Моделирование социально-экономических процессов

доц. Гусева В. Б., кафедра информатики и математики. к.307

Размещение методических материалов:
Y:_Teachers\Guseva\МСЭП_2014-2015

1. Математические модели в макроэкономике

1.1 Классификация экономико-математических моделей

Для построения модели необходимо выделить существенные, наиболее важные характеристики для каждого исследуемого явления и отвлечься (абстрагироваться) от несущественных явлений и факторов.

Таким образом, модель представляет собой некоторое упрощенное отражение действительности, позволяющее выявить основные закономерности развития экономических процессов и разработать варианты решения сложных макроэкономических проблем, таких как экономический рост, инфляция, безработица, используя всю мощь аппарата математики.

Основной задачей экономической науки является предсказание динамики экономических показателей.

Предсказание должно быть количественным. Для этого экономическая модель должна быть переведена на язык математики.

Только в этом случае экономическая наука может с наибольшей эффективностью давать практический результат.

Практически любая экономическая задача может быть путем создания экономико-математической модели переведена на язык математики и поставлена как задача математическая.

В этом смысле экономико-математическое моделирование является неотъемлемой составной частью экономической теории.

Об этом, в частности свидетельствует уже то, что все Нобелевские премии по экономике присуждены авторам за разработку именно математических моделей экономики. В этом мы сможем убедиться, поскольку курс построен в основном на обсуждении моделей экономики, отмеченных Нобелевскими премиями.

Все экономические процессы изучаются на основе построения экономико-математических моделей.

Экономико-математические модели представляют собой формализованное (графическое, алгебраическое, или в общем случае математическое) описание экономических процессов и явлений с целью выявления основных взаимосвязей между ними.

Можно выделить типы моделей:

1. **поведенческие,** характеризующие поведение экономических агентов например, функция потребления: $C = C_0 + m_p \cdot Y_d$.

где C_0 - автономное потребление, не зависящее от уровня дохода; Y_d - располагаемый доход; m_p - поведенческий коэффициент, который называется предельной склонностью к потреблению и показывает, как изменится величина потребления при изменении величины располагаемого дохода на единицу).

2. **Технологические**, описывающие технологию производства, например, производственная функция $Y = F(K, L)$, где Y - величина совокупного выпуска, которая определяется запасом капитала K и запасом труда L, т.е. количеством основных экономических ресурсов. Типичным примером технологической модели является производственная функция Кобба-Дугласа

$$Y = 2{,}248 \cdot \mathrm{K}^{0{,}404} \cdot L^{0{,}803},$$

характеризующая экономику США в период 1980 - 1995 гг. Y, K - измеряются в млрд. долл., L- в млн чел.

3. **Институциональные,** показывающие воздействие институциональных факторов (параметров государственного управления) на макроэкономические величины (например, функция налогов:

$$T = \overline{T} + t \cdot Y,$$

где $\overline{T}$ - величина налоговых поступлений, - автономные (аккордные) налоги, не зависящие от уровня дохода, t - ставка налога, Y - уровень совокупного дохода (выпуска);

4. **Дефиниционные**, отражающие определение той или иной макроэкономической величины (например, функция совокупного спроса, который по определению представляет собой сумму спросов всех макроэкономических агентов имеет вид:

$$A_d = C + I + G + X_n,$$

где C - спрос домохозяйств (потребительские расходы), I - спрос фирм (инвестиционные расходы), G - спрос государства (государственные закупки товаров и услуг) и X_n - спрос иностранного сектора (чистый экспорт).

С точки зрения назначения, можно выделить описательные модели и модели принятия решения.

Описательные модели отражают содержание и основные свойства экономических объектов как таковых. С их помощью вычисляются числовые значения экономических факторов и показателей.

Главное назначение описательной модели помочь вскрыть механизмы возникновения того или иного экономического явления, выявить причины, например, возникновения кризиса неплатежей в российской экономики переходного периода.

Модели принятия решения помогают найти наилучшие варианты плановых показателей или управленческих решений.

Эти модели отличаются от описательных тем, что в них имеется возможность выбора значений управляющих параметров.

Модели принятие решений должны давать численную оценку целесообразности принятия того или иного управленческого решения.

Модель принятия решений может также определять оптимальные планы выпуска продукции, использования капитальных и трудовых ресурсов и т. д.

Моделирование возможно для задач макроэкономики и микроэкономики. Задачей моделирования микроэкономики является моделирование экономических процессов на уровне предприятий или отдельных предпринимателей.

Среди них наиболее разработанными являются оптимизационные модели, посредством которых описываются (моделируются) задачи планирования, распределения ресурсов и т. д., а наиболее сложными и менее известными - игровые модели, описывающие задачи конфликтного характера с учетом пересечения различных интересов.

Макро и микро - модели включают два вида показателей (переменных): экзогенные и эндогенные.

Экзогенные величины - это показатели, задающиеся извне, формирующиеся вне модели. Экзогенные величины являются автономными (независимыми).

Эндогенные величины - это показатели, формирующиеся внутри модели.

Модель позволяет показать, как изменение экзогенных величин (внешний импульс) влияет на изменение эндогенных.

Кроме переменных, модели включают в себя параметры и константы.

К ним относятся все поведенческие коэффициенты, такие как предельная склонность к потреблению, предельная склонность к сбережению, норма депонирования, и т. д.

В макроэкономических моделях большое значение имеет фактор времени.

В зависимости от того, как этот фактор учитывается в анализе, различают три вида макроэкономических моделей:

статические, сравнительной статики (квазистатические) и динамические (при этом исследования могут проводиться как в дискретном, так и в непрерывном времени).

Статические модели описывают экономическую ситуацию на определенный момент времени.

Модели сравнительной статики (квазистатические) показывают результат перехода экономической системы из одного равновесного состояния в другое, но не исследуют, как происходит этот переход.

Механизм этого процесса перехода изучается в динамических моделях

В определенном смысле динамические модели являются наиболее полными, поскольку в этом случае в модели явно задаются законы изменения входящих в модель эндогенных переменных во времени.

1.2. Секторные модели макроэкономики

Изучение экономических зависимостей и закономерностей на уровне экономики в целом возможно лишь, если рассматривать совокупности или агрегаты. Агрегирование представляет собой объединение отдельных элементов в одно целое, в агрегат, в совокупность.

Агрегирование всегда основывается на абстрагировании, т.е. отвлечении от несущественных моментов и выделении наиболее значимых, существенных, типичных черт, закономерностей экономических процессов и явлений.

Например, при макроэкономическом анализе агрегирование позволяет выделить четыре основных макроэкономических агента:

1) домохозяйства,
2) фирмы,
3) государство,
4) иностранный сектор.

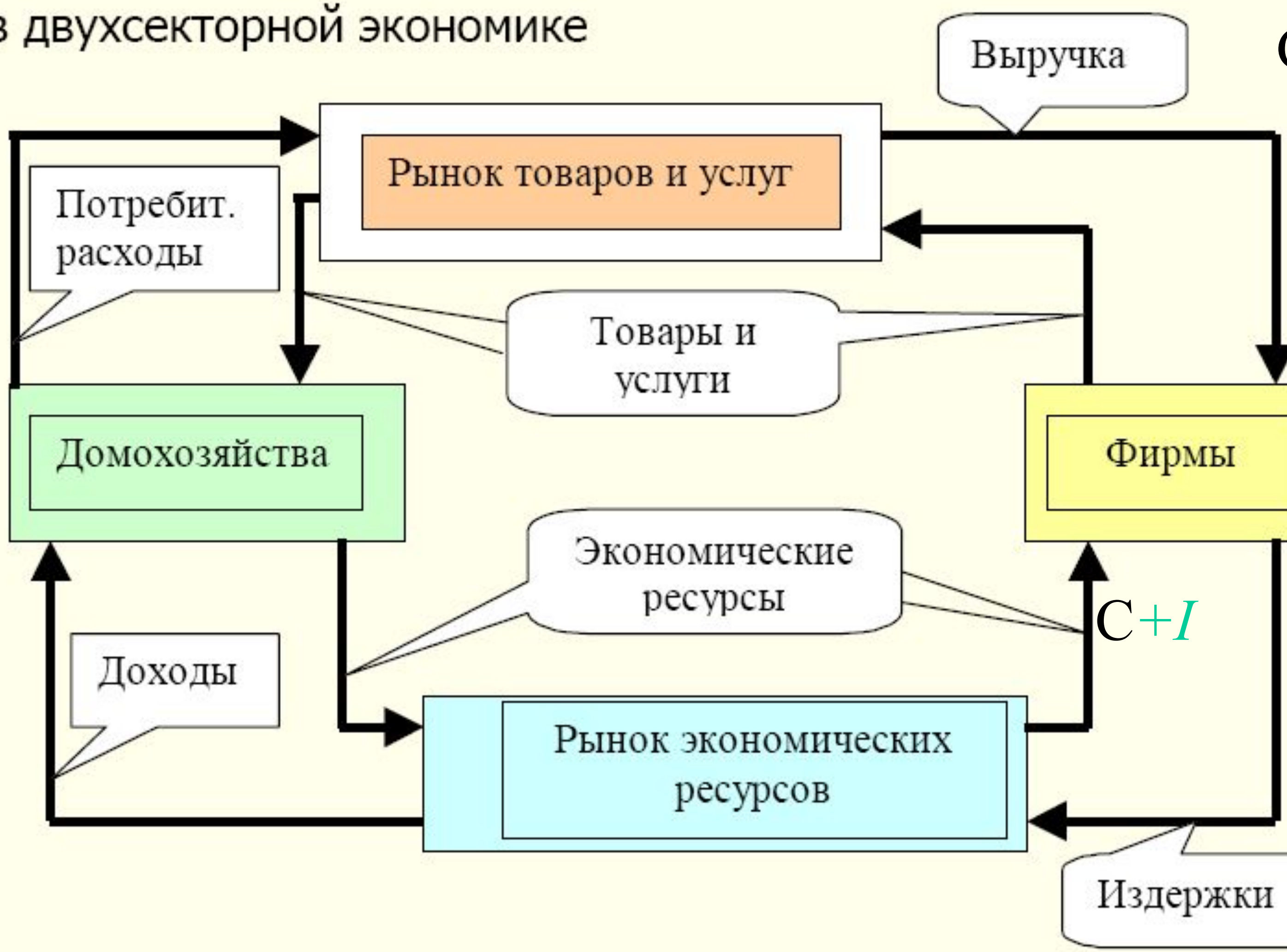
- Агрегирование рынков дает возможность выделить четыре макроэкономических рынка:

1) рынок товаров и услуг (реальный рынок),
2) финансовый рынок (рынок финансовых активов),
3) рынок экономических ресурсов,
4) валютный рынок

Выявление наиболее типичных черт поведения экономических агентов (агрегирование агентов) и наиболее существенных закономерностей функционирования экономических рынков (агрегирование рынков) позволяет агрегировать макроэкономические взаимосвязи, то есть исследовать закономерности поведения макроэкономических агентов на макроэкономических рынках.

Таким образом получаем макроэкономическую модель кругооборота продукта, расходов и доходов (или модели круговых потоков - model of circular flows).

Модель материальных и денежных потоков в двухсекторной экономике



C

C

$Y=C+S$

C

В двухсекторной модели экономики, изображенной на рисунке предполагается, что:

1. Стоимость каждого материального потока равна величине денежного потока;

2. Совокупные расходы домохозяйств (потребление C) равны их совокупным доходам;

3. Национальный доход равен национальному продукту (Y);

4. Совокупный спрос равен совокупному предложению (фирмы продают все, что произвели, без остатка);

Описанная модель может быть представлена уравнением

$$Y=C$$

Следует отметить, что поскольку домохозяйства действуют рационально, то они обычно тратят на потребление не весь свой доход. Часть дохода они сберегают.

С другой стороны, каждая фирмы испытывают постоянную необходимость вкладывать хотя бы небольшую часть средств в производство, обеспечивая его существование и расширение.

Национальный доход - потребление домохозяйств и их сбережения

$$Y = C + S$$

Совокупные расходы - непроизводственное потребление и инвестиционные расходы

$$E = C + I$$

В состоянии равновесия:

$$Y = E$$

$$C + I = C + S$$

$$I = S$$

Описанная ситуация предопределяет возможность появления финансового рынка

1. Домохозяйства предоставляют свои сбережения финансовым посредникам (в первую очередь банкам), у которых фирмы берут кредиты;

2. Домохозяйства тратят свои сбережения на покупку ценных бумаг, выпускаемых фирмами, напрямую обеспечивая их инвестиционными ресурсами.

В *трехсекторную модель* экономики наряду с домохозяйствами и предпринимателями включается государственный сектор.

Совокупные расходы состоят теперь из трех компонентов: потребления , инвестиций и государственных закупок :

$$E = C + I + G$$

Совокупный доход распределяется на потребление, сбережения и налоги:

$$Y = C + S + T$$

В состоянии равновесия:

$$Y = E$$

$$I + G = S + T$$

В трехсекторной модели национальный доход, являющийся доходом, заработанным собственниками экономических ресурсов (домохозяйствами), отличается от дохода, которым домохозяйства могут распоряжаться по собственному усмотрению, т. е. от располагаемого дохода Y_d на величину налогов T

$$Y_d = C + S.$$

Включение в схему кругооборота иностранного сектора дает *четырехсекторную* модель экономики (модель *открытой экономики)* и означает необходимость учета взаимоотношений национальной экономики с экономиками других стран, которые в первую очередь проявляются через международную торговлю товарами и услугами – через экспорт и импорт товаров и услуг.

$$Y = C + S + T$$

$$E = C + I + G + Xn$$

Расходы иностранного сектора носят название *чистого экспорта* и представляют собой разницу между экспортом и импортом $Xn = Ex - Im$

В состоянии равновесия

$$Y = E$$

В четырехсекторной модели должно выполняться основное макроэкономическое тождество

$$C + I + G + Xn = C + S + T$$

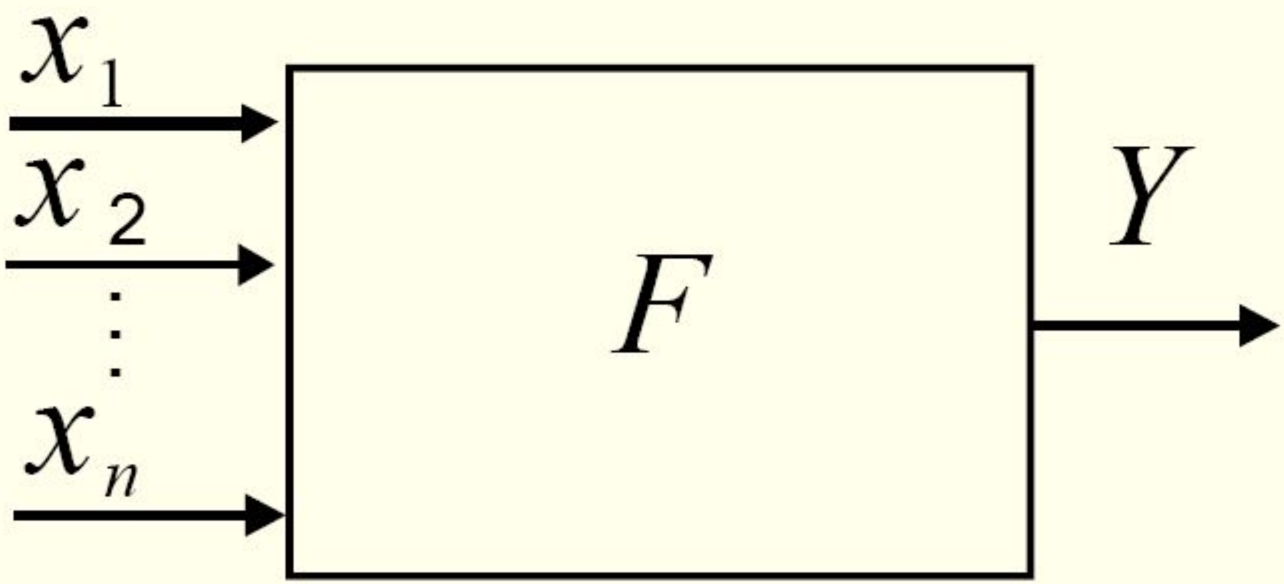
2. Моделирование процесса производства

2.1. Производственные функции и их свойства

Производственная функция определяет связь между затратами факторов производства и выпуском продукции в производственной системе. Производственные функции могут быть определены для систем различных масштабов – от производственного участка до мировой экономики.

Каждая производственная система характеризуется своей производственной функцией.

По существу, производственная функция есть совокупность «правил», с помощью которых для каждого набора затрат определяется соответствующий выпуск.



Неоклассическая производственная функция обладает следующими свойствами:

1. Производственная функция должна задаваться положительно определенной, дважды дифференцируемой по всем своим аргументам функцией.
2. Производственная функция обращается в нуль, если отсутствует хотя бы один из ресурсов:

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

Невозможно полностью заменить один фактор производства комбинацией других факторов. Возможно лишь частичное замещение одного фактора другими в некоторой ограниченной области.

3. С увеличением любого из ресурсов объем производства возрастает, т. е.

$$\frac{dY}{dx_i} > 0, \mathrm{i} = 1,2,\ldots n.$$

4. При увеличении любого из ресурсов предельная эффективность является убывающей функцией

$$\frac{d^2Y}{dx_i^2} < 0, \mathrm{i} = 1,2,\ldots n.$$

5. Производственная функция должна обладать свойством масштабируемости (при увеличении объема всех ресурсов в λ раз, объем производства Y возрастает как $\lambda^\gamma Y$

$$Y(\lambda \cdot x_1,\ \lambda \cdot x_2, \ldots, \lambda \cdot x_n) = \lambda^\gamma \cdot Y(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

где величина γ называется степенью однородности производственной функции.

* Приведем пример однородной функции для двух переменных x и y:

$$f(x, y) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 \cdot y + c \cdot x \cdot y^2 + d \cdot y^3.$$

Эта функция является однородной функцией со степенью однородности 3, поскольку в каждом из слагаемых сумма показателей x и y равна трем.

Примером неоклассической производственной функции является функция Кобба -Дугласа

$$Y = A \cdot K^{\alpha} \cdot L^{1-\alpha}.$$

Напомним, что A и α в этой функции – константы, характеризующие особенности производственного процесса, K – стоимость капитальных ресурсов, L – трудовых.

Еще один пример – мультипликативная производственная функция

$$Y=AK^{\alpha}L^{\beta}$$

Степень однородности производственной функции имеет очень важный экономический смысл. При решении задач планирования. расширения или свертывания производства необходимо ответить на следующие вопросы:

- как влияет изменение масштаба производства на его эффективность;
- как изменится производимый продукт при изменении масштаба производства на единицу.

Пример

Рассмотрим найденную по данным за 1960-1995 гг. производственную функцию валового внутреннего продукта США

$$Y = 2{,}248 \cdot K^{0{,}404} \cdot L^{0{,}803},$$

Степень однородности этой производственной функции

$$\gamma = 0{,}404 + 0{,}803 = 1{,}207.$$

Это означает, что при увеличении капитальных и трудовых затрат в λ раз объем производства увеличится в λ^{γ} раз, что характерно для развивающейся экономики.

Характеристики производственной функции

Математически эффективность производственного процесса или эффективность использования факторов производства определяется величиной среднего и предельного продуктов.

Средним продуктом фактора называется отношение количества произведенного продукта к количеству затраченного фактора за определенный период времени. В случае двух факторов *K* и *L* введем понятия средней фондоотдачи как отношение произведенного продукта к величине затраченного капитала

$$\mathrm{A}Y_K = \frac{Y(K,L)}{K}$$

и средней производительности труда как отношение произведенного продукта к величине затраченного труда .

$$\mathrm{A}Y_L = \frac{Y(K,L)}{L}.$$

Очень часто представляет интерес выяснить, как изменится объем производства Y при небольшом изменении одного фактора производства (при фиксированном значении других факторов). В этом случае необходимо ввести понятие **предельного (маржинального) продукта** фактора как отношения приращения объема производства к увеличению приращения фактора, его вызвавшего:

В случае двух факторов K и L, введем понятие предельной фондоотдачи, как производную объема произведенного продукта по величине затраченного капитала

$$\mathrm{M}Y_K = \frac{\partial Y(K,L)}{\partial K}.$$

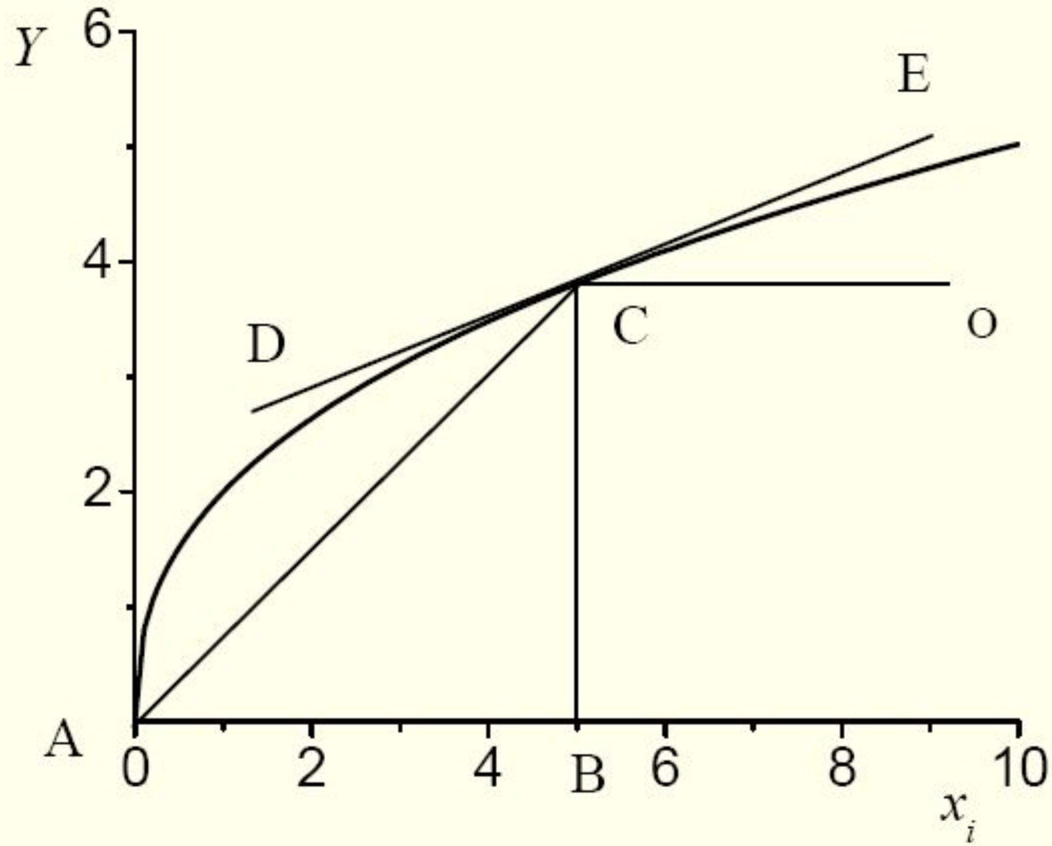
Предельную производительность труда или предельный продукт труда определим как частную производную продукта по величине затраченного труда

$$\mathrm{M}Y_L = \frac{\partial Y(K,L)}{\partial L}.$$

Следует обратить внимание на то, что в силу условия 4 выпуклости производственной функции, которое в свою очередь является выражением того факта, что в реальной экономике с ростом затрат ресурса предельная отдача падает, предельные продукты факторов всегда меньше средних продуктов факторов.

На следующем слайде изображен геометрический смысл средних предельных величин.

$$\mathrm{A}Y_x = \mathrm{tg}\,\angle CAB; \quad \mathrm{MY_x} = \mathrm{tg}\,\angle ECO$$



Коэффициентом эластичности продукта по фактору назовем относительное изменение продукта, выраженное в процентах, при относительном увеличении фактора на 1%.

Запишем относительное изменение продукта через эластичность и относительное увеличение фактора

$$\frac{\Delta Y}{Y} = \varepsilon_{x_i} \cdot \frac{\Delta x_i}{x_i}$$

Перейдем к бесконечно малым приращениям и перенесем величину эластичности в левую часть уравнения. В результате получаем

$$\varepsilon_{x_i} = \frac{\partial Y}{\partial x_i} \cdot \frac{x_i}{Y} = \frac{\dfrac{\partial Y}{\partial x_i}}{\dfrac{Y}{x_i}} = \frac{\mathrm{M}\,Y_{x_i}}{\mathrm{A}\,Y_{x_i}}.$$

Если производственная функция имеет степенную зависимость по фактору *K* показателем степени α, то эластичность по этому фактору равна α.

В частности для степенной производственной функции

$$Y = A \cdot K^{\alpha} \cdot L^{\beta}$$

эластичности по фондам и труду равны, α и β, соответственно

Доказательство провести самостоятельно.

Для решения задач планирования расширения или свертывания производства необходимо ввести понятия среднего и предельного продукта масштаба производства.

Средним продуктом масштаба производства назовем отношение продукта, полученное при увеличении факторов производства в λ раз, к коэффициенту масштабирования λ

$$\mathrm{A}Y_\lambda = \frac{Y(\lambda K, \lambda L)}{\lambda} = \lambda^{\gamma - 1} \cdot Y(K, L)$$

Предельный продукт масштаба производства определим как прирост продукции при изменении масштаба производства на единицу

$$\mathrm{M}Y_\lambda = \frac{\partial Y(\lambda K, \lambda L)}{\partial \lambda} = \gamma \cdot \lambda^{\gamma - 1} \cdot Y(K, L).$$

Коэффициентом эластичности масштаба производства назовем отношение предельного продукта масштаба к среднему продукту масштаба производства:

$$\varepsilon_\lambda = \frac{\mathrm{M}\,Y_\lambda}{\mathrm{A}\,Y_\lambda} = \gamma.$$

Таким образом, коэффициент эластичности масштаба производства всегда равен степени однородности производственной функции.

Прямым расчетом легко показать, что сумма коэффициентов эластичности по факторам производства равна коэффициенту эластичности масштаба производства.

Пример

Используя производственную функцию

$$Y = 2{,}248 \cdot K^{0{,}404} \cdot L^{0{,}803}$$

определить:

а) эластичность валового внутреннего продукта США по фондам;

б) эластичность валового внутреннего продукта США по трудовым ресурсам;

в) эластичность масштаба валового внутреннего продукта США;

г) определить являлась ли в указанный период экономика фондосберегающей или ресурсосберегающей.

Решение

Исходя из определения эластичности , и учитывая тот факт, что эластичность степенной функции по фактору равна показателю степени, находим, что эластичность ВВП США по фондам в 1960-1995 гг. равна 0,404 , а эластичность по труду – 0,803.

Эластичность масштаба производства в соответствии равна показателю однородности производственной функции $\gamma = \alpha + \beta = 1{,}207$.

Наконец, для указанного временного периода эластичность валового внутреннего продукта США по фондам оказалась почти вдвое ниже эластичности ВВП по труду и развитие экономики следует признать фондосберегающим (экстенсивным).

2.2. Производственные функции с постоянной эластичностью замещения факторов производства

Замещение ресурсов в процессе производства

Рассмотрим производственную функцию из предыдущего примера:

$$Y = 2{,}248 \cdot K^{0{,}404} \cdot L^{0{,}803}$$

Мы можем зафиксировать выпуск на некотором уровне Y_0.

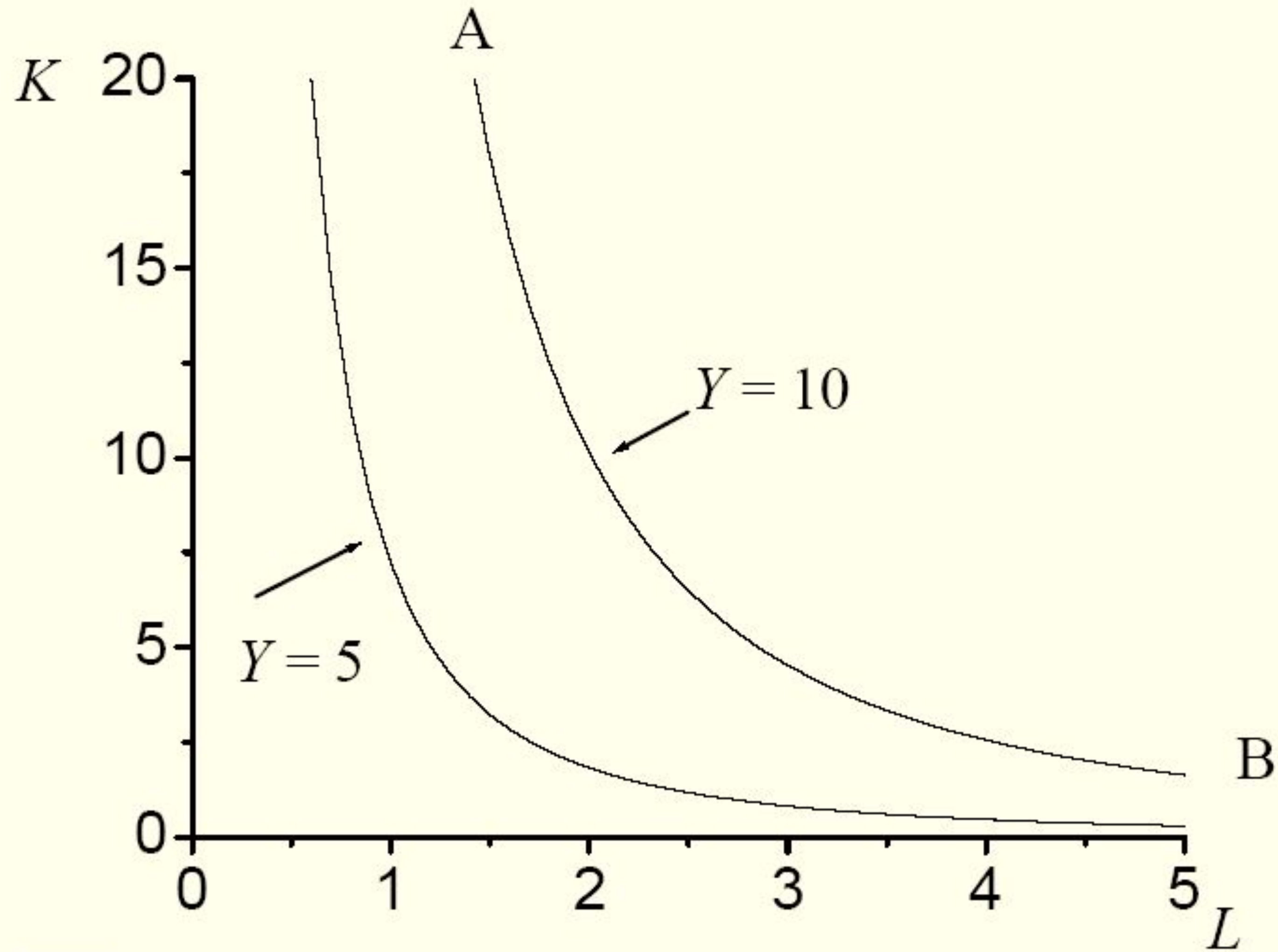
Изокванта (множество точек в пространстве факторов *K, L* , для которых значение производственной функции постоянно) в этом случае является линией, которая задается уравнением

$$K = \left(2{,}248^{-1} \cdot Y_0 \cdot L^{-0{,}803}\right)^{1/0{,}404}$$

Изокванты для значений $Y = 5$ и $Y = 10$ производственной функции

$$Y = 2{,}248 \cdot K^{0{,}404} \cdot L^{0{,}803}$$

Изображены на следующем слайде.


A
K
20
15
10
5
0
Y = 10
Y = 5
B
0
1
2
3
4
5
L

При изменении величины факторов производства в общем случае изменяется и объем производства. Очевидно, что существует бесконечное множество различных наборов факторов, которым соответствует одинаковое количество произведенного продукта. Это множество называют множеством безразличия производителя.

Перечислим основные свойства, которыми обладают изокванты.

1. Изокванты не пересекаются. Это свойство следует из однозначности производственных функций поскольку каждому набору факторов производства может соответствовать лишь одно значение выпуска продукта.

2. Изокванты делят область допустимых значений факторов производства на две области: область значений с большим объемом производства, чем для изокванты и область с меньшим значением объема производства. Так правее кривой AB для всех допустимых значения параметров $Y > 10$, а левее этой кривой $Y < 10$.

3. Изокванты не пересекаются с осями координат. Действительно , нулевая изокванта совпадает с одной из осей координат. Поскольку по второму свойству производственных функций при отсутствии одного из факторов производство невозможно, то $Y = 0$ при $X_i = 0$. С другой стороны, выше мы доказали, что изокванты не пересекаются. Поэтому изокванта не может пересечь координатную ось.

Смысл введения изоквант состоит в том, они наглядно показывают возможность замещения одного фактора производства другим.

Например, для изоквант, изображенных на рисунке увеличение количества затрачиваемого капитала приводит к уменьшению затрат труда .

И наоборот, уменьшение затрат капитала может быть скомпенсировано увеличением затрат труда при неизменном объеме производства.

Если в процессе производства замена одного фактора другим невозможна, для его описания нельзя использовать неоклассическую производственную функцию. Примером производственной функции, описывающей производственный процесс с жестким производственным циклом является производственная

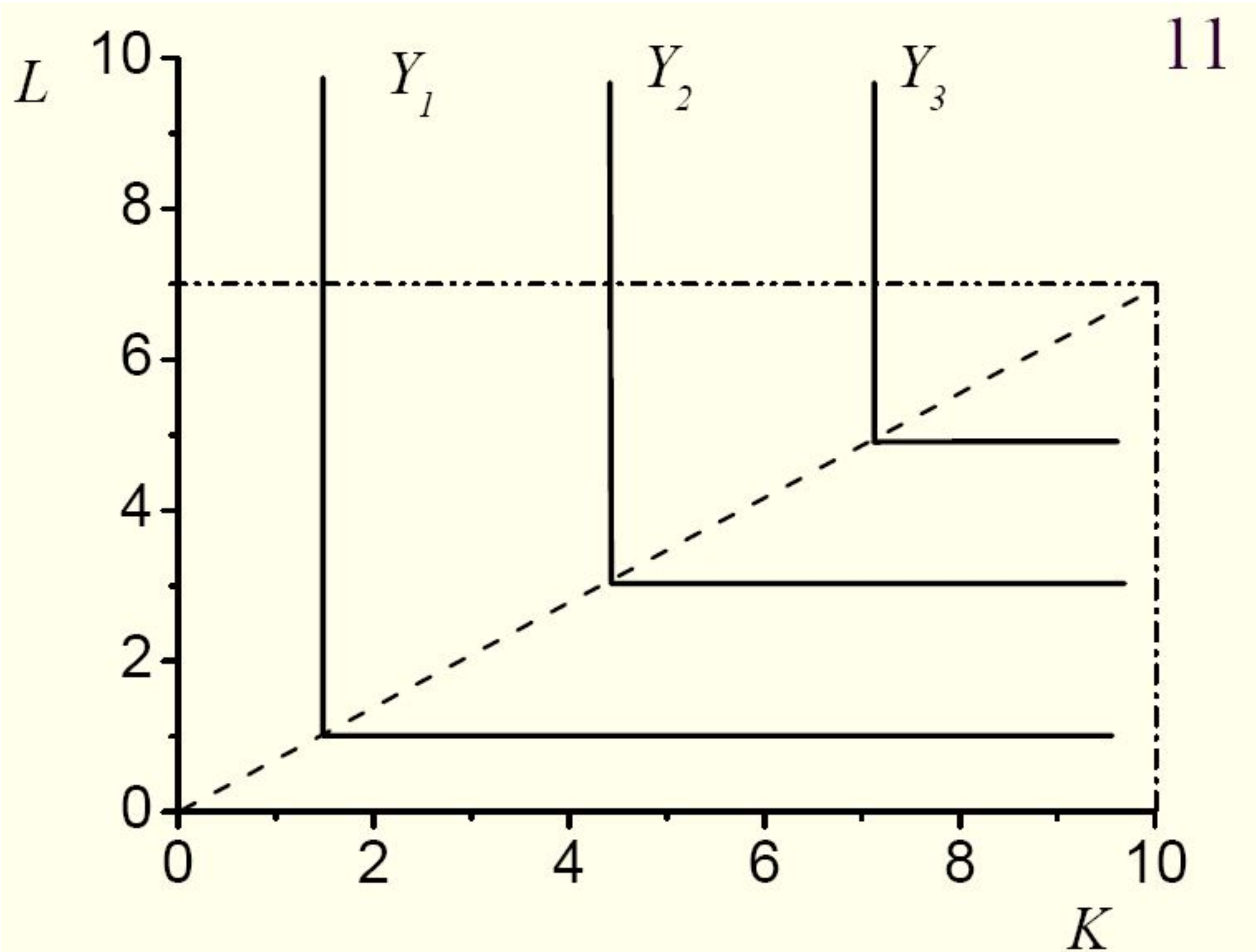
функция Леонтьева.

$$Y(K, L) = \min(c_1 \cdot K, c_2 \cdot L) \qquad Y(K, L) = \min\left(\frac{K}{a}, \frac{L}{b}\right).$$

Коэффициенты c_1 и c_2 зависят от количества ресурса, необходимого для производства единицы товара (a, b).

Чтобы построить множество изоквант производственной функции Леонтьева, необходимо сначала построить прямую $K=a/bL$. На этой прямой будут лежать точки, соответствующие производственным процессам, идущим с полным использованием всех ресурсов.

Далее, выбранную на этой прямой точку необходимо дополнить вертикальными и горизонтальными прямыми, соответствующими производственным процессам с тем же объемом выпуска, но с избыткам одного из ресурсов (см. след. слайд)



L
K
Y_1
Y_2
Y_3
0
2
4
6
8
10
11

Пример

Рассмотрим производственную систему с жестким производственным процессом, для которой объем производства определяется функцией Леонтьева (изокванты этой функции изображены на следующем слайде). Пусть для создания единицы продукции требуется 3 единицы труда и 5 единиц капитала. В распоряжении производителя имеется 12 единиц капитала. Требуется построить график объема произведенной продукции в зависимости от количества привлеченных единиц труда.

Решение

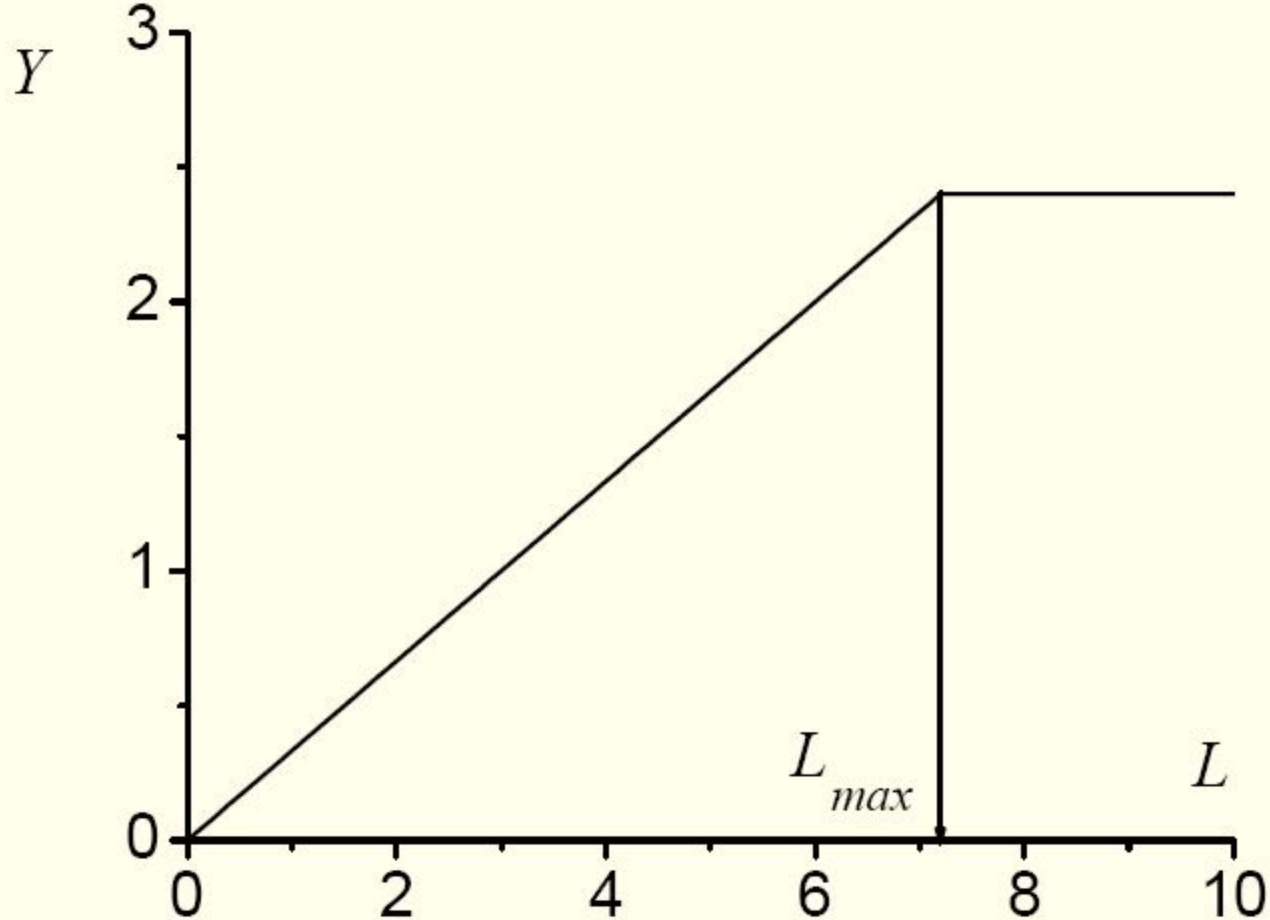
Объем производства будет определяться производственной функцией

$$Y = \min\left(\frac{K}{5}, \frac{L}{3}\right).$$

Поэтому при увеличении величины задействованных трудовых ресурсов объем производства будет расти, пока $L/3 < 12/5$

$L_{\text{мах}} = 12/5 \cdot 3 = 7{,}2$

При дальнейшем увеличении трудовых ресурсов объем производства будет лимитироваться объемом капитала и останется постоянным. График функции приведен на следующем слайде.



Y
3
2
1
0
L
max
L
0
2
4
6
8
10

Предельная норма замещения факторов производства

Рассмотрим производственную функцию, допускающую замещение одного фактора производства другим. Из условия сохранения объема выпуска при таком замещении (Y=const) следует, что малые приращения участвующих в замене факторов подчиняются следующему соотношению:

$$\frac{\partial Y}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial Y}{\partial x_j} dx_j = 0.$$

Предельную норму замещения одного фактора производства другим определим соотношением

$$\mathrm{M}_{ij} = -\frac{dx_j}{dx_i} = \frac{\dfrac{\partial Y}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial Y}{\partial x_j}},$$

Полученную формулу предельной нормы замещения факторов производства можно записать, используя определение предельных величин и определение эластичности:

$$\mathrm{M}_{ij} = \frac{\mathrm{M}Y_{x_i}}{\mathrm{M}Y_{x_j}} = \frac{\varepsilon_{x_i} \cdot x_j}{\varepsilon_{x_j} \cdot x_i}$$

Предельная норма замещения труда капиталом показывает, какое дополнительное количество капитала может скомпенсировать уменьшение задействованных в экономике трудовых ресурсов на единицу так, чтобы уровень производства не изменился

$$\mathrm{M}_{LK} = \frac{\dfrac{\partial Y}{\partial L}}{\dfrac{\partial Y}{\partial K}}$$

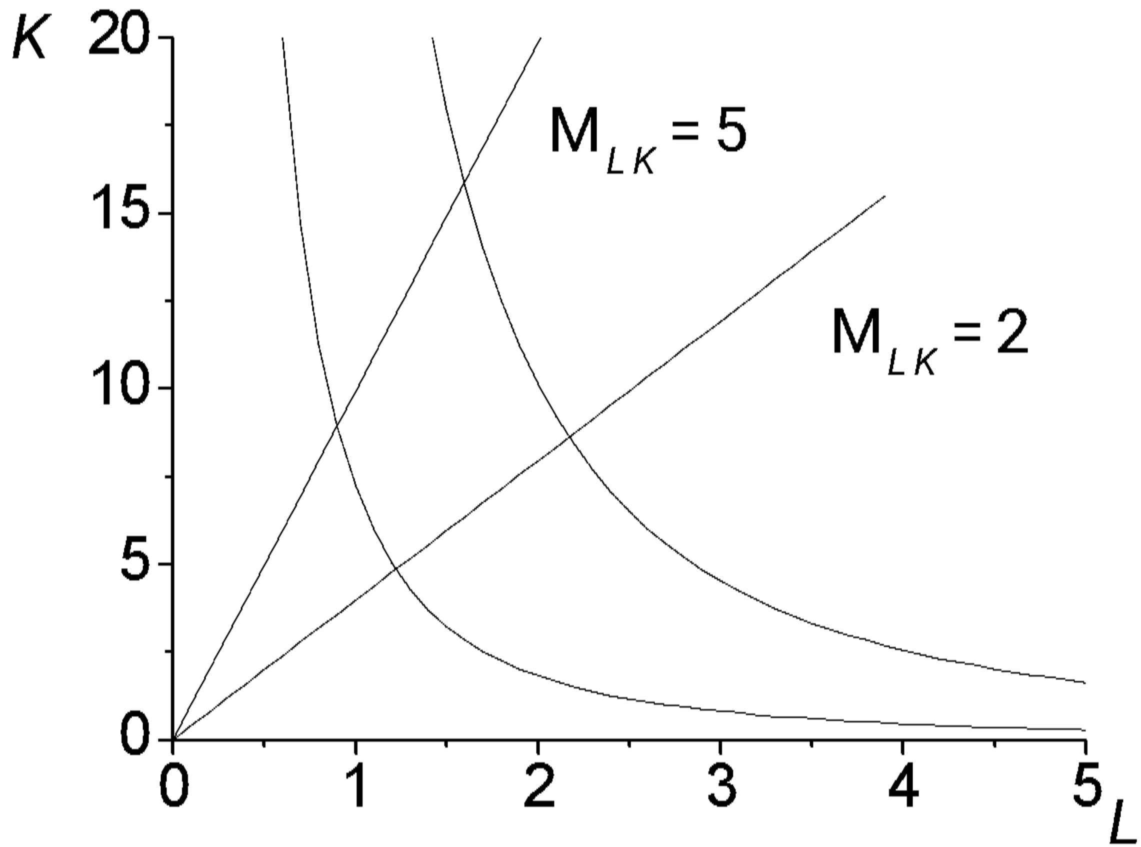
Предельная норма замещения труда капиталом численно равна тангенсу угла наклона касательной к изокванте.

$$\mathrm{M}_{LK} = -\frac{dK}{dL}$$

Предельная норма замещения труда капиталом прямо пропорциональна фондовооруженности $k=K/L$

$$M_{LK} = \frac{\varepsilon_L}{\varepsilon_K} \cdot \frac{K}{L}$$

При условии постоянства эластичности по труду и капиталу (например, для мультипликативной производственной функции) правая часть формулы зависит только от фондовооруженности $k = K/L$, которая остается постоянной вдоль любого луча, выходящего из начала координат на диаграмме, построенной в осях K и L. Таким образом, предельная норма замещения труда капиталом также остается постоянной вдоль таких лучей. Лучи $k = K/L = const$ называются *изоклинами*.



Изокванты и изоклины для производственной функции

$$Y = 2{,}248K^{0{,}404}L^{0{,}803}$$

Эластичность *замещения труда капиталом* равна величине относительного изменения *фондовооруженности* в условиях фиксированного выпуска при относительном изменении *предельной нормы замещения труда капиталом* на 1 процент:

$$\varepsilon = \frac{\partial k}{\partial \mathrm{M}_{LK}} \cdot \frac{\mathrm{M}_{LK}}{k}$$

Функции с постоянной эластичностью замещения труда капиталом

Тип производственной функции	Эластичность замещения факторов	Степень однородности
Мультипликативная	1	γ
Кобба – Дугласа	1	1
Без возможности замещения ресурсов	0	γ
Леонтьева	0	1
С бесконечно большой эластичностью	∞	γ
Линейная	∞	1

Без возможности замещения ресурсов

$$Y(K,L)=\lim_{\rho\to\infty}\left(c_1\cdot K^{-\rho}+c_2\cdot L^{-\rho}\right)^{-\frac{\gamma}{\rho}}=\min\left(c_1\cdot K^{\gamma},c_2\cdot L^{\gamma}\right)$$

С бесконечно большой эластичностью

$$Y(K,L)=\left(c_1\cdot K+c_2\cdot L\right)^{\gamma}$$

Линейная

$$Y(K,L)=\left(c_1\cdot K+c_2\cdot L\right)$$

2.3. Модель В. Леонтьева «Затраты - выпуск»

Часто при экономическом планировании на уровне регионов или страны в целом возникает необходимость определения объема выпуска товаров, обеспечивающего заданный спрос населения и производственные нужды на эти товары при известной технологии.

В предположении о линейности технологии (т.е. о прямой пропорциональности объема выпуска объемам затрат ресурсов) математической формализацией этой задачи является знаменитая модель «Затраты – выпуск», предложенная в 1930 г. американским экономистом В. Леонтьевым (Нобелевская премия в 1973 г. «за развитие метода «затраты – выпуск» и за его применение к важным экономическим проблемам».)

Целью построения модели Леонтьева является анализ потока товаров между отраслями экономики, обеспечивающего такое функционирование производственного сектора, когда объем выпуска соответствует суммарному (т.е. производственному и конечному) спросу на товары.

Поэтому экономика рассматривается в разукрупненном до уровня отраслей виде

Пусть в экономической системе производятся, продаются, покупаются, потребляются и инвестируются n продуктов.

Каждая отрасль является «чистой», т. е. производит только один продукт, совместное производство различных продуктов исключается.

Различные отрасли выпускают разные продукты. Часть продукции потребляется отраслями производства, а часть предназначена для свободной продажи как внутри региона, так и вне его.

Предполагается, что для производства единицы j – го продукта нужно затратить a_{ij} единиц i – го продукта.

Валовой выпуск продукта за год распадается на две части: на производственное потребление во всех отраслях экономики и на конечное (непроизводственное) потребление .

Производственное потребление продукта во всех отраслях равно

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} Y_j .$$

Для внепроизводственного потребления поэтому останется

$$Y_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} Y_j , \quad i = 1, \ldots, n \ .$$

Если приравнять спрос потребителей b_i найденному выше чистому выпуску, то получим систему уравнений межотраслевого баланса В. Леонтьева.

$$Y_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} Y_j = b_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Конечный спрос b_i состоит из конечного потребления, экспорта и инвестиций. Однако в самой модели эти величины мыслятся как экзогенно заданные.

Сущность модели Леонтьева состоит в определении валового выпуска отраслей по заданному экзогенно конечному спросу b_i и данных о технологических возможностях отраслей производства, которые задаются технологическими коэффициентами a_{ij}.

Конечно, с помощью уравнений Леонтьева можно решить и обратную задачу: по заданным значениям валового выпуска найти объемы конечного спроса на каждый продукт.

Перейдем к матричной записи системы Уравнений Леонтьева. Обозначим буквой **A** матрицу технологических коэффициентов , буквой **I** – единичную матрицу и введем вектор – строки **Y** и **b** для обозначения объема производства и спроса. Тогда модель может быть записана в матричной форме

$$(\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{Y}=\mathbf{b}.$$

Решение уравнения этого уравнения относительно объема выпуска продукции возможно, если существует обратная матрица

$$(\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}.$$

Модель Леонтьева продуктивна тогда и только тогда, когда неразложимая матрица технологических коэффициентов **A** имеет наибольшее собственное значение $\lambda < 1$. Хотя доказательство теоремы несложно, здесь мы его опустим, поскольку оно не имеет простой экономической интерпретации .

Эта теорема позволяет проверять модель Леонтьева на продуктивность, однако ее формулировка не поддается прямой экономической интерпретации.

Более практичным является следующее достаточное условие продуктивности модели Леонтьева, которое является следствием упомянутой выше теоремы. Если технологическая матрица неразложима, и сумма элементов каждой строки технологической матрицы

$$r_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \le 1$$

и хотя бы для одной строки

$$r_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} < 1$$

то модель Леонтьева продуктивна.

Экономическая интерпретация этих условий очевидна. Поскольку матричные элементы a_{ij} интерпретируются как необходимое количество продукции отрасли i для производства единицы товара отрасли j, то величина r_i представляет собой суммарное потребление продукции отрасли i в производственном секторе, если все $Y_j = 1$.

Для того, чтобы экономика была продуктивной отрасли не должны потреблять больше продукции, чем они производят.

Еще раз подчеркнем, что приведенное выше условие является достаточным, а не необходимым. Поэтому система уравнений Леонтьева может оказаться продуктивной, если приведенное выше достаточное условие и не выполняется.

Пример

В рамках линейной модели многоотраслевой экономики (модели Леонтьева) матрица технологических коэффициентов имеет вид

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0 & 0{,}6 \\ 0{,}2 & 0{,}7 & 0 \\ 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}3 \end{pmatrix}$$

Необходимый объем непроизводственного потребления известен и задан вектором – строкой **b** =(5, 4, 3). Определить:

а) является ли предлагаемая модель продуктивной;

б) каким должен быть выпуск отраслей производства для удовлетворения конечного спроса?

Решение

Поскольку сумма чисел каждой из строк технологической матрицы меньше единицы и матрица неразложима, то на основании следствия приведенной выше теоремы заключаем, что модель продуктивна.

Необходимый объем выпуска продукции найдем, решив матричное уравнение

$$\mathbf{Y} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{b}$$

Обратную матрицу проще всего найти, используя встроенную функцию МОБР() электронных таблиц Excel, которая для невырожденной матрицы возвращает элементы обратной матрицы. В нашем случае получаем обратную матрицу

$$(\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}=\mathbf{Z}=\begin{pmatrix} 2{,}26 & 1{,}29 & 1{,}94 \\ 1{,}51 & 4{,}19 & 1{,}29 \\ 1{,}72 & 1{,}94 & 2{,}90 \end{pmatrix}$$

Смысл коэффициентов этой матрицы состоит в том, что каждый ее коэффициент показывает сколько нужно произвести единиц i – го продукта на единицу j – го конечного продукта. Например,

$$Y_1 = z_{11}\cdot b_1 + z_{22}\cdot b_2 + \ldots + z_{1n}\cdot b_n.$$

Необходимый объем производства отраслей получается умножением матрицы **Z** на вектор столбец **b** . Производя вычисления с помощью электронных таблиц Excel, получаем искомый результат: **Y** = (22,26, 28,17, 25,05) .

Таблица и тождества межотраслевого баланса

При практическом использовании модели Леонтьева важно знать также объем межотраслевых поставок и величину добавленной стоимости, производимой отраслями экономики. Если вектор необходимых объемов производства в отраслях экономики **Y** уже найден, то матрица объема межотраслевых поставок (потоков) **X** может быть найдена простым умножением 1

$$x_{ij} = a_{ij} \cdot Y_j .$$

Коэффициенты x_{ij} равны количеству продукции (в стоимостном выражении), которое отрасль i должна направить в отрасль j для производства в этой отрасли Y_j единиц продукции.

Простой экономический смысл имеет и сумма элементов каждого из столбцов матрицы межотраслевых поставок. Рассмотрим, например, столбец j и найдем сумму его элементов

$$X_j = \sum_{i=1}^{n} x_{ij}$$

Очевидно, что величина X_j равна сумме затрат отраслей производства для обеспечения валового выпуска продукции в отрасли j .

Найдем добавленную D_j. (вновь созданную) стоимость отрасли j

Если из объема продукции (в стоимостном выражении) отрасли Y_j вычесть затраты отраслей производства X_j , то полученная величина и будет определять добавленную стоимость D_j . Подставляя в это выражение в предыдущие формулы получаем

$$D_j = Y_j - X_j = \left(1 - \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\right) \cdot Y_j;$$

При анализе информации о реальном объекте экономике в модели Леонтьева очень полезна табличная форма представления результатов.

Межотраслевой баланс в модели Леонтьева

отрасль j / отрасль i		Отрасль как потребитель			Конечн. спрос	Валов. выпуск
		1	…	*n*	$\mathbf{b}$	$\mathbf{Y}$
Отрасль как производитель	1	x_{11}	$\cdots$	x_{1n}	b_1	Y_1
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	n	x_{n1}	$\cdots$	x_{nn}	b_n	Y_n
Добавленная стоимость		D_1	$\cdots$	D_n		
Валовой выпуск		Y_1	$\cdots$	Y_n		

Размещенные в таблице данные должны удовлетворять нескольким очевидным соотношениям. В каждой строке для отраслей производителей должно выполняться условие

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} + b_i = Y_i$$ (баланс выпуска).

Для столбцов отраслей как потребителей должны выполняться условия

$$D_j = Y_j - \sum_{i=1}^{n} x_{ij}$$ (баланс затрат).

Найдем из последнего уравнения величину Y_i

$$Y_i = D_i + \sum_{k=1}^{1} x_{ki}$$

и приравняем ее значению Y_i , найденному из уравнения баланса выпуска

$$D_i + \sum_{k=1}^{1} x_{ki} = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

Если в последнем уравнении произвести суммирование по , то суммы, стоящие в левой и правой частях этого уравнения, окажутся одинаковыми, и их можно будет сократить.

В итоге получаем еще одно тождество

$$\sum_{i=1}^{n} D_i = \sum_{i=1}^{n} b_i \,,$$

которое имеет очевидный экономический смысл: общая сумма добавленных стоимостей равна суммарному конечному спросу.