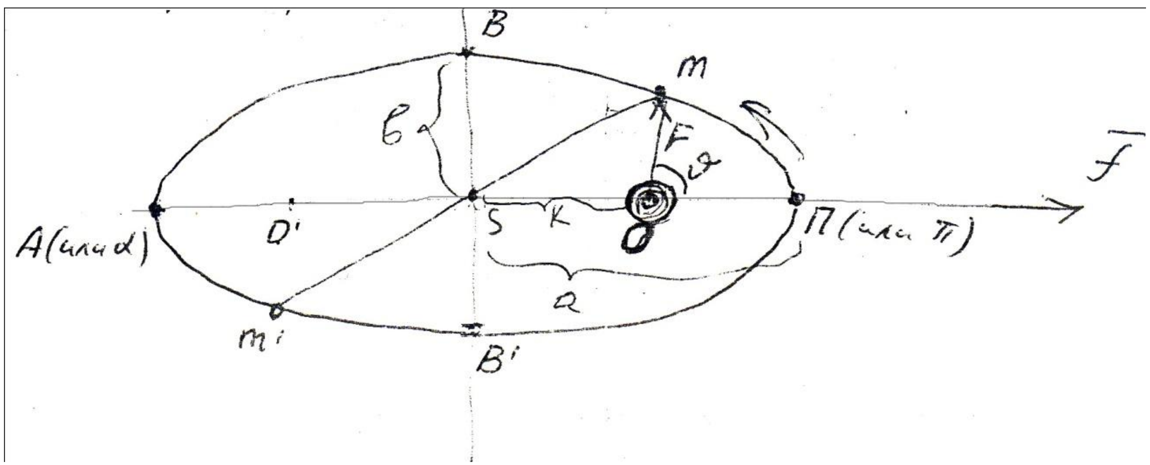
ЛЕКЦИЯ 7

8. Эллиптическое движение.

$0 < e < 1$ и $\theta_0 \neq 0$



AS = a – большая полуось

SB = b – малая полуось, перпендикулярна большой полуоси

S0 = k – фокальное расстояние

1) e=0 – круговая орбита;

2) при e→1 $\dfrac{r_а}{r_п} = \dfrac{1+e}{1-e} \to \infty$тся параболой.

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\vartheta} \qquad (31)$$

при $\vartheta = 0$

$$r = r_{\text{п}} = r_{min} = \frac{p}{1+e} \qquad V = V_{\text{п}} = V_{max} = \sqrt{\frac{\mu}{p}}(1+e)$$

при $\vartheta = 180°$

$$r = r_{\text{А}} = r_{max} = \frac{p}{1-e} \qquad V = V_{\text{А}} = V_{min} = \sqrt{\frac{\mu}{p}}(1-e)$$

Форма и размер орбиты определяются параметрами *p* и *e*.

Можно и любыми другими двумя r_n, r_A, *c, f, H, a, b, k*

$$a = \frac{p}{1-e^2}; \quad b = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}} \quad k^2 = a^2 - b^2; \quad b = a\sqrt{1-e^2} \quad p = a(1-e^2);$$

$$a = \frac{\text{r}_{\text{п}} + \text{r}_{\text{А}}}{2}; \quad e = \frac{r_A - r_П}{2a}; \quad e = \frac{k}{a}; \quad p = \frac{b^2}{a}$$

$$\lim_{e\to 1}\frac{r_A}{r_\Pi}=\lim_{e\to 1}\frac{1+e}{1-e}=\infty$$

Составим теперь выражения, специфичные для эллиптической орбиты.

$$V_r=\sqrt{\frac{\mu}{p}}\cdot e\sin\vartheta \qquad V_n=\sqrt{\frac{\mu}{p}}\cdot(1+e\cos\vartheta) \qquad V^2=V_r^2+V_n^2$$

$$V^2=\frac{\mu}{p}[e^2 sin^2\vartheta+(1+e\cos\vartheta)^2]=$$

$$=\frac{\mu}{p}[e^2 sin^2\vartheta+1+2e\cos\vartheta+e^2 cos^2\vartheta]=$$

$$=\frac{\mu}{p}[e^2(sin^2\vartheta+cos^2\vartheta)+1+2e\cos\vartheta]=$$

$$=\frac{\mu}{p}[e^2+1+2e\cos\vartheta]=$$

$$=\frac{2\mu}{p}[1+e\cos\vartheta]+\frac{\mu}{p}[e^2-1]$$

так как $r = \frac{p}{1 + e\cos\vartheta}$ $a = \frac{p}{1 - e^2}$

$$V^2 = \frac{2\mu}{r} - \frac{\mu}{a},$$

$$tg\theta = \frac{V_r}{V_n} = \frac{e\sin\vartheta}{1 + e\cos\vartheta}$$

С учетом (31) $1 + e\cos\vartheta = \frac{p}{r}$

$$tg\theta = \frac{r}{p} e\sin\vartheta \quad (*)$$

качественный анализ движения:

- ***скорость полета убывает при удалении КЛА от притягивающего центра (при изменении ΰ от 0 до π) до минимума, а затем возрастает с уменьшением r.***

$$V_п = \sqrt{\frac{\mu}{p}}(1+e) \qquad V_а = \sqrt{\frac{\mu}{p}}(1-e)$$

С учетом $p = a(1-e^2)$;

$$V_п = \sqrt{\frac{\mu(1+e)^2}{a(1-e^2)}} = \sqrt{\frac{\mu(1+e)}{a(1-e)}} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}\cdot\frac{\mu}{a}}$$

$$V_а = \sqrt{\frac{\mu(1-e)^2}{a(1-e^2)}} = \sqrt{\frac{\mu(1-e)}{a(1+e)}} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}\cdot\frac{\mu}{a}}$$

Полагая, что $V_{кр} = \sqrt{\frac{\mu}{a}}$ *- круговая скорость, соответствующая радиусу r = a*

$$V_п = V_{кр}\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \qquad V_а = V_{кр}\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}$$

Введя обозначения

$$W_П = \sqrt{\frac{\mu}{r_П}}; \qquad W_A = \sqrt{\frac{\mu}{r_A}}$$

- *круговые скорости в перигее и апогее орбиты, соответственно*

$$r_а = a(1+e) \qquad r_п = a(1-e)$$

$$V_п = W_п\sqrt{1+e} \qquad V_а = W_а\sqrt{1-e}$$

Перепишем выражение для квадрата скорости

$$V^2 = \frac{2\mu}{r} - \frac{\mu}{a},$$

$$V^2 = \frac{\mu}{r} + \frac{\mu}{r} - \frac{\mu}{a} = \frac{\mu}{r} + \mu\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a}\right) = W^2 + \mu\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a}\right)$$

$w = \sqrt{\frac{\mu}{r}}$ - круговая скорость в рассматриваемой (любой конкретной) точке орбиты с радиус-вектором r

Имеем $V^2 = W^2 + \Delta V^2$

- на участке В'ПВ орбиты r < a, то можно отметить, что V > W.
- на участке В'АВ имеем r > a и, следовательно, V < W, так как в (**)

$$V^2 = W^2 - \Delta V^2$$

Таким образом, малая полуось ВВ' делит эллиптическую орбиту на две равные части:

- **<u>первая</u>** - ВП В' - расположена близко к перицентру и характеризуется неравенствами: r < a, V > W.
- **<u>вторая</u>** - ВА В' – расположена ближе к апоцентру и характеризуется неравенствами: r > a, V < W.

Наклон вектора скорости к горизонту

$\theta_л = \theta_А = 0$

$$tg\theta = \frac{e \sin\vartheta}{1 + e\cos\vartheta}$$

$$\frac{d(tg\theta)}{d(\vartheta)} = \frac{U'V - UV'}{V^2} = \frac{e\cos\vartheta\,(1 + e\cos\vartheta) - e\sin\vartheta\,(-e\sin\vartheta)}{(1 + e\cos\vartheta)^2} =$$

$$= \frac{e\cos\vartheta + e^2 cos^2\vartheta + e^2 sin^2\vartheta}{(1 + e\cos\vartheta)^2} = \frac{\cos\vartheta + e}{(1 + e\cos\vartheta)^2} \cdot e$$

$$\frac{d(tg\theta)}{d\vartheta} = \frac{\cos\vartheta + e}{(1 + e\cos\vartheta)^2} e = 0,$$

или

$$\cos\vartheta = -e$$

отсюда

max θ = arcsin e;   min θ = - arcsin e

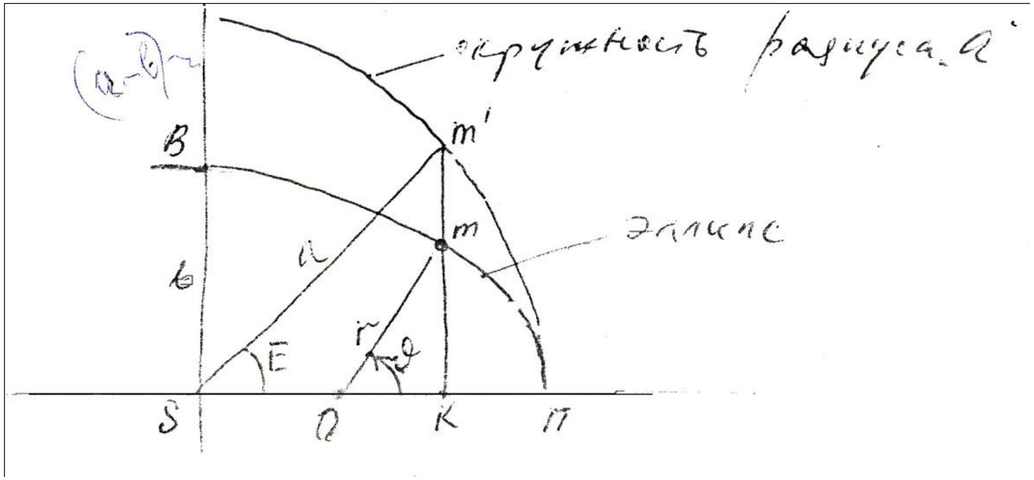
Определим все через время

$$p^2 \int_0^{\vartheta} \frac{d\vartheta}{(1 + e\cos\vartheta)^2} = c \cdot (t - \tau) \qquad c^2 = p\mu$$

$$\int_0^{\vartheta} \frac{d\vartheta}{(1 + e\cos\vartheta)^2} = \frac{\sqrt{\mu}}{p^{3/2}}(t - \tau)$$

$$t = t(\vartheta)$$

от **<u>истинной аномалии</u>** перейдём к так называемой **<u>эксцентрической аномалии E</u>**



Свяжем величины Е и ϑ

$$e = \frac{r_A - r_П}{2a} \qquad b = a\sqrt{1-e^2} \qquad \frac{mk}{m'k} = \frac{b}{a}$$

$$r\cos\vartheta = Ok = a\cos E - OS$$

$$OS = a - r_{\text{п}} = a - \frac{p}{1+e} = a - \frac{a(1-e^2)}{1+e} = a - a(1-e) = ae$$

$$r\cos\vartheta = a\cos E - ae = a(\cos E - e)$$

$$r\sin\vartheta = mk = \frac{b}{a}m'k = a\sqrt{1-e^2}\sin E$$

$$r = a\cdot(1 - e\cos E) \qquad (3)$$

уравнением орбиты, записанное через E

$$r(1+\cos\vartheta) = a(1-e)(1+\cos E);$$

$$r(1-\cos\vartheta) = a(1+e)(1-\cos E);$$

$$tg\frac{E}{2} = tg\frac{\vartheta}{2}\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}; \qquad (4)$$

Соотношение (4) и есть связь между аномалиями E и ϑ

найдём связь E и t

$$1+e\cos\vartheta = \frac{1-e^2}{1-e\cos E}, \qquad (5)$$

$$d\vartheta = \frac{\sqrt{1-e^2}}{1-e\cos E}dE \qquad (6)$$

$$p = a\cdot(1-e^2)$$

$$\int_0^E (1-e\cos E)dE = \frac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2}}(t-\tau)$$

$$E - e\sin E = \frac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2}}(t-\tau) \qquad (7)$$

$\frac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2}} = n$ n(t - τ) = M nT=360º или n=360º/T

$$E - e\sin E = M \qquad (8)$$

- Действительно, М возрастает пропорционально времени и равно нулю при t=τ, то есть когда КЛА находится в перицентре (ύ=Е=0).
- При t=τ+1/2Т (в апоцентре) М=180º (ύ=Е=М).
- В конце полного оборота М=360º (ύ=Е=М).

Прямая задача: ***определить время t, соответствующее любой заданной точке орбиты (характеризуемой углами Е и ϑ)***.

<u>Замечание</u>: при вычислении величины Е по (4) следует иметь в виду, что углы $\frac{E}{2}$ и $\frac{\vartheta}{2}$ всегда находятся в одной четверти. Кроме того, в перицентре и апоцентре орбиты ϑ (то есть при , где k – целое произвольное число) E –

- При полёте от П к А $0 < \vartheta < \pi \qquad E < \vartheta$
- а при полёте от А к П $\pi < \vartheta < 2\pi \qquad E > \vartheta$

Обратная задача – ***определение положения КЛА по заданному времени t***

$$E - e\sin E = n(t - \tau) = M$$

$$E_n = M - e\sin E_{n-1}$$

период обращения *T* КЛА

$$E - e\sin E = n(t-\tau) = M$$

$$2\pi - e\sin 2\pi = nT,$$

$$T = \frac{2\pi}{n} = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}a^{3/2} \qquad (9)$$

$n = \frac{2\pi}{T}$ - *средняя угловая скорость движения* ЛА или *среднее движение*

$$T = \frac{360^\circ}{n} = \frac{2\pi}{n} = 2\pi\frac{a^{3/2}}{\sqrt{\mu}}; \qquad (9')$$