Колебательные процессы.

Свободные гармонические колебания. Дифференциальное уравнение гармонических колебаний.

Основные понятия

Колебательные процессы широко известны в природе и технике. Природа колебаний и сам колеблющийся объект могут быть различны: температура, атомы твердого тела, центр тяжести маятника, электрическое и магнитное поля и т.д. Среди них особое место занимают механические колебания. К данному виду колебаний можно отнести движение маятников, струн, мембран телефонов, поршней двигателей внутреннего сгорания, мостов и других сооружений, подвергнутых действию переменной силы. **Механическим колебанием** называется процесс, при котором характеристики движения принимают одни и те же значения через некоторые промежутки времени. Колебания, при которых значения физических величин, описывающих данный процесс, повторяются через равные промежутки времени называются ***периодическими.*** Минимальное значение этого промежутка времени называется **периодом** колебаний.(Т)

.

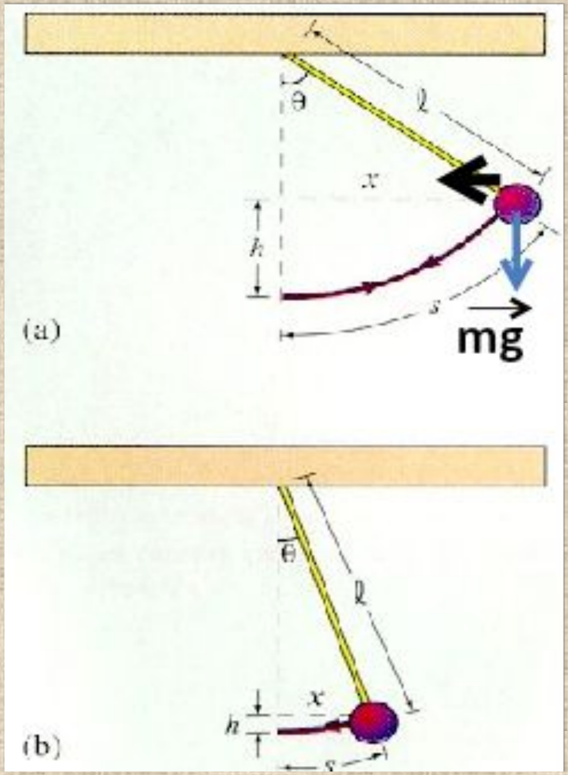
- **Гармонические колебания**. ***Гармоническими*** называют *колебания, при которых какая-либо физическая величина, описывающая процесс, изменяется со временем по закону косинуса или синуса:*
- $\xi(t) = A\cos(\omega_0 t + \alpha)$. *(1)*

Константа A называется амплитудой колебания. ***Амплитуда*** *это наибольшее значение, которое может принимать колеблющаяся величина.* Согласно определению, она всегда положительна. Выражение $\omega t + \alpha$, *стоящее под знаком косинуса, называют* ***фазой колебания***. Она позволяет рассчитать значение колеблющейся величины в любой момент времени. Постоянная величина α *представляет собой значение фазы в момент времени* $t = 0$ и поэтому называется ***начальной фазой колебания***. Значение начальной фазы зависит от выбора начала отсчёта времени. Величина ω *получила название циклической частоты, физический смысл которой связан с понятиями периода и частоты колебаний.*

Периодом незатухающих колебаний называется *наименьший промежуток времени, по истечении которого процессы повторяются,* или *время одного полного колебания. Число колебаний, совершаемых в единицу времени,* называют ***частотой колебаний***. Частота ν *связана с периодом* T колебаний соотношением

$\nu = 1/T$. $\boldsymbol{\omega = 2\pi/T = 2\pi\nu}$.

Из этого соотношения следует физический смысл циклической частоты. *Она показывает, сколько колебаний совершается за 2π секунд.*



Колебания, возникающие в системе, не подвергающейся переменным внешним воздействиям после первоначального толчка, называются **свободными.**
Примером свободных колебаний являются колебания **математического маятника**.
Если в процессе движения маятник **не испытывает сил трения и сопротивления**, то его малые колебания (угол отклонения от положения равновесия α < 6 градусов) **можно считать гармоническими.**
При наличии в системе **сил трения** или **сопротивления** свободные колебания будут **затухающими.**
Колебания, возникающие в системе **под воздействием переменной внешней силы**, **называются вынужденными(b)**

Рассмотрим колебания, совершаемые под действием возвращающей силы F = -kx, знак '–' указывает, что направление F и x противоположны; k- коэффициент пропорциональности.
Тангенциальная составляющая силы тяжести F= Psin α ≅ mg α. Ввиду малости α:
α ≅ sin α ≅ tg α=x/l, где x- смещение, l – длина нити.

Уравнение второго закона Ньютона для возвращающей силы F:

F=m a (2), где m – масса колеблющейся точки, a – ускорение.

$$a=\frac{d^2x}{dt^2},\qquad m\frac{d^2x}{dt^2}=-kx,\qquad \frac{d^2x}{dt^2}+\frac{k}{m}x=0, \quad (3)$$

Введем обозначения

$$\omega_0^2=\frac{k}{m}, \quad (*),$$

получим

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega_0^2x=0, \quad (3^*)$$

Получили дифференциальное уравнение свободных гармонических колебаний , совершаемых под действием упругой или квазиупругой силы при отсутствии сил сопротивления.

Рассмотрим свободные незатухающие электрические колебания в цепи.

Электрическую цепь, состоящую из индуктивности и ёмкости, называют ***колебательным контуром*** (рис. 2). Электрическим сопротивлением контура пренебрегаем ($R = 0$). Для установления характера процессов, возникающих в контуре после зарядки конденсатора, надо составить дифференциальное уравнение, используя второе правило Кирхгофа. Согласно этому правилу, запишем $\varepsilon_s = u_c$ *(ε_s — э. д. с. самоиндукции, u_c — напряжение на конденсаторе).*

Но $u_c = q/C$, где q и C *заряд и ёмкость конденсатора, а*

$$\varepsilon_s = -L\frac{di}{dt}.$$

Здесь L - индуктивность соленоида, i - сила тока в контуре. С учётом этого

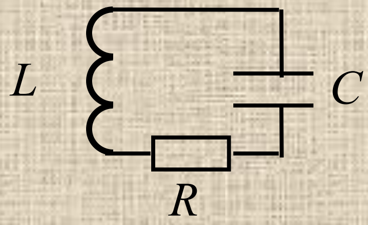


Рис. 2

$$-L\frac{di}{dt} = q/C$$

$$L\frac{di}{dt}+q/C=0. \qquad i=\frac{dq}{dt} \qquad \frac{di}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dq}{dt}\right)=\frac{d^2q}{dt^2}.$$

Учитывая это и разделив обе части последнего уравнения на **L**(*индуктивность*), получаем

$$\frac{d^2q}{dt^2}+\frac{1}{LC}q=0. \qquad (4)$$

Введем обозначения $\omega_0^2=1/(LC)$.

$$\frac{d^2q}{dt^2}+\omega_0^2 q=0. \qquad (4^*)$$

С точки зрения математики уравнения (3) и (4) одинаковые. Их можно записать в виде:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2}+\omega_0^2\xi=0, \qquad (5)$$

где в случае маятника $\xi = x$ $\qquad \omega_0^2 = k/m$

и для эл. колебательного контура $\xi = q$ $\qquad \omega_0^2=1/(LC).$

Из теории дифференциальных уравнений известно, что данное уравнение представляет собой дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Для его решения надо составить характеристическое уравнение и решить его: $r^2+\omega_0^2=0.$

Отсюда $r^2=-\omega_0^2$. и $r=\pm\sqrt{-\omega_0^2}=\pm\omega_0\sqrt{-1}=\pm i\omega_0$, где $i=\sqrt{-1}$, - мнимая единица.

Решением этого дифференциального уравнения будет выражение:

$$\xi(t) = A\cos(\omega_0 t + \alpha). \quad (1)$$

СКОРОСТЬ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ

$$\upsilon = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}[X_m \cos(\omega_0 t + \alpha)] = -\omega_0 X_m \sin(\omega_0 t + \alpha),$$

$$\upsilon = \upsilon_m \cos(\omega_0 t + \alpha + \frac{\pi}{2}),$$

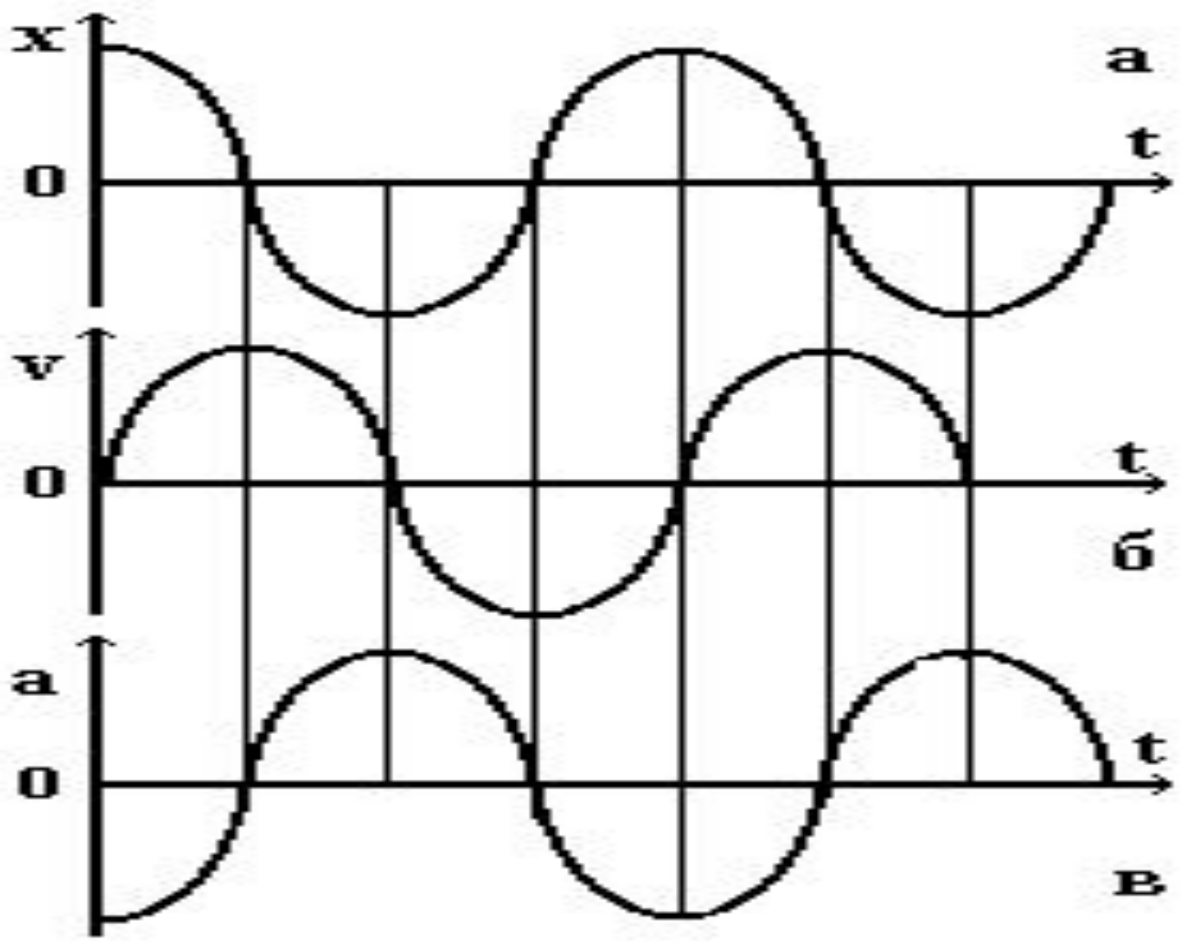
***Вывод**: Скорость м.т. при колебательных процессах изменяется по гармоническому закону и является функцией времени.*

УСКОРЕНИЕ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ

$$a = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d^2}{dt}[X_m cos(\omega_0 t + \alpha)] = -\omega_0^2 X_m cos(\omega_0 t + \alpha),$$

$$a = -a_m cos(\omega_0 t + \alpha),$$

Вывод: Ускорение изменяется по гармоническому закону, является функцией времени и опережает колебания смещения по фазе на π и опережает колебание скорости по фазе на π/2.


x
0
t
а
v
0
t
б
a
0
t
в

СИЛА ТОКА И НАПРЯЖЕНИЕ В КОЛЕБАТЕЛЬНОМ КОНТУРЕ

$$q = q_{\mathrm{m}} \cos(\omega_0 t + \alpha),$$

$$U_c = \frac{q_m}{C} \cos(\omega_0 t + \alpha) = U_{\mathrm{m}} \cos(\omega_0 t + \alpha),$$

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}[q_{\mathrm{m}} \cos(\omega_0 t + \alpha)] = -\omega_0 q_{\mathrm{m}} \sin(\omega_0 t + \alpha),$$

Воспользовавшись формулой приведения $\sin(\omega_0 t + \alpha) = \cos(\omega_0 t + \alpha + \frac{\pi}{2}),$

$$\mathrm{i(t)} = \mathrm{i}_{\mathrm{m}} \cos(\omega_0 t + \alpha + \frac{\pi}{2}),$$

ЭНЕРГИЯ СВОБОДНЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ МЕХАНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ.

$$W_p = \frac{1}{2} k X_m^2 \cos^2(\omega_0 t + \alpha) = \frac{1}{2} m \omega_0^2 X_m^2 \cos^2(\omega_0 t + \alpha),$$

$$W_k = \frac{1}{2} m \upsilon^2$$

$$\upsilon = -\upsilon_m \sin(\omega_0 t + \alpha), \quad \upsilon_m = \omega_0 X_m,$$

$$W_k = \frac{1}{2} m \omega_0^2 X_m^2 \sin^2(\omega_0 t + \alpha),$$

$$W = \frac{1}{2} m \omega_0^2 X_m^2 = const$$