

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н.  
Ельцина»

Кафедра теоретической механики.

## Курсовая работа

по теоретической механике

### “Динамика кулисного механизма”

Вариант 2302014

Студент: Карпов Л.

Группа: ММ 230201

Преподаватель:

Соколовский Б.В

Екатеринбург 2014

Д

# Условие задачи

- Кулисный механизм состоящий из маховика 1, кулисы 2 и катка 3, расположен в горизонтальной плоскости и приводится в движение из состояния покоя вращающим моментом  $M_d$ , создаваемым электродвигателем.

# Определить:

1. Угловую скорость маховика при его повороте на угол  $\phi = \phi^*$  .
2. Угловое ускорение маховика при его повороте на угол  $\phi = \phi^*$  .
3. Силу, приводящую в движение кулису в положении механизма, когда  $\phi = \phi^*$  и реакцию подшипника на оси маховика.
4. Силу, приложенную в центре катка и уравнивающую механизм в положении, когда  $\phi = \phi^*$  .

Записать дифференциальное уравнение движения механизма, используя уравнение Лагранжа второго рода и уравнение движения машины.

# Этапы выполнения курсовой работы

- I этап. Кинематический анализ механизма.
- Выполнение этапа базируется на теории вращательного движения твердого тела, теории сложного движения точки, теории плоского движения твердого тела.
- II этап. Определение угловой скорости и углового ускорения маховика.
- Базируется на теореме об изменении кинетической энергии в интегральной и дифференциальной формах.
- III этап. Определение реакций связей и уравновешивающей силы.
- Базируется на принципе д'Аламбера для механической системы и принципе возможных(виртуальных) перемещений.
- IV этап. Составление дифференциального уравнения движения кулисного механизма.
- Базируется на применении уравнения Лагранжа II рода и уравнения движения машины.
- V этап. Подготовка в Power Point презентации курсовой работы к защите.

# 1. Кинематический анализ механизма

- Найдем скорость точки А:

$$V_A = \dot{\phi} OA = 0,24\dot{\phi}$$

- Раскладываем скорость точки А на две составляющих

- Скорость точки С<sub>2</sub>:

$$V_{C_2} = \dot{\phi} OA \sin \phi = \dot{\phi} 0,12$$

- Ускорение поступательно движущейся кулисы равно производной от её скорости:

$$a_{C_2} = \dot{V}_{C_2} = \ddot{\phi} OA \sin \phi - \dot{\phi}^2 OA \sin \phi = 0,12\ddot{\phi} - 0,12\dot{\phi}^2$$

Скорость центра катка находим из условия пропорциональности скоростей его точек расстояниям до мгновенного центра скоростей

$$\frac{v_{C_3}}{v_{C_2}} = \frac{R_2}{R_2 + r_3}$$

- Ускорение центра катка находим дифференцированием скорости центра

$$a_{C_3} = \dot{v}_{C_3} = \dot{\phi} \frac{OA \sin \phi R_2}{R_2 + r_3} = 0,068\dot{\phi} \quad /$$

$$a_{C_3} = \dot{V}_{C_3} = \frac{R_2 \ddot{\phi} OA \sin \phi}{R_2 + r_3} - \frac{R_2 \dot{\phi}^2 OA \sin \phi}{R_2 + r_3} = 0,068\ddot{\phi} - 0,068\dot{\phi}^2$$

Угловая скорость катка:  $\omega_3 = \frac{V_{C3}}{R_3} = \frac{\dot{\phi} OA \sin \phi}{R_2 + r_3} = 0,42\dot{\phi} \text{ рад/с}$

Угловое ускорение катка находим дифференцированием угловой скорости катка:

$$\varepsilon_3 = \dot{\omega}_3 = \frac{\ddot{\phi} OA \sin \phi}{R_2 + r_3} - \frac{\dot{\phi}^2 OA \sin \phi}{R_2 + r_3} = 0,42\ddot{\phi} - 0,12\dot{\phi}^2$$

## 1.2. Уравнения геометрических связей:

**Точка А:**  $X_A = OA \cdot \cos \phi = 0,192$      $Y_A = OA \cdot \sin \phi = 0,12$

**Точка В:**  $X_{C2} = X_{C20} + OA \cdot \cos \phi = X_{C20} + 0,192$      $Y_{C2} = 0$

**Точка С:**  $X_{C3} = r_3 = 0,12$      $X_{C3} = X_{C30} + \frac{R_2 OA \cos \phi}{R_2 + r_3} = X_{C30} + 0,11$

Угловая скорость катка:  $\dot{\phi}_3 = \frac{V_{C3}}{r_3} = \frac{\dot{\phi} OA \sin \phi}{R_2 + r_3} = 0,42\dot{\phi}$

Этап II. Определение угловой скорости и углового ускорения маховика.

### 2.1. Кинетическая энергия системы

Кинетическую энергию механизма находим как сумму кинетических энергий его звеньев:

$$T = T_1 + T_2 + T_3$$

$$T_1 = \frac{m_1 R_1^2 \dot{\phi}^2}{4} \quad \text{кинетическая энергия вращающегося маховика}$$

$$T_2 = \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_2}{2} (\dot{\phi} OA \sin \phi)^2 \quad \text{Кинетическая энергия поступательно движущейся кулисы}$$

$$T_3 = \frac{m_3}{2} \left( \frac{r_3 \dot{\phi} OA \sin \phi}{R_3 + r_3} \right)^2 + \frac{m_3 \rho_3^2}{2} \left( \frac{\dot{\phi} OA \sin \phi}{R_3 + r_3} \right)^2 \quad \text{Кинетическая энергия катка, совершающего плоское движение}$$

После тождественных преобразований:  $T = \frac{I_{np}(\phi) \dot{\phi}^2}{2}$   
 , где  $I_{np}(\phi)$  - приведенный момент инерции

$$I_{np} = \frac{m_1 R_1^2}{2} + \frac{(m_2 (r_3 + R_3)^2 + m_3 (\rho_3^2 + R_3^2))}{(r_3 + R_3)^2} (OA \sin \phi)^2 =$$

$$\frac{54 * 0.36^2}{2} + \frac{(14 * (0.12 + 0.16)^2 + 12 * (0.14^2 + 0.16^2))}{(0.12 + 0.16)^2} = 3.804$$

Здесь

## 2.2. Производная кинетической энергии по времени

Производную кинетической энергии по времени находим по правилу вычисления производной произведения и производной сложной функции

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{2} \frac{dI_{\text{пр}}}{d\phi} \dot{\phi}^2 + I_{\text{пр}}(\phi) \dot{\phi} \ddot{\phi}$$

Здесь  
ь

$$\frac{dI_{\text{пр}}}{d\phi} = \frac{(m_2(r_3 + R_3)^2 + m_3(\rho_3^2 + R_3^2))}{(r_3 + R_3)^2} OA^2 \cos 2\phi = 21.82 * 0.24^2 * \cos 2\frac{\pi}{6} = 0.625$$

## 2.3. Элементарная работа и мощность внешних сил и работа внешних сил на конечном перемещении (механизм в вертикальной плоскости)

Механизм в горизонтальной плоскости. Следовательно работа сил тяжести при вычислениях не учитывается. Работу совершает только вращающий момент. Элементарная работа равна  $dA^e = M_{\text{Д}} d\phi$

$$\text{Мощность равна } N^e = \frac{dA^e}{dt} = M_{\text{Д}} \dot{\phi}$$

Работа при повороте маховика на угол  $\pi/6$ :

$$A = \int_0^{\phi^*} M_{\text{Д}} d\phi = M_{\text{Д}} \phi = \frac{112\pi}{6} = 58.61$$



2.4. Определение угловой скорости маховика при его повороте на угол  $\Pi/6$ .

Для определения угловой скорости маховика применяем теорему об изменении кинетической энергии в конечной форме, полагая, что механизм в начальный момент находится в покое:  $T_0 = 0, T = A^e$

Подстановка в это равенство найденных выражений  $T$  и  $A$  дает:

$$\frac{I_{\text{пр}} \left( \frac{\pi}{6} \right) \dot{\phi}^2}{2} = M_D \frac{\pi}{6} \quad I_{\text{пр}} \left( \frac{\pi}{6} \right) = \frac{m_1 R_1^2}{2} + \frac{(m_2 (r_3 + R_3)^2 + m_3 (\rho_3^2 + R_3^2))}{2(r_3 + R_3)^2} OA^2 * \sin \frac{\pi}{6} = 3.915$$

Тогда:  $\dot{\phi} \left( \frac{\pi}{6} \right) = \sqrt{\frac{58.61}{1.95}} = 5.48 \text{ рад/с}$

## 2.5. Определение углового ускорения маховика при его повороте на угол $\phi^*$ .

Воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии в дифференциальной

$$\text{форме: } \frac{dT}{dt} = N^e + N^i \quad N^i = 0$$

$$\frac{dT}{dt} = N^e, \quad \text{подставляя значения получим} \quad \frac{1}{2} \frac{dI_{\text{пр}}}{d\phi} \dot{\phi}^2 + I_{\text{пр}}(\phi) \ddot{\phi} = M_{\text{Д}} \dot{\phi}$$

Откуда выражение  $\frac{1}{2} \frac{dI_{\text{пр}}}{d\phi} \dot{\phi}^2 + I_{\text{пр}}(\phi) \ddot{\phi} = M_{\text{Д}} \dot{\phi}$  описывает движение кулисного механизма.

Оно может быть проинтегрировано только численно, а также использовано для нахождения углового ускорения маховика в произвольном его положении.

Определим угловое ускорение маховика при угле его поворота на П/6:

$$\left[ \frac{m_1 R_1^2 + (m_2 (r_3 + R_3) + m_3 (\rho_3 + R_3)) (OA \sin \phi)^2}{2} \right] \dot{\phi} - \frac{(m_2 (r_3 + R_3) + m_3 (\rho_3 + R_3))}{2(r_3 + R_3)^2} OA^2 \cos 2\phi (\dot{\phi})^2 = M_{\text{Д}}$$

Получается  $\varepsilon = 14.06$

# Этап III. Определение сил.

## 3.1. Определение реакций внешних и внутренних связей в положении $\phi^*$ .

Определим реакцию подшипника на оси маховика и силу, приводящую в движение кулису с помощью принципа Даламбера, рассматривая движение маховика отдельно от других тел системы.

Маховик совершает вращательное движение. Внешними силами, помимо пары сил с моментом, на него действуют реакция подшипника и реакция кулисы (рис.3). Система сил инерции приводится к паре с моментом, направленным против вращения.

Условие уравновешенности плоской системы внешних сил:

$$\sum F_{kx} = 0: \quad X_O = N_A,$$

$$\sum F_{ky} = 0: \quad Y_O = 0,$$

$$\sum m_O(\ddot{F}_k) = 0: \quad M_D - M^\Phi + N_A x_A = 0;$$

$$\text{Находим } N_A = \frac{M^\Phi - M_D}{OA \sin 30} = -474.6 \text{ Н} \quad ; \text{ При угле } \phi^* = \frac{\pi}{6}$$

$$N_A = -474.6 \text{ Н}, \quad Y_O = 474.6 \text{ Н}, \quad X_O = 0.$$

### 3.2. Определение силы уравнивающей кулисный механизм.

Найдем силу, которую надо приложить к оси катка, чтобы она уравнивала действие момента, создаваемого электродвигателем в положении Маховика

Для этого воспользуемся принципом виртуальных перемещений  $\delta W_{\text{акт}} = 0$

или в аналитической форме, с учетом действующих на систему активных сил:

$$M_{\text{д}} \delta\phi + F_x \delta x_{C3} + F_y \delta y_{C3} = 0$$

Используя уравнения связей точки C3

$$x_{C3} = r_3 \quad y_{C3} = y_{C30} + \frac{R_3 OA \sin \phi}{R_3 + r_3}$$

находим вариации координат

$$\delta x_{C3} = 0 \quad \delta y_{C3} = \frac{R_2 OA \sin \phi \delta\phi}{R_2 + r_3}$$

Подстановка этих соотношений в уравнение принципа виртуальных перемещений дает:

$$F_y = \frac{M_{\text{д}}}{0.08} = 1400$$

## Этап IV. Дифференциальное уравнение движения кулисного механизма.

### 4.1. Уравнение Лагранжа второго рода

Составим дифференциальное уравнение движения кулисного механизма в форме уравнения Лагранжа второго рода, выбирая за обобщенную координату угол  $\varphi$  поворота маховика

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q$$

Обобщенная сила определяется отношением  $Q = \frac{\delta A^{\text{акт}}}{\delta \varphi}$

где  $\delta A = M_{\text{д}} \delta \varphi$  тогда  $Q = M_{\text{д}}$

Воспользовавшись найденным ранее выражением для

кинетической энергией системы:  $T = \frac{I_{\text{пр}}(\varphi) \dot{\varphi}^2}{2}$

Находим её  
производные:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = I_{\text{пр}}(\varphi) \dot{\varphi},$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) = \frac{dI_{\text{пр}}(\varphi)}{d\varphi} \dot{\varphi}^2 + I_{\text{пр}}(\varphi) \ddot{\varphi},$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = \frac{1}{2} \frac{dI_{\text{пр}}(\varphi)}{d\varphi} \dot{\varphi}^2.$$

Подстановка найденных значений в уравнение Лагранжа дает:

$$I_{\text{пр}}(\varphi) + \frac{1}{2} \frac{dI_{\text{пр}}}{d\varphi} \dot{\varphi}^2 = M_{\text{д}} \quad (3.49 + 1.19 \sin^2 \varphi) \dot{\varphi} + 3.915 \cos 2\varphi (\dot{\varphi})^2 = 112$$

## 4.2. Уравнение движения

Машиной называется совокупность твердых тел (звеньев), соединенных между собой так, что положение и движение любого звена полностью определяется положением и движением одного звена, называемого ведущим. Если ведущим звеном является кривошип, то уравнение машины записывается в форме

$$I_{\text{пр}}(\varphi) + \frac{1}{2} \frac{dI_{\text{пр}}}{d\varphi} \dot{\varphi}^2 = M_{\text{пр}}$$

$I_{\text{пр}}$  - момент инерции машины, приведенный к оси вращения ведущего звена;

$M_{\text{пр}}$  - вращающийся момент, приведенный к оси вращения ведущего кривошипа.

Приведенный вращающийся момент определяется равенством  $M_{\text{пр}} = \frac{\delta A^{\text{акт}}}{\delta \varphi}$

Для рассматриваемого кулисного механизма  $M_{\text{пр}} = M_{\text{д}}$

Запишем дифференциальное уравнение

движения машины:

$$(3.49 + 1.19 \sin^2 \varphi) \dot{\varphi} + 3.915 \cos 2\varphi (\dot{\varphi})^2 = 112$$