Лекция 7.
Счетные множества

Счетные множества

возможно доказать равномощность

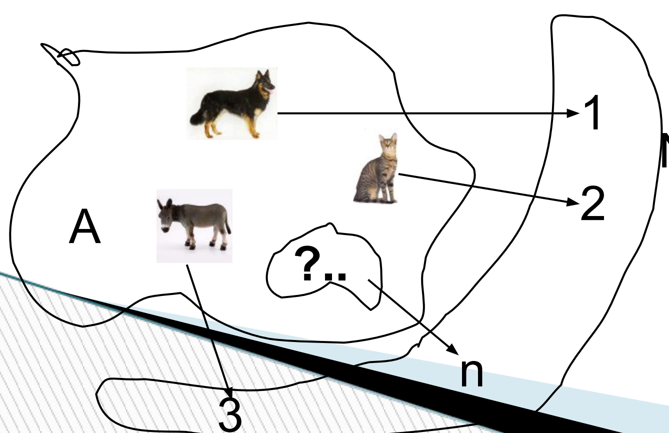
произвольное множество А — натуральные числа N

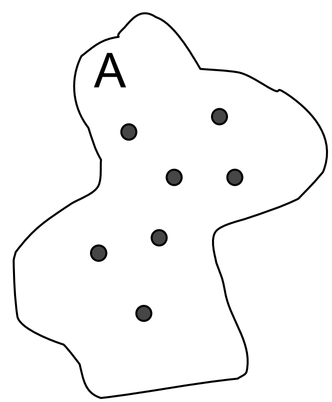
Множество А – счетно-бесконечное множество

Способы доказательства

способ, позволяющий поставить в соответствие каждому элементу рассматриваемого множества А какое-то натуральное число из множества N

методика оценки кардинального числа множества А сверху и снизу, что может позволить точно вычислить реальное значение мощности исследуемого множества А





$$\left.\begin{aligned} |A| &\le \aleph_0 \\ |A| &\ge \aleph_0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow |A| = \aleph_0$$

Множество целых чисел

<u>Множество целых чисел</u> *– множество, состоящее из натуральных чисел, числа ноль и чисел, построенных на основе натуральных только со знаком «минус» (отрицательных чисел).*

<u>Теорема</u>

Множество целых чисел счетно и эффективно перечислимо.

Доказательство

- Ряд целых чисел: -n, …, -3,-2,-1,0,1,2,3,…, n,…
- Будем обозначать множество целых чисел буквой Z. Расположим целые числа следующим образом:

0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, …., n, -n, …

- Тогда каждому числу можно поставить в соответствие натуральное число

0,	1,	-1,	2,	-2,	3,	….,	n,	-n, …
1,	2,	3,	4,	5,	6,	….,	2n,	2n+1, …

- Таким образом доказано, что множество Z равномощно множеству N, а значит оно ***счетно*.**

Доказательство

- Для доказательства эффективной перечислимости множества Z необходимо установить тот факт, что все элементы множества Z могут быть перебраны по алгоритму и должны получить в результате такого перебора порядковые номера, без пропусков и повторений.

- Факт ***эффективной перечислимости*** множества Z напрямую следует из приведенного способа нумерации элементов натуральными числами. Итак, множество Z счетно и эффективно перечислимо, **Q.E.D.**

Следствие

- Если оперировать трансфинитными числами, получим:

$$_0\aleph_0 = \aleph 1 +_0 + \aleph$$

Множество упорядоченных пар натуральных чисел

Два элемента a и b называют ***упорядоченной парой****, если указано, какой их этих элементов первый, а какой второй и при этом* $((a,b)=(c,d)) \Leftrightarrow (a=c) \wedge (b=d)$. *Упорядоченную пару элементов обозначают (a,b).*

Теорема

- **Множество упорядоченных пар натуральных чисел счетно и эффективно перечислимо.**

Доказательство

- Обычно, употребляя термин «упорядоченная» пара считают, что допустим пара (1,5) и пара (5,1) имеют разный смысл и рассматриваются как различные. Чтобы установить взаимно-однозначное соответствие между упорядоченными парами натуральных чисел и натуральными числами, достаточно расположить пары (p,q) в таблицу так, что (p,q) находится в p-ой строке и в q-ом столбце.

(1,1) (1,2) (1,3) ...
(2,1) (2,2) (2,3) …
… … …

- Затем указанные пары перечисляются диагональным методом, начиная с левого верхнего угла. Последовательность обхода матрицы по сути может быть любой.

Например, можно расположить пары в последовательность по возрастающей сумме p + q, а при равной сумме – по возрастанию p. Получим ряд:

n	1	2	3	4	5	6	…
(p,q)	(1,1)	(1,2)	(2,1)	(1,3)	(2,2)	(3,1)	…

- Таким образом доказано, что множество упорядоченных пар натуральных чисел равномощно множеству N, а значит, оно ***счетно***.

- Факт ***эффективной перечислимости*** множества упорядоченных пар натуральных чисел независимо от конкретной трактовки термина «упорядоченный» представляется вполне очевидным. В первом случае он напрямую следует из приведенного способа нумерации элементов натуральными числами. Во втором случае к предложенному алгоритму перечисления необходимо добавить процедуру проверки соотношения между элементами p и q, и если, например, $p \le q$, то присваивать очередной номер этой паре, а в противном случае пропускать её. Итак, множество упорядоченных пар натуральных чисел счетно и эффективно перечислимо, **Q.E.D.**

Следствие

- Если оперировать трансфинитными числами, то получим что

$${}_0\aleph_0 = \aleph_0 \bullet \aleph$$

Множество упорядоченных n-ок натуральных чисел

Упорядоченная n-ка натуральных чисел *– это набор из n элементов вида (m_1, m_2, …, m_n), где m_i – натуральное число.*

Теорема

- **Множество упорядоченных n-ок натуральных чисел счетно и эффективно перечислимо.**

Доказательство

- Чтобы установить взаимно-однозначное соответствие между упорядоченными n-ками натуральных чисел и натуральными числами, достаточно расположить разложить n-ку вида $(m_1, m_2, m_3,\ldots,m_n)$ следующим образом:

$$(m_1, m_2, m_3,\ldots,m_n) = (m_1, (m_2, m_3,\ldots,m_n)) = (m_1, (m_2, (m_3,\ldots,m_n))) = \ldots=(m_1, (m_2, (m_3, (\ldots(m_{n-1},m_n)))))$$

- Расположив по горизонтали таблицы пары натуральных чисел, а по вертикали – натуральные числа, диагональным методом получим нумерацию троек натуральных чисел.

Доказательство

- Далее по горизонтали таблицы располагаются тройки натуральных чисел, а по вертикали – натуральные числа, диагональным методом получаем нумерацию четверок натуральных чисел и т.д.
- Таким образом доказано, что множество n-ок натуральных чисел равномощно множеству N, а значит оно ***счетно***.
- Факт ***эффективной перечислимости*** множества напрямую следует из приведенного способа нумерации элементов натуральными числами. Итак, множество упорядоченных n-ок натуральных чисел счетно и эффективно перечислимо, **Q.E.D.**

Следствие

- Если оперировать понятием кардинального числа (мощности), то получим, что произведенное n раз (n - натуральное число) умножение первого трансфинитного числа само на себя не изменяет его значения

$$ {}_0\aleph_0 = \aleph_0 \bullet \ldots \bullet \aleph_0 \bullet \aleph $$

или $ {}_0\aleph^{n} = {}_0\aleph $

Множество конечных комплексов натуральных чисел

Конечные комплексы натуральных чисел *- это элементы вида* (p_1), (p_1, p_2), (p_1, p_2, p_3), …, $(p_1, p_2, \ldots, p_k)$, *где* k *и* p_i *пробегают все натуральные числа.*

<u>Теорема</u>

- **Множество конечных комплексов натуральных чисел счетно и эффективно перечислимо.**

Доказательство

- Чтобы установить взаимно-однозначное соответствие между конечными комплексами натуральных чисел и натуральными числами, можно использовать двоичное разложение вида:

$n=2\wedge(p_1-1) + 2\wedge(p_1+p_2-1)+ \dots +2\wedge(p_1+p_2+ \dots +p_k -1)$,
где ^ - значочок степени.

- Например, в двоичном коде 27 = 11011=

$=1\cdot 2^0 + 1\cdot 2^1 +0\cdot 2^2 +1\cdot 2^3 +1\cdot 2^4 = 2^0 + 2^1 +2^3 +2^4$,
откуда получим:

$p_1-1 = 0 \Rightarrow p_1=1$ $p_1+ p_2 -1 = 1 \Rightarrow p_1+ p_2 =2$, а т.к. $p_1=1$ то $\Rightarrow p_2=1$

$p_1+ p_2 + p_3 -1 = 3 \Rightarrow p_1+ p_2 + p_3 = 4$ ....$\Rightarrow p_3 =2$

$p_1+ p_2 + p_3 + p_4 -1 = 4$ ....$\Rightarrow p_4 =1$

- Итак, натуральное число 27 является
- кодом комплекса (1,1,2,1).

Доказательство

В свою очередь при разложении вида
$n=2^{\wedge}(p_1-1) + 2^{\wedge}(p_1+p_2-1)+ \ldots +2^{\wedge}(p_1+p_2+ \ldots +p_k -1)$
комплексу (2,1,1,1) соответствует следующий код:

$p_1-1 = 2 -1 = 1$

$p_1+ p_2 -1 = 2 + 1 – 1 = 2$

$p_1+ p_2 + p_3 -1 = 2 + 1 + 1 - 1 = 3$

$p_1+ p_2 + p_3 + p_4 -1 = 2 + 1 + 1 + 1 – 1 = 4$

В итоге число $n = 0 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^4 =$
$=11110$ (в двоичном коде) или
$2 + 4 + 8 + 16 = 30$ (в десятичном коде).

Таким образом, комплексу (2,1,1,1) соответствует натуральное число 30.

Доказательство

- В результате доказано, что множество конечных комплексов натуральных чисел равномощно множеству N, а значит оно *счетно*.

- Факт *эффективной перечислимости* множества напрямую следует из приведенного способа нумерации элементов натуральными числами. Итак, множество конечных комплексов натуральных чисел счетно и эффективно перечислимо, **Q.E.D**.

- Если оперировать трансфинитными числами, то получим:

$${}_0\aleph_0 + \ldots + {}^3\aleph_0 + {}^2\aleph_0 + \aleph^k = \sum_{i=1}^{k} {}_0\aleph^k = \sum_{i=1}^{k} {}_0\aleph_0 = \aleph k = {}_0\aleph$$

Множество рациональных чисел

Рациональное число – *число вида* $q = \dfrac{n}{m}$ *, где*

n – целое число, m – натуральное число.

<u>Теорема</u>

- **Множество рациональных чисел счетно и эффективно перечислимо.**

Доказательство

- Обозначим множество рациональных чисел Q.
- Рассмотрим сначала положительные рациональные числа – множество Q+. Определим положительное рациональное число как $q=n/m$, где n и m – натуральные числа.
- Запишем их в виде бесконечной матрицы, строки и столбцы которой пронумерованы натуральными числами начиная с 1. Элемент, стоящий на пересечении i-ой строки и j-ого столбца, получит наименование q_{ij}
- Используя диагональный метод, перечислим их (пронумеруем натуральными числами):

Доказательство

	1	2	3	4	
1	q_{11}	q_{12}	q_{13}	q_{14}	…
2	q_{21}	q_{22}	q_{23}	q_{24}	…
3	q_{31}	q_{32}	q_{33}	q_{34}	…
………………………………………					
n	q_{n1}	q_{n2}………………………			
………………………………………					

q_{11} q_{21} q_{12} q_{13} q_{22} q_{31} q_{41} q_{32} q_{23} q_{14} q_{15} q_{24} q_{33}

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Доказательство

- Все (и положительные, и отрицательные) рациональные числа в совокупности перечисляются по аналогии с целыми числами, путем чередования положительной дроби и её отрицательного аналога. *При этом некоторые рациональные числа мы нумеруем по нескольку раз: например, 1 будет пронумерована как 1/1, 2/2, и т. д., а например 4/5 как 8/10, 12/15 и т.д.*

- Т.о. показано, что множество рациональных чисел не превосходит по мощности множество натуральных чисел, |Q|≤|N|, т.к. каждое рациональное число получит соответствующий номер, а если быть точным – то даже несколько номеров. С другой стороны то, что множество натуральных чисел не превосходит по мощности множество рациональных чисел очевидно, |N|≤|Q| (хотя бы потому, что оно является его подмножеством). Т.о. доказано, что множество рациональных чисел равномощно множеству натуральных чисел |Q|=|N| = À0, а значит оно ***счетно***.

Доказательство

- Факт ***эффективной перечислимости*** множества Q напрямую следует из приведенного способа нумерации элементов натуральными числами. В ходе этой нумерации каждое рациональное число получает соответствующий номер, и если к алгоритму добавить процедуру, проверяющую дробь на предмет сокращаемости (если числитель и знаменатель имеют общие делители) и исключающую из нумерации сокращаемые дроби, то мы в чистом виде получим перечисление рациональных чисел по алгоритму без пропусков и повторений, что совпадает с определением эффективной перечислимости.

Итак, множество рациональных чисел счетно и эффективно перечислимо, **Q.E.D.**

Действительные алгебраические числа

Алгебраическое действительное число *– действительный корень алгебраического уравнения ненулевой степени с рациональными коэффициентами.*

Общий вид такого уравнения для одной переменной:
$a_0+a_1\cdot x^1+a_2\cdot x^2+\ldots+a_n\cdot x^n=0$,
где a_0, a_1,… – рациональные коэффициенты.

<u>Теорема</u>

- **Множество алгебраических чисел счетно и эффективно перечислимо.**

Доказательство

Предложим процедуру нумерации всех алгебраических чисел числами натурального ряда. При этом каждое число будем задавать через образующее его алгебраическое уравнение:

- для линейных уравнений будем иметь упорядоченные пары рациональных чисел
- для квадратных уравнений – тройки,

в общем случае получаем

- упорядоченную n-ку рациональных чисел:

$(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$ для каждого i-ого алгебраического уравнения (n-1)-ой степени.

Располагать элементы будем в двусторонне бесконечной матрице.

Доказательство

- Выпишем на **первой строке** будущей матрицы все упорядоченные пары рациональных чисел.

- *Это возможно, т.к. пары рациональных чисел эффективно перечислимы (рациональные числа эффективно перечисляются, их можно записать в матрицу и перечислить пары чисел диагональным способом).* Такие пары рациональных чисел соответствуют линейным уравнениям и имеют по одному корню.

- Т.о. каждая пара однозначно определяет корень линейного уравнения.

Доказательство

- На **второй строке** выпишем все упорядоченные тройки рациональных чисел.
- *Это возможно, т.к. тройки рациональных чисел эффективно перечислимы (рациональные числа эффективно перечисляются, их пары тоже эффективно перечисляются, значит можно записать в матрицу по строкам пары, по столбцам числа и перечислить тройки чисел диагональным способом)*.
- Такие тройки соответствуют квадратным уравнениям и имеют максимум по два корня: таким образом, в процессе формирования матрицы каждую тройку рациональных чисел нужно будет повторить два раза для обеспечения процесса получения соответствующего номера для двух чисел, являющихся решением каждого уравнения.

Доказательство

- На **третьей строке** – по три числа на каждое кубическое уравнение соотв. упорядоченным четверкам и т.д.

- Т.о. получим матрицу, которую можно обойти при помощи диагонального процесса Кантора.

- Если часть корней алгебраического уравнения комплексная, при нумерации их просто пропускаем.

- Т.о. каждое алгебраическое число получит соответствующий номер, и это подтверждает тот факт, что множество алгебраических действительных чисел ***счетно***.

Доказательство

- Факт ***эффективной перечислимости*** множества А напрямую следует из приведенного способа нумерации элементов натуральными числами, т.к. попутно указана эффективная процедура нумерации наборов рациональных чисел, однозначно задающих алгебраические уравнения соответствующей степени.

- При этом важно то, что алгебраическое уравнение n-ой степени имеет эффективный алгоритм решения, т.о. процедура полностью эффективна.

- Итак, множество алгебраических действительных чисел счетно и эффективно перечислимо, **Q.E.D.**

Счетные числовые множества: обобщение

Теорема (без доказательства)

- **Множество элементов, которые можно представить с помощью конечного числа счетной системы знаков, счетно.**

Счетно-бесконечными являются, например:

- множество «слов», которое *можно составить* при помощи конечного алфавита («слово» здесь - комплекс букв, не важно имеющих смысл или нет),
- множество всех книг, которые *можно написать* на любом или даже на всех языках,
- множество всех симфоний, которые *можно сочинить* и т.д.