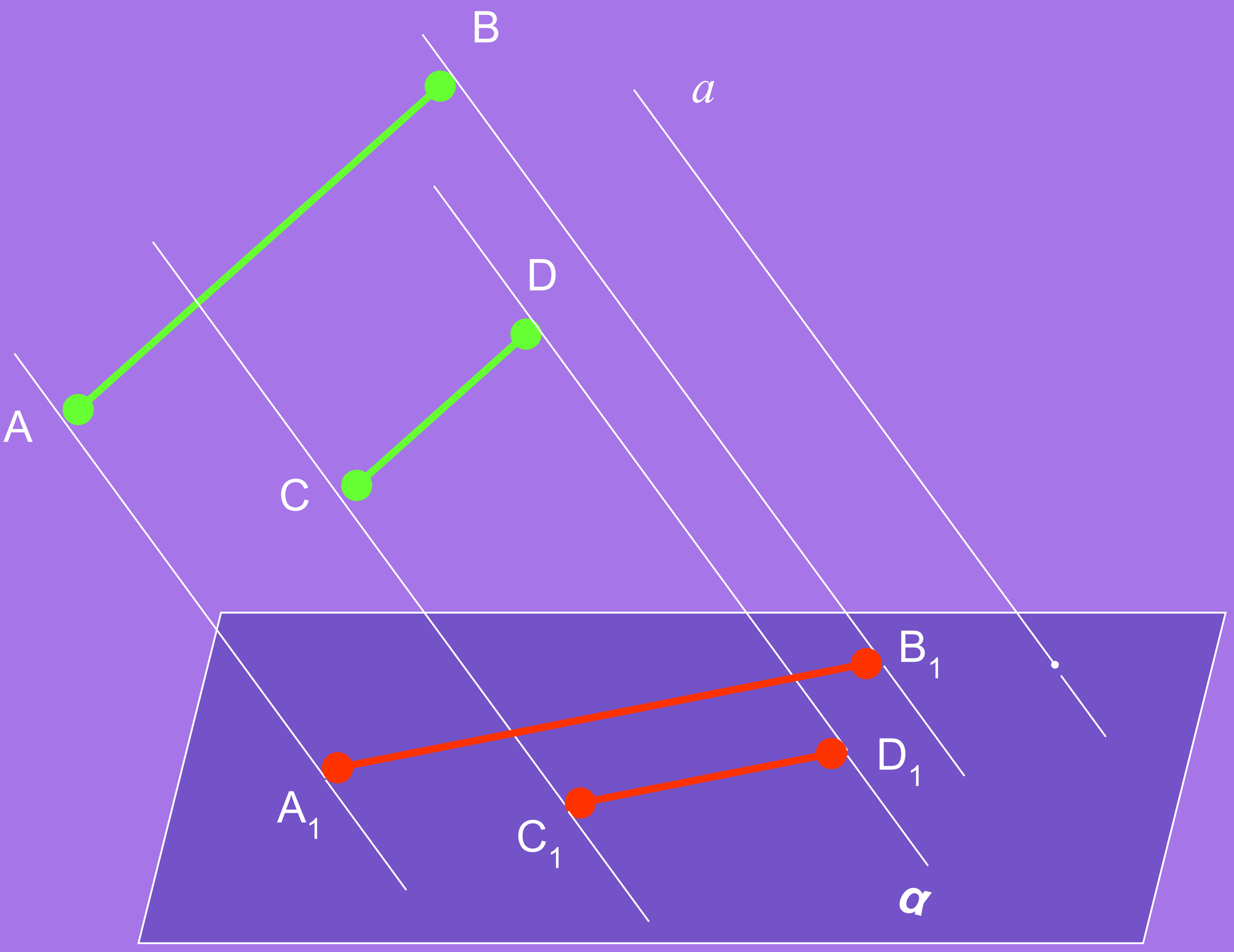


Если плоскость проекций и плоскость, в которой лежит данная фигура параллельны (α||(ABC)), то получающееся при этом изображение равно прообразу.



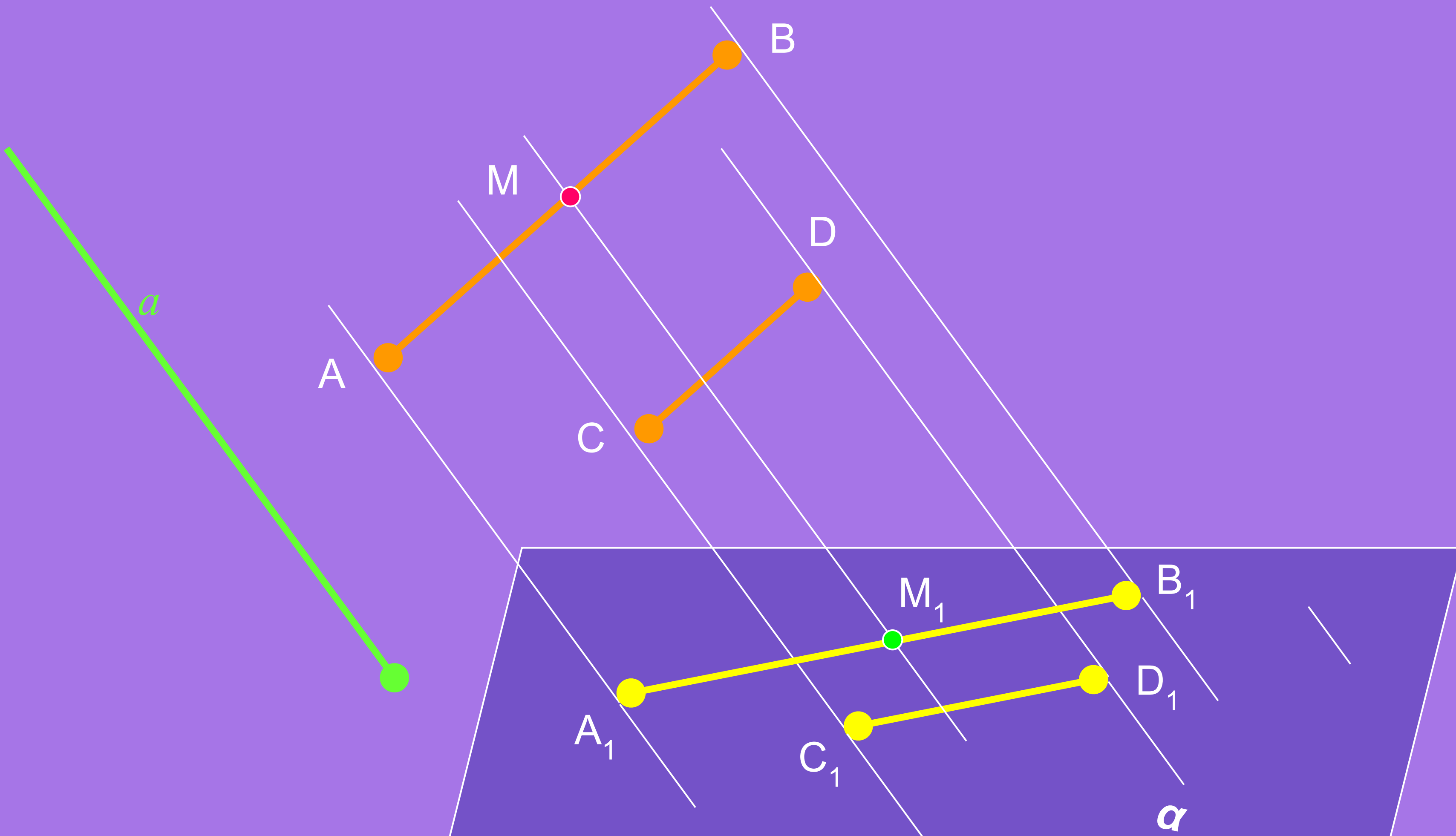
Параллельное проектирование обладает **свойствами**:

1) параллельность прямых (отрезков, лучей) **сохраняется**;



$$AB \parallel CD \Rightarrow A_1B_1 \parallel C_1D_1$$

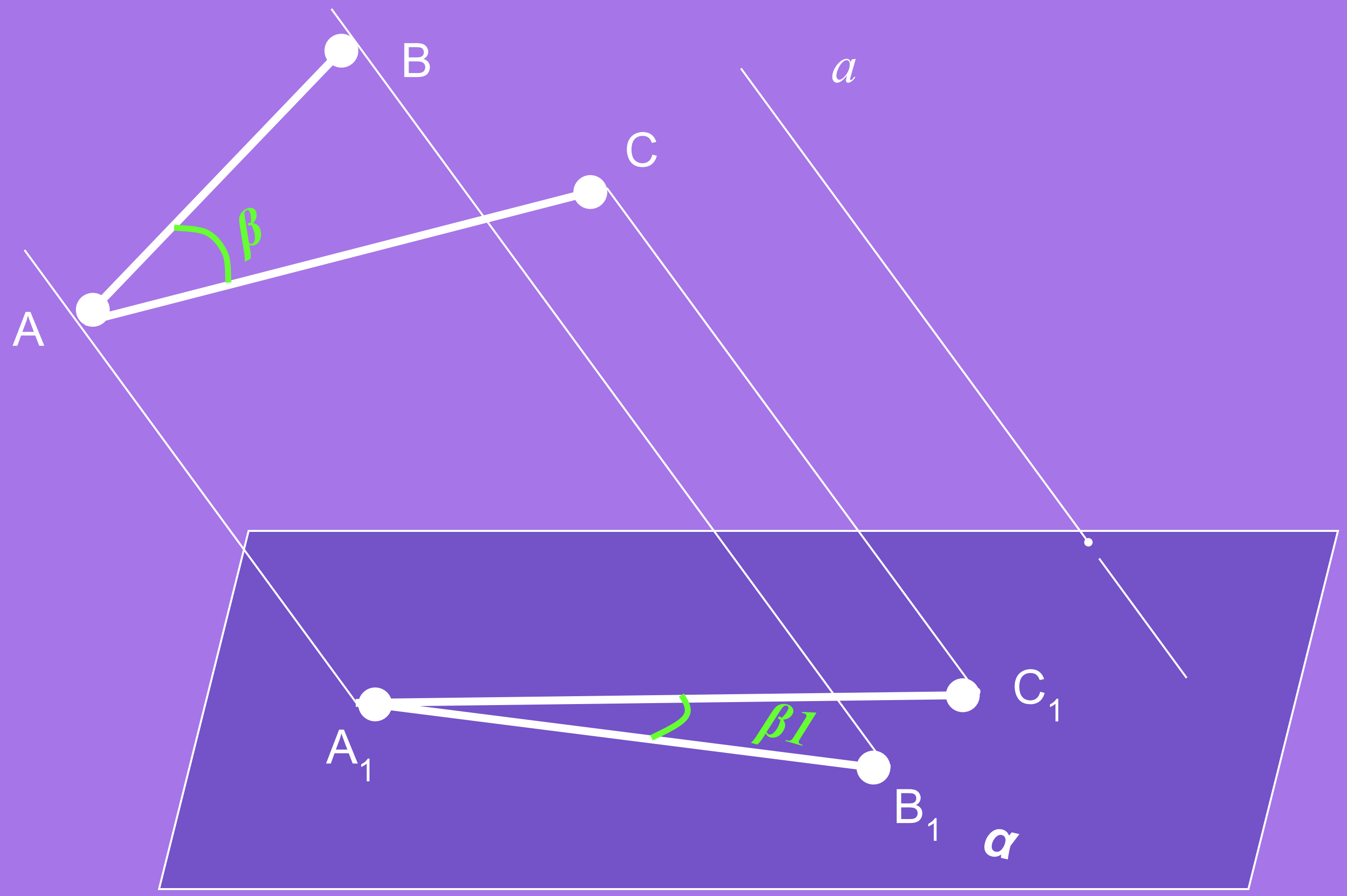
2) отношение длин отрезков, лежащих на параллельных или на одной прямой **сохраняется**;



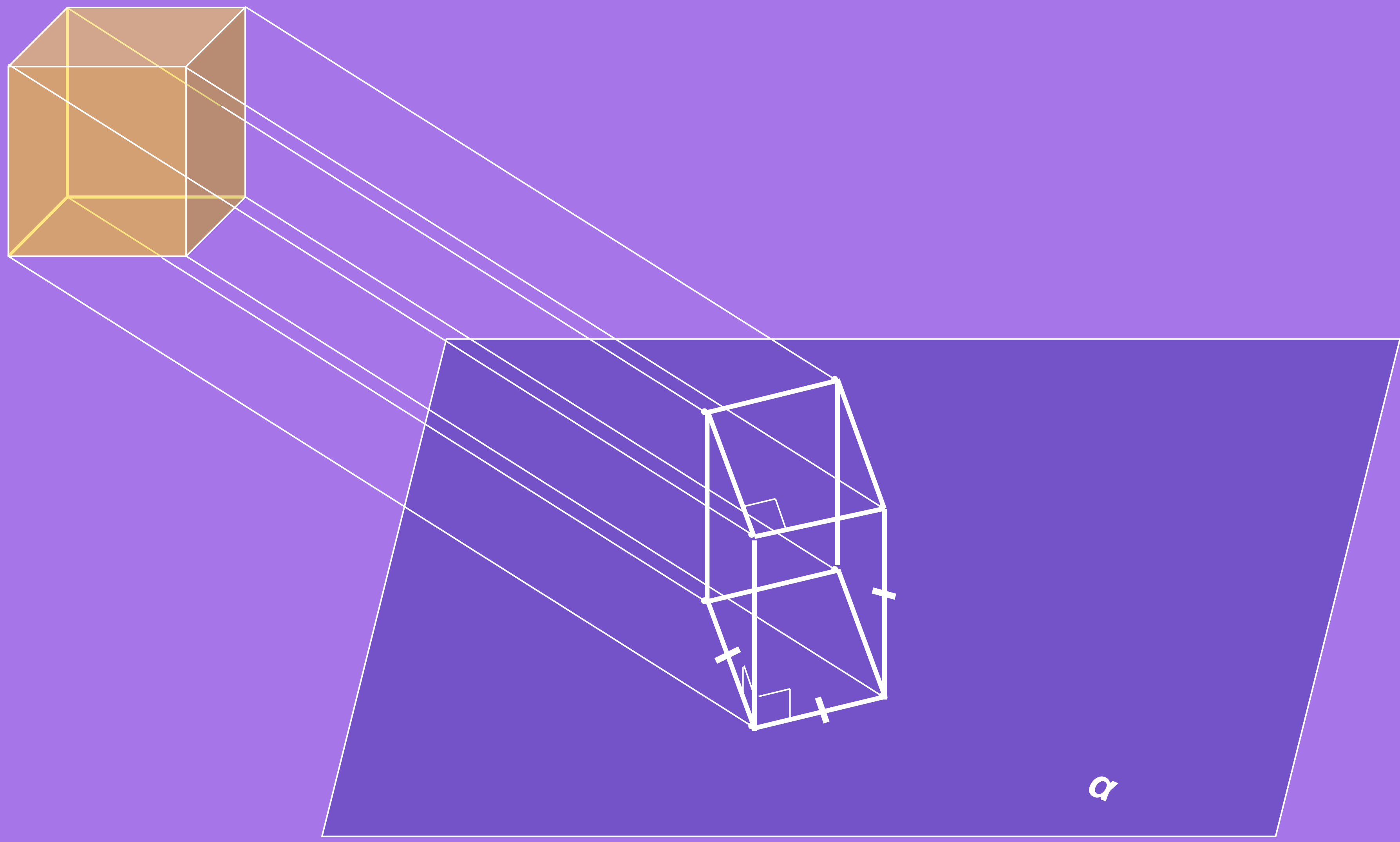
Если, например, $AB=2CD$, то $A_1B_1=2C_1D_1$ или

$$\frac{AM}{MB}=\frac{A'M'}{M'B'}$$

3) Линейные размеры плоских фигур (длины отрезков, величины углов) <u>не</u> сохраняются (исключение ортогональное проектирование).

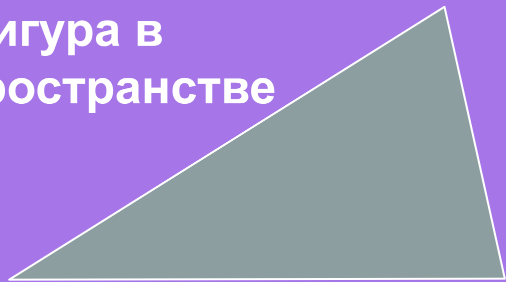


построим изображение куба:

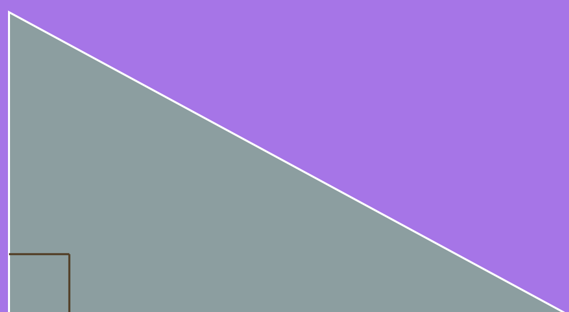


примеры изображения некоторых плоских фигур

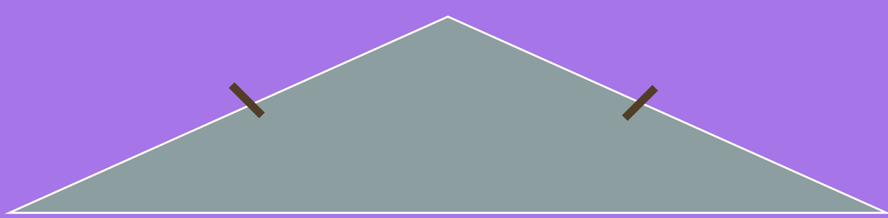
Фигура в пространстве



Произвольный треугольник

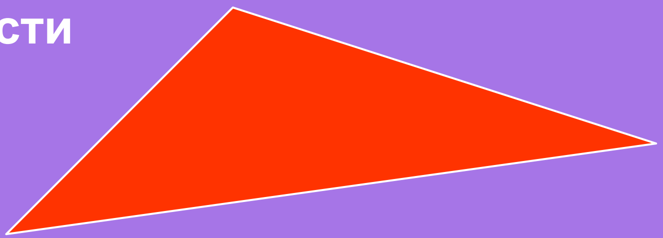


Прямоугольный треугольник

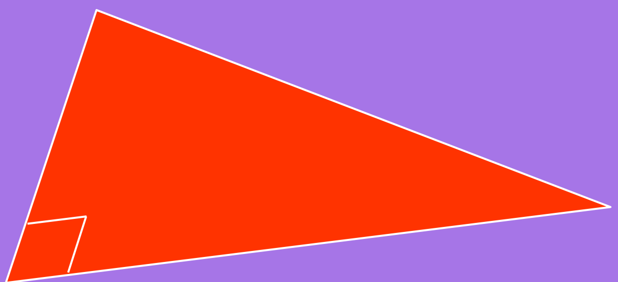


Равнобедренный треугольник

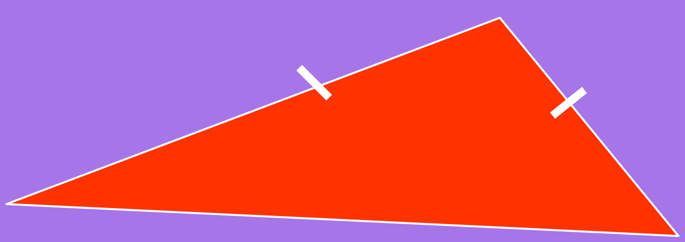
Её изображение на плоскости



Произвольный треугольник

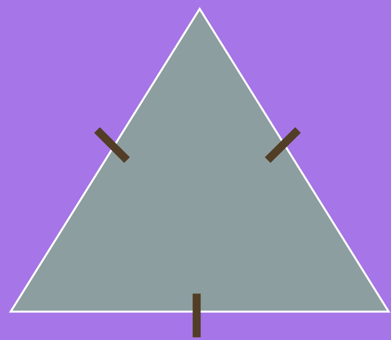


Произвольный треугольник



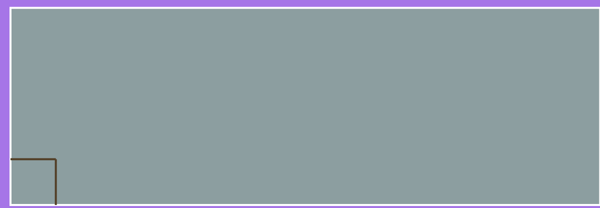
Произвольный треугольник

Фигура в пространстве



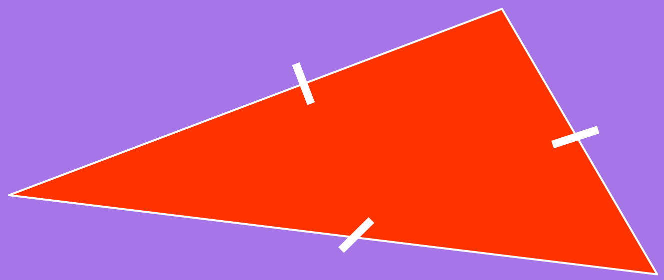
Равносторонний треугольник

Параллелограмм



Прямоугольник

Её изображение на плоскости

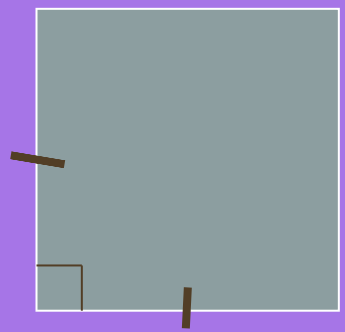


Произвольный треугольник

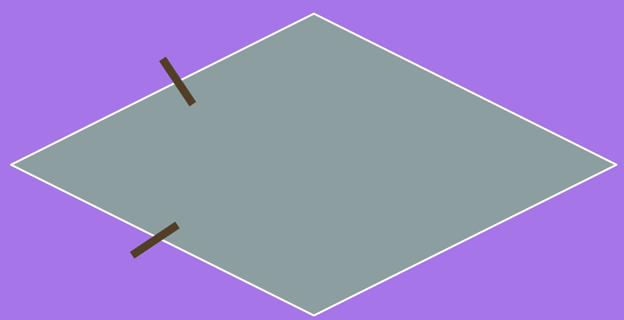
Произвольный параллелограмм

Произвольный параллелограмм

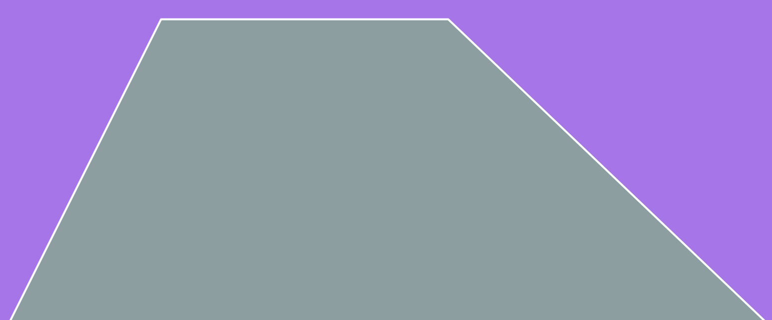
Фигура в пространстве



Квадрат

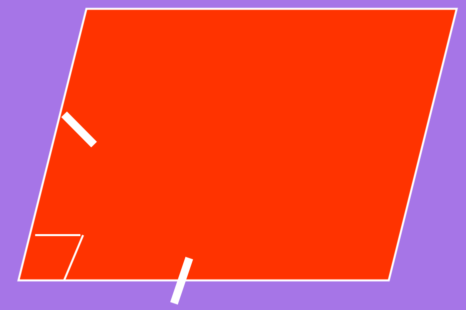


Ромб

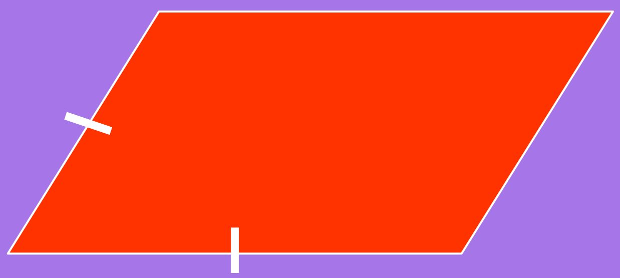


Трапеция

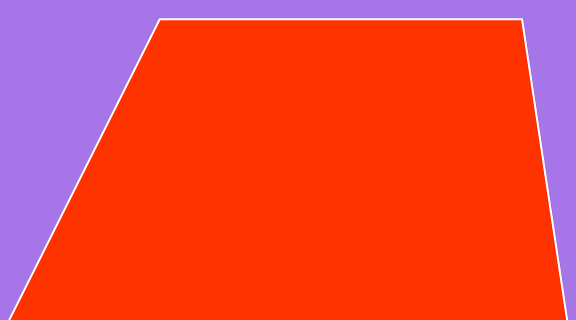
Её изображение на плоскости



Произвольный параллелограмм



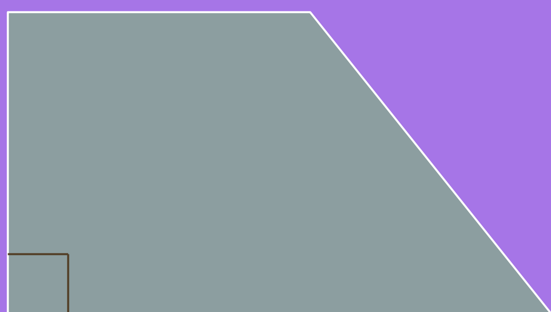
Произвольный параллелограмм



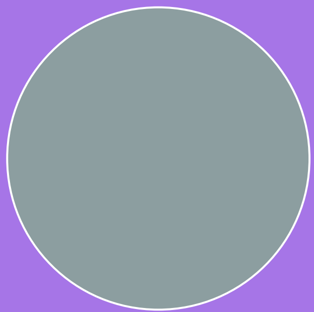
Произвольная трапеция

Фигура в пространстве

Равнобокая трапеция

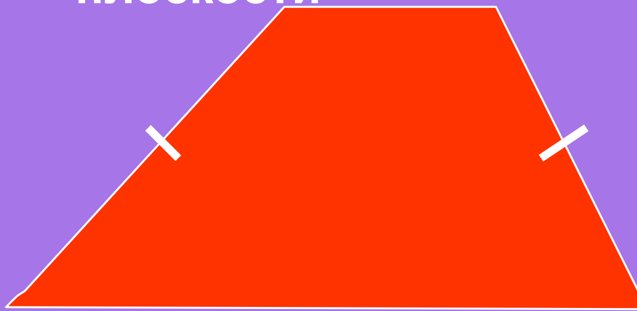


Прямоугольная трапеция

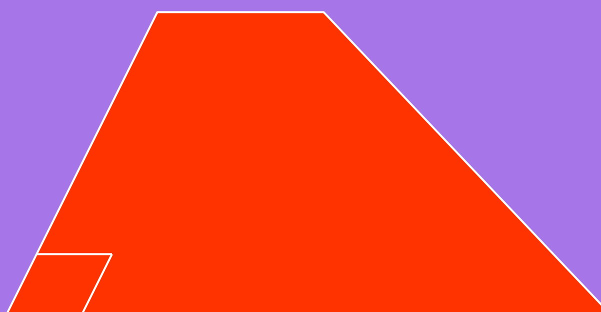


Круг (окружность)

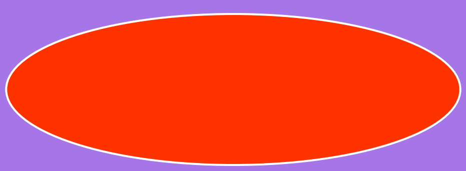
Её изображение на плоскости



Произвольная трапеция

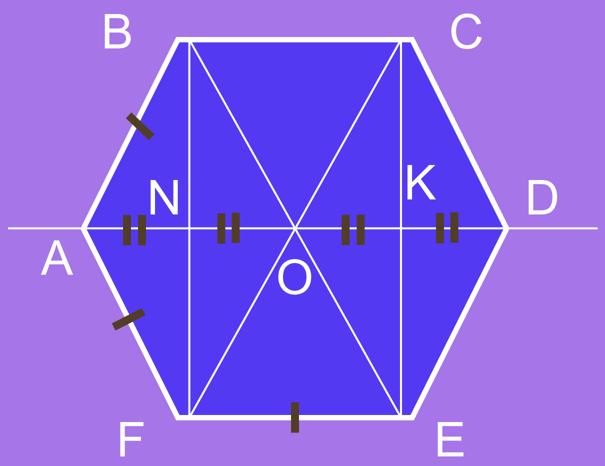


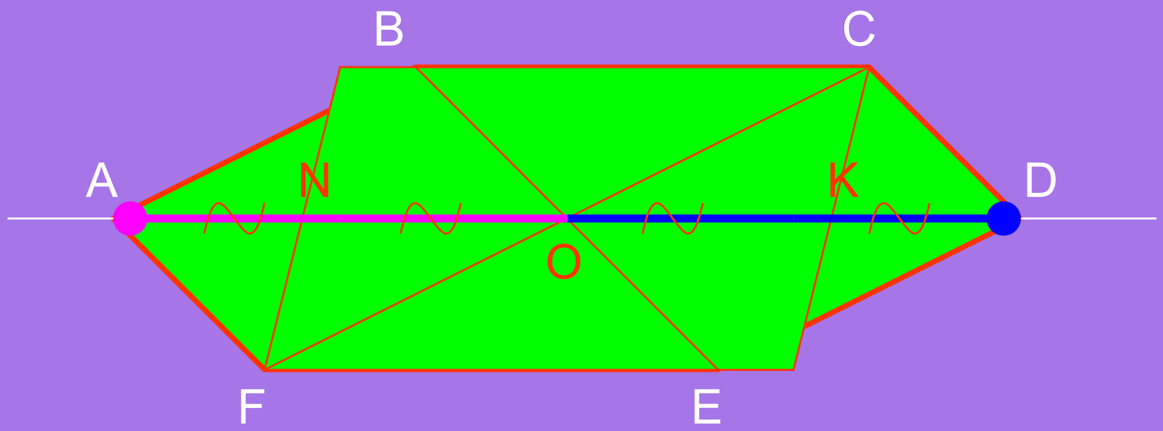
Произвольная трапеция



Овал (эллипс)

Как построить изображение правильного шестиугольника.



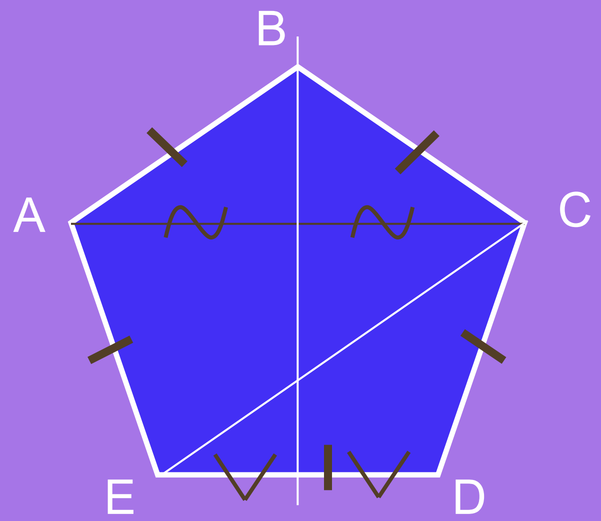


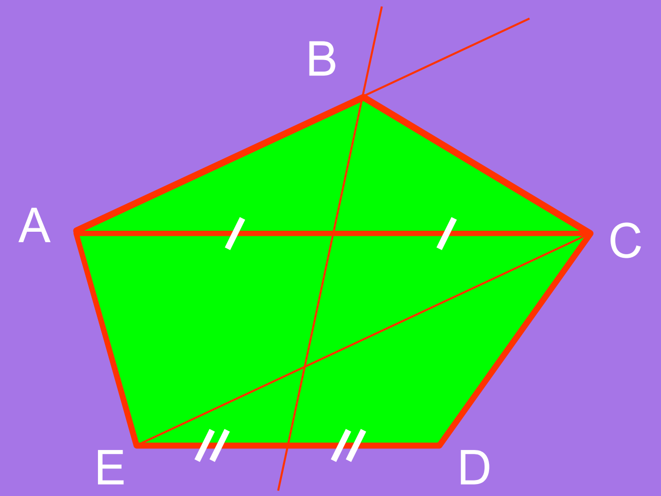
Разобьем правильный шестиугольник на три части: прямоугольник FBCE и два равнобедренных треугольника ΔFAB и ΔCDE. Построим вначале изображение прямоугольника FBCE – произвольный параллелограмм FBCE. Осталось найти местоположение двух оставшихся вершин – точек A и D.

Вспомнив свойства правильного шестиугольника, заметим, что: 1) эти вершины лежат на прямой, проходящей через центр прямоугольника и параллельной сторонам BC и FE; 2) OK=KD и ON=NA.

Значит, 1) находим на изображении точку O и проводим через неё прямую, параллельную BC и FE, получив при этом точки N и K;

2) откладываем от точек N и K от центра O на прямой такие же отрезки – в итоге получаем две оставшиеся вершины правильного шестиугольника A и D.

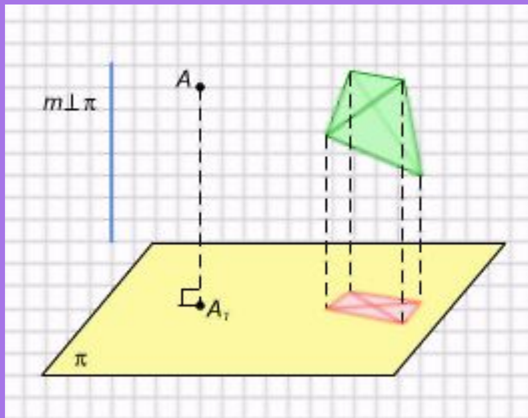




Как построить изображение *правильного пятиугольника*.

Разобьем фигуру на две части – равнобокую трапецию и равнобедренный треугольник, а затем пользуясь свойствами свойствами этих фигур и, конечно же, свойствами параллельного проектирования строим пятиугольник.

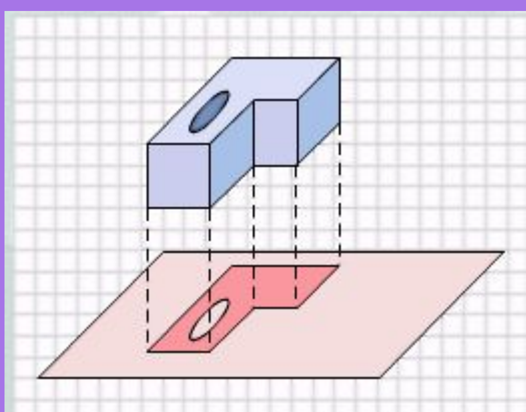
Ортогональная проекция



Ортогональная проекция точки и фигуры.

__Ортогональной проекцией__ точки А на данную плоскость называется проекция точки на эту плоскость параллельно прямой, перпендикулярной этой плоскости. Ортогональная проекция фигуры на данную плоскость **α** *состоит из ортогональных проекций на плоскость* **α** *всех точек этой фигуры.*

Ортогональная проекция часто используется для изображения пространственных тел на плоскости, особенно в технических чертежах. Она дает более реалистическое изображение, чем произвольная параллельная проекция, особенно круглых тел.

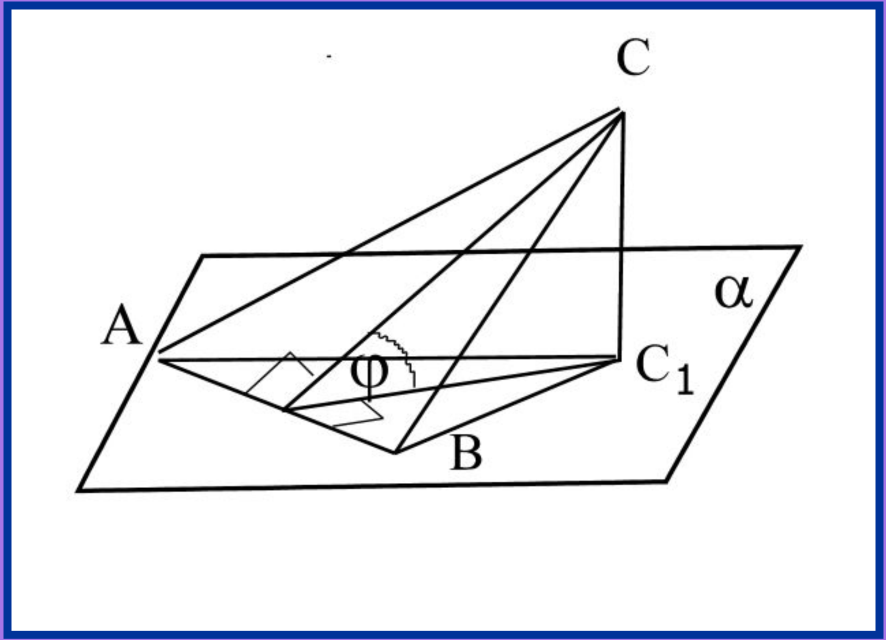


Ортогональная проекция детали.

Площадь ортогональной проекции многоугольника на плоскость равна произведению его площади на косинус угла между плоскостью многоугольника и плоскостью проекции

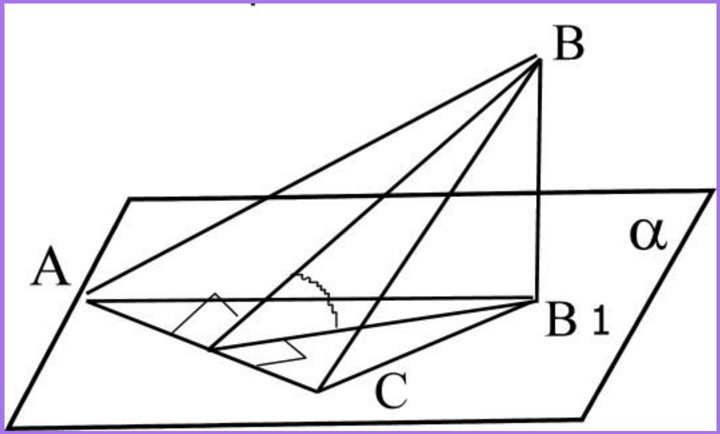
$$S_{\Delta}ABC_1 = S_{\Delta}ABC \cdot \cos\varphi$$

$$S_{\Delta}ABC = \frac{S_{\Delta}ABC_1}{\cos\varphi}$$



Вывод: $\varphi \nearrow$ $\quad S_{пр} \searrow$

Задача: Найти площадь ортогональной проекции равнобедренного треугольника на плоскость, если угол между плоскостью данного треугольника и плоскостью проекции составляет 30, 45, 60 градусов



Дано: ΔABC

$AB = BC = CA = \boldsymbol{a}$

$\angle \varphi = (\alpha, (ABC))$

1) $\varphi = 30^0$

2) $\varphi = 45^0$

3) $\varphi = 60^0$

Найти: $S_{\Delta} AB_1C$

Решение

$S = S_{\Delta ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$ **по условию**

$S_1 = S_{\Delta AB_1C}$ **площадь проекции данного** ΔABC **на плоскость α**

$S_1 = S\cos\varphi$

1) **при** $\varphi = 30^0$ $\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, **тогда** $S_1 = \dfrac{a^2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{4\cdot 2} = \dfrac{3}{8}a^2$

2) **при** $\varphi = 45^0$ $\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, **тогда** $S_1 = \dfrac{a^2\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}{4\cdot 2} = \dfrac{\sqrt{6}}{8}a^2$

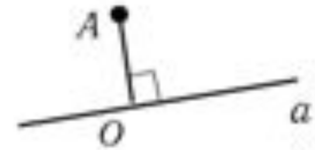
3) **при** $\varphi = 60^0$ $\cos\varphi = \dfrac{1}{2}$, **тогда** $S_1 = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4\cdot 2} = \dfrac{\sqrt{3}}{8}a^2$

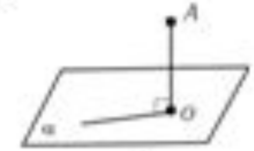
Ответ: $\dfrac{3}{8}a^2,\ \dfrac{\sqrt{6}}{8}a^2,\ \dfrac{\sqrt{3}}{8}a^2$

Измерение расстояний в пространстве

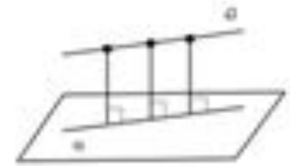
1) **Расстояние между <u>двумя точками</u>** – длина соединяющего их отрезка

2) **Расстояние от <u>точки до прямой</u>** – длина перпендикуляра, опущенного из данной точки до прямой $AO \perp a$

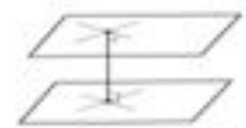




3) **Расстояние от <u>точки до плоскости</u>** – длина перпендикуляра, опущенного из точки до плоскости $AO \perp \alpha$

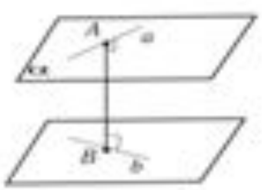


4) **Расстояние от <u>прямой до параллельной ей плоскости</u>** $a \parallel \alpha$ - расстояние от любой точки принадлежащей прямой до плоскости



5) **Расстояние между <u>параллельными плоскостями</u>** – длина перпендикуляра, с концами в этих плоскостях

6) **Расстояние между <u>скрещивающимися прямыми</u>** – длина их общего перпендикуляра.
О : Общим перпендикуляром двух скрещивающихся прямых называется отрезок с концами на этих прямых, перпендикулярный каждой из них.

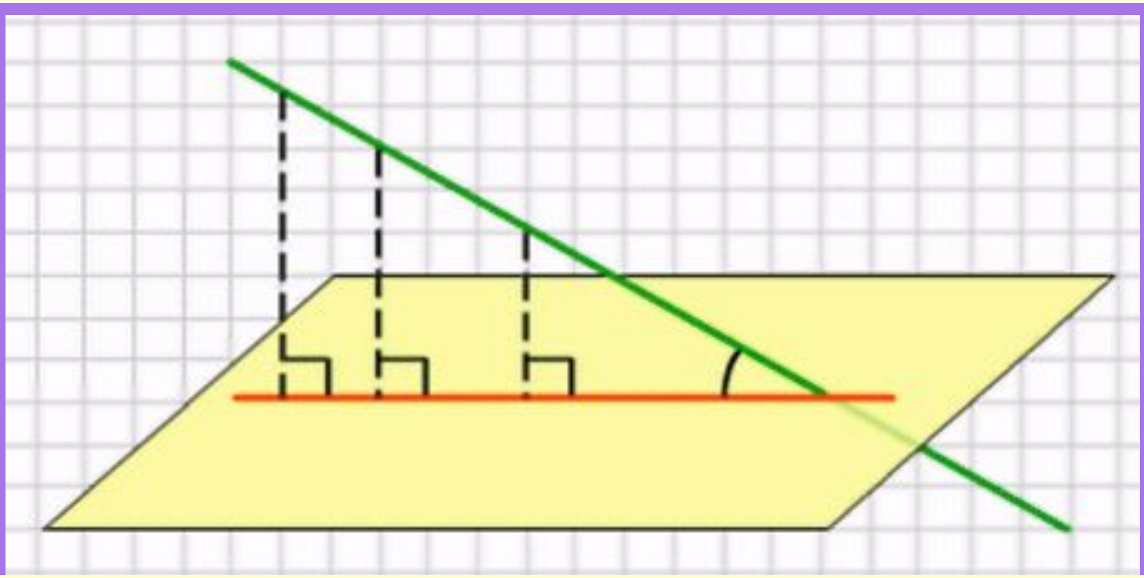


$AB \perp a$

$AB \perp b$

а, в – скрещивающиеся

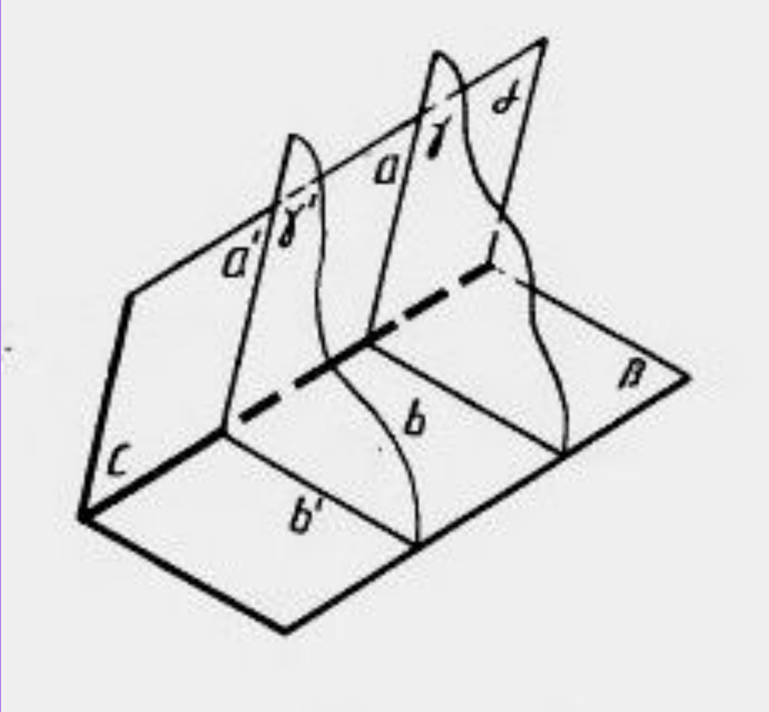
Измерение углов в пространстве



- Углом между прямой и плоскостью называется **угол между прямой и ее ортогональной проекцией на эту плоскость.**
- Если прямая параллельна плоскости, то угол между ней и плоскостью считается равным нулю.
- **Если прямая перпендикулярна плоскости,** то угол между ней и плоскостью прямой, т. е. равен 90°.

Угол между плоскостями

Пусть α и β — данные плоскости, пересекающиеся по прямой с.
Проведем плоскость γ, перпендикулярную прямой с.
Она пересечет плоскости α и β по прямым a и b.
Угол между плоскостями и равен углу между прямыми a и b.

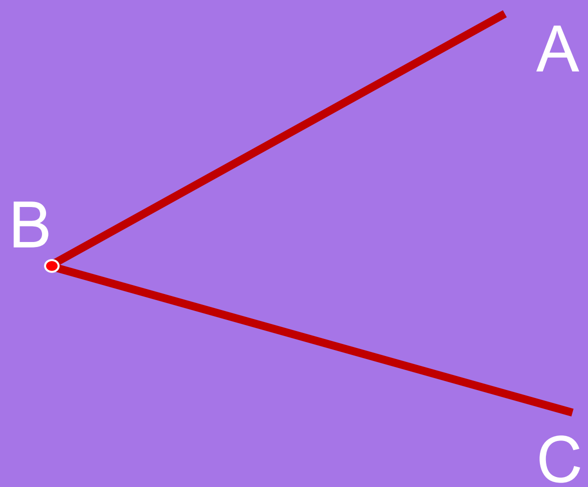


- ***Угол между параллельными плоскостями равен 0^0***
- ***Угол между перпендикулярными плоскостями равен 90^0***

Двугранный угол

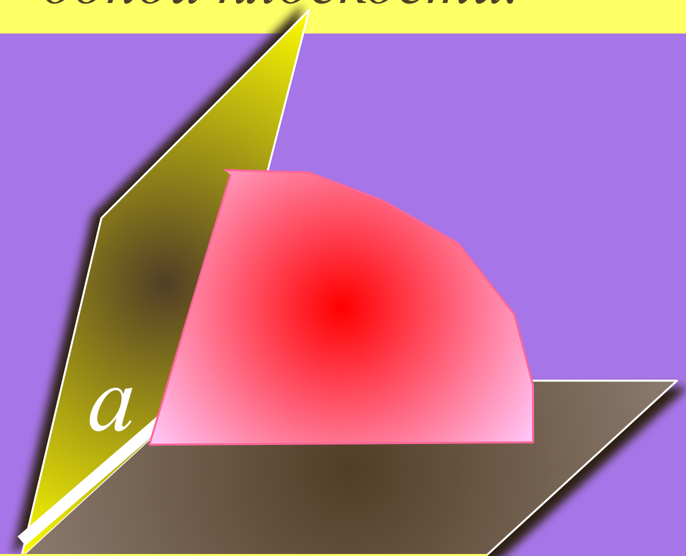
Планиметрия

Углом на плоскости называется фигура, образованная двумя лучами, исходящими из одной точки.



Стереометрия

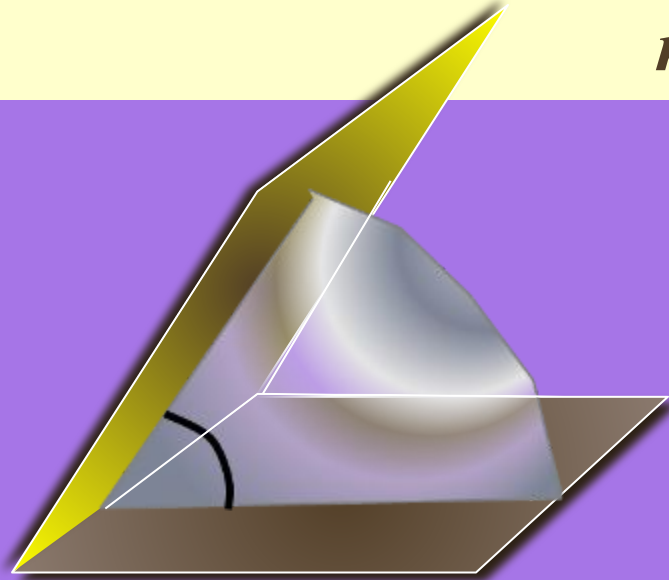
Двугранным углом называется фигура, образованная прямой а и двумя полуплоскостями с общей границей а, не принадлежащими одной плоскости.

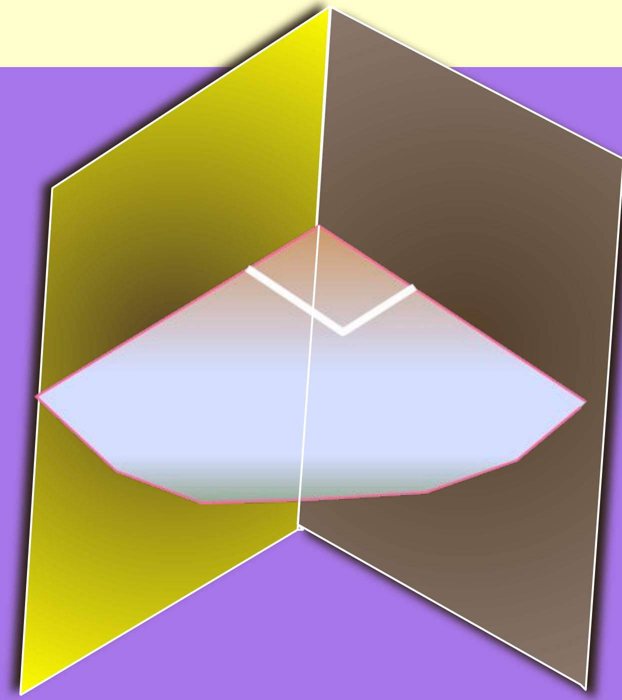


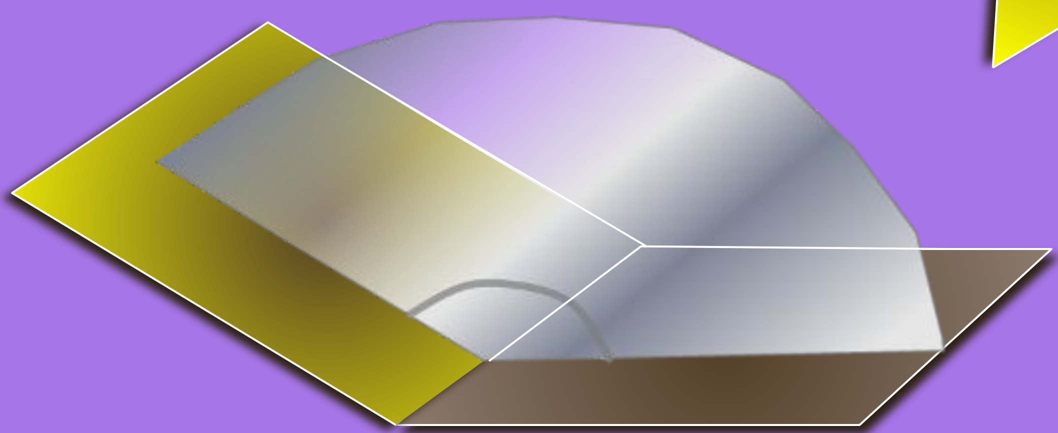
Прямая а – ребро двугранного угла

Две полуплоскости – грани двугранного угла

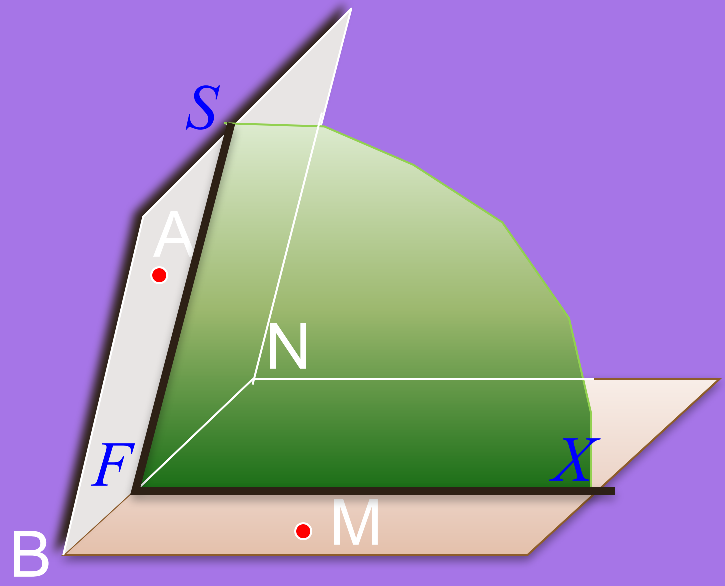
Двугранный угол может быть острым, прямым, тупым

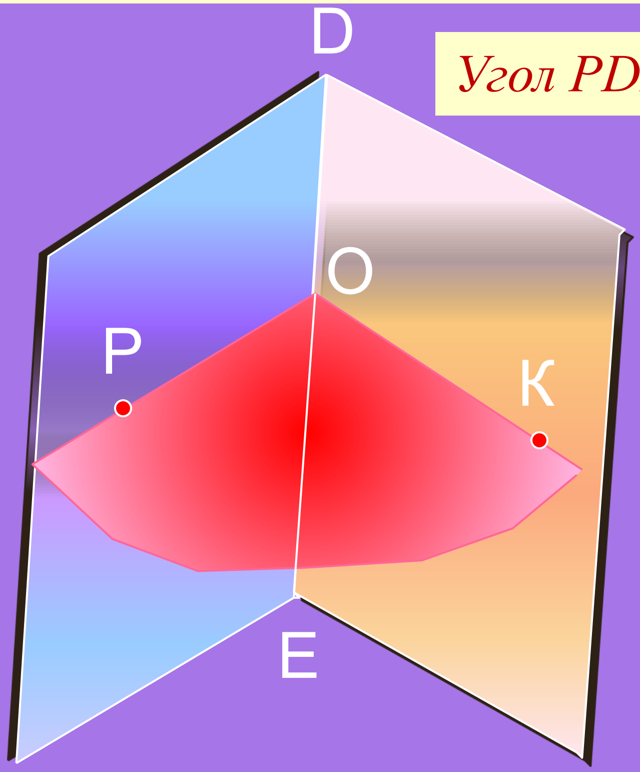






Двугранный угол ABNM, BN – ребро, точки A и M лежат в гранях двугранного угла



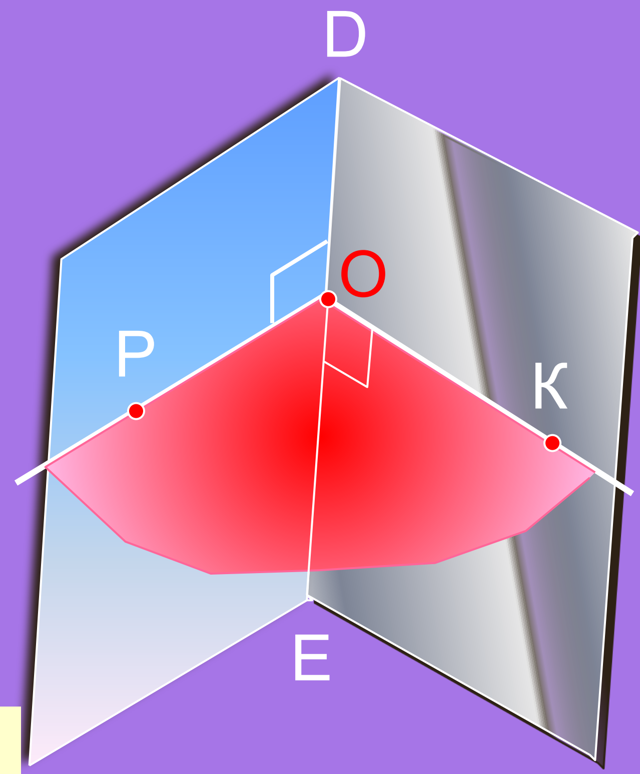


Угол PDEK

Угол SFX – линейный угол двугранного угла

Угол РОК – линейный угол двугранного угла PDEK.

Градусной мерой двугранного угла PDEK называется градусная мера его линейного угла РОК



Ребро двугранного угла DE ⊥ плоскости (РОК) его линейного угла

Все линейные углы двугранного угла равны

Лучи OA и O_1A_1 – сонаправлены

Лучи OB и O_1B_1 – сонаправлены

Углы AOB и $A_1O_1B_1$ равны
как углы с сонаправленными
сторонами