

СИМПЛЕКСНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ. ТРАНСПОРТНА ЗАДАЧА.

к.е.н., доцент Тимошевський В.В.

Графічний метод для визначення оптимального плану задачі лінійного програмування доцільно застосовувати лише для задач із двома змінними.

За більшої кількості змінних вдаються до загального методу розв'язування задач лінійного програмування – так званого **симплекс-методу.**

Процес розв'язування задачі симплекс-методом має ітераційний характер: *обчислювальні процедури (ітерації) одного й того самого типу повторюються у певній послідовності доти, доки не буде отримано оптимальний план задачі або з'ясовано, що його не існує.*

Симплекс-метод – це поетапна обчислювальна процедура, в основу якої покладено принцип послідовного поліпшення значень цільової функції переходом від одного опорного плану задачі лінійного програмування до іншого.

Алгоритм розв'язування задачі лінійного програмування симплекс-методом складається з п'яти етапів:

1. Визначення початкового опорного плану задачі лінійного програмування.

2. Побудова симплексної таблиці.

3. Перевірка опорного плану на оптимальність.

4. Перехід до нового опорного плану задачі
(виконується визначенням розв'язувального елемента та розрахунком нової симплексної таблиці).

5. Повторення дій починаючи з п. 3.

Класична транспортна задача лінійного програмування формулюється так:

деякий однорідний продукт, що знаходиться у m постачальників A_i в обсягах $a_1, a_2 \dots a_m$ одиниць відповідно необхідно перевезти n споживачам B_j в обсягах $b_1, b_2 \dots b_n$ одиниць.

При цьому виконується умова, що загальний наявний обсяг продукції у постачальників дорівнює загальному попиту всіх споживачів.

Транспортна задача є типовою задачею лінійного програмування, отже, її розв'язок можна отримати звичайним симплексним методом.

Однак, у деяких випадках застосування універсальних алгоритмів є нераціональним.

Специфічна структура транспортної задачі дає змогу отримати альтернативний метод відшукування оптимального плану у вигляді простішої у порівнянні з симплексним методом обчислювальної процедури.

Транспортна задача належить до типу розподільчих задач лінійного програмування. Економічний зміст таких задач може стосуватися різноманітних проблем, що переважно зовсім не пов'язано із перевезенням вантажів, як, наприклад, задачі оптимального розміщення виробництва, складів,

Класична транспортна задача лінійного програмування формулюється так:

деякий однорідний продукт, що знаходиться у m постачальників A_i в обсягах $a_1, a_2 \dots a_m$ одиниць відповідно необхідно перевезти n споживачам B_j в обсягах $b_1, b_2 \dots b_n$ одиниць.

При цьому виконується умова, що загальний наявний обсяг продукції у постачальників дорівнює загальному попиту всіх споживачів.

Відомі вартості c_{ij} перевезень одиниці продукції від кожного A_i -го постачальника до кожного B_j -го споживача, що подані як елементи матриці виду:

$$c_{ij} = \begin{Bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{Bmatrix}$$

Необхідно визначити план перевезень, за якого вся продукція була б вивезена від постачальників, повністю задоволені потреби споживачів і загальна вартість всіх перевезень була б мінімальною. У такій постановці задачі ефективність плану перевезень визначається його вартістю і така задача має назву транспортної задачі за критерієм вартості перевезень.

При складенні проекту землеустрою агроформування велика рогата худоба була розташована по фермах наступним ЧИНОМ

Номера ферм	Види тварин	Поголів'я (гол.)	Потрібно грубих і соковитих кормів, кг
1.	Всього ВРХ у.т.ч. – корів	80 80	5400
2.	Всього ВРХ у.т.ч. – корів	80 80	5400
3.	Всього – ВРХ у т.ч. молодняк на дорощуванні і відгодівлі	280	14486
Всього			25286

Сівозміни що проектуються і дані про обсяги перевезень

Сівозміни, що проектуються	Обсяги перевезень грубих і соковитих кормів із сівозмін на ферми, кг
I польова	5374
II польова	5200
III польова	12749
I кормова	931
II кормова	486
III кормова	546
Всього	25286

Необхідно обґрунтувати закріплення сівозмін за фермам. Критерієм оптимальності є мінімальний обсяг перевезень т/км, як на ферми (грубі та соковиті корма), так і на сівозмінні масиви (органічні добрива).

Середні відстані від сівозмінних масивів до ферм, км

Сівозміни що проектуються	Ферма 1	Ферма 2	Ферма 3
I польова	3,6	1,5	6,7
II польова	2,1	4,4	4,6
III польова	4,9	5,6	1,8
I кормова	6,2	4,9	1,5
II кормова	1,1	5,4	6,8
III кормова	4,0	1,2	5,8

За умовою задачі необхідно вирішити питання щодо закріплення сівозмін за фермами, виходячи із двох взаємоспрямованих потоків вантажів: із сівозмін на ферми - корми, а із ферм на сівозміни - органічні добрива, тобто вирішити дві задачі.

На основі аналізу цих рішень дати пропозиції у відношенні закріплення сівозмін за фермами.

Вводимо умовні позначення: обсяги кормів, які перевозяться з відповідних сівозмін на ферми

x_{12} - обсяг кормів які перевозяться з першої кормової сівозміни на ферму 2.

$$\left. \begin{array}{l} x_{11} = x_{12} = x_{13} \\ x_{21} = x_{22} = x_{23} \\ x_{31} = x_{32} = x_{33} \\ x_{41} = x_{42} = x_{43} \\ x_{51} = x_{52} = x_{53} \\ x_{61} = x_{62} = x_{63} \end{array} \right\}$$

Обсяги виробництва кормів на відповідних сівозмінах: $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$

Потреба ферм в кормах позначимо відповідно

$B_1 = 5400$, $B_2 = 5400$ Т; $B_3 = 14486$

Коефіцієнтами цільової функції прийняти Середні відстані в км від відповідної сівозміни до визначеної ферми

c_{11}, c_{12}, c_{13}

c_{21}, c_{22}, c_{23}

c_{31}, c_{32}, c_{33}

c_{41}, c_{42}, c_{43}

c_{51}, c_{52}, c_{53}

c_{61}, c_{62}, c_{63}

c_{52} – відстань від другої кормової сівозміни до ферми 2 ($c_{52} = 5,4$ км).

**Враховуючи прийняті умовні позначення,
запишемо економіко-математичну модель задачі**
Знайти:

$$F \min = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + c_{13}x_{13} + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + c_{23}x_{23} + \\ c_{31}x_{31} + c_{32}x_{32} + c_{33}x_{33} + c_{41}x_{41} + c_{42}x_{42} + c_{43}x_{43} + c_{51}x_{51} + c_{52}x_{52} + \\ c_{53}x_{53} + c_{61}x_{61} + c_{62}x_{62} + c_{63}x_{63}$$

За умов:

1) по постачальникам

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = a_1 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = a_2 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} = a_3 \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} = a_4 \\ x_{51} + x_{52} + x_{53} = a_5 \\ x_{61} + x_{62} + x_{63} = a_6 \end{cases}$$

2) по
споживачам

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} + x_{61} = b_1 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} + x_{52} + x_{62} = b_2 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} + x_{53} + x_{63} = b_3 \end{cases}$$

4) умова невід'ємності
змінних

$$\begin{array}{lll} x_{11} \geq 0 & x_{12} \geq 0 & x_{13} \geq 0 \\ x_{21} \geq 0 & x_{22} \geq 0 & x_{23} \geq 0 \\ x_{31} \geq 0 & x_{32} \geq 0 & x_{33} \geq 0 \\ x_{41} \geq 0 & x_{42} \geq 0 & x_{43} \geq 0 \\ x_{51} \geq 0 & x_{52} \geq 0 & x_{53} \geq 0 \\ x_{61} \geq 0 & x_{62} \geq 0 & x_{63} \geq 0 \end{array}$$

В загальному вигляді задача запишеться:

$$\text{Знайти: } F \min = \sum_{i=1}^{m=6} \sum_{j=1}^{n=3} c_{ij} x_{ij}$$

за умов:

1) по постачальниках

$$\sum_{j=1}^{n=3} x_{ij} = a_i \quad / i = 1, 2, 3, 4, 5, 6 /$$

2) по споживачам

$$\sum_{i=1}^{m=6} x_{ij} = b_j \quad / j = 1, 2, 3 /$$

3) по закритості моделі задачі

$$\sum_{i=1}^{m=6} a_i = \sum_{j=1}^{n=3} b_j$$

4) умови невід'ємності перемінних:

$$x_{ij} \geq 0 \quad / i = 1, 2, 3, \dots, 6 / \quad / j = 1, 2, 3 /$$

Перший опорний план вантажоперевезень

№	Сівозміни що проектуються	Ферма 1	Ферма 2	Ферма 3	Обсяги виробництва кормів в сівозмінах
1	I польова	3,6	1,5	6,7	5374
2	II польова	2,1	4,4	4,6	5200
3	III польова	4,9	5,6	1,8	12749
4	I кормова	6,2	4,9	1,5	931
5	II кормова	1,1	5,4	6,8	486
6	III кормова	4,0	1,2	5,8	546
	Потреба ферм в кормах	5400	5400	14486	25286

рішення, найбільш простим з яких є метод **північно-західного кута.**

В даному методі запаси чергового по номеру постачальника використовуються для забезпечення запитів чергових по номеру споживача до тих пір, поки запаси не будуть вичерпані повністю, після чого використовуються запаси наступного за номером постачальника.

Заповнення таблиці транспортної задачі починається з лівого верхнього кута, тому і називається метод північно-західного кута.

Метод складається з ряду однотипних кроків, на кожному з яких, виходячи із запасів чергового постачальника і запитів чергового споживача, заповнюється тільки одна клітина і відповідно виключається з розгляду один постачальник або один споживач.

Заповнення таблиці починається з клітинки, розміщеної у верхньому лівому куті. В цю клітинку записуємо весь обсяг кормів одержаних в I польовій сівозміні, тому що для ферми I потрібно їх більше, ніж виробляється в I-й сівозміні. Отже ми запланували всі корми із I-ї польової сівозміни польової перевезти на ферму I. Отже, потреба ферми I ще не задоволена. Недостатні перші 26 т кормів беремо із II-ї польової сівозміни, а залишок кормів 5174 т з цієї сівозміни передаємо фермі 2. Остання частина потреби кормів ферми 2 (226 т) перекривається за рахунок III сівозміни. А залишок (12523 т) передається фермі 3. Недостатня частина кормів для ферми 3 повністю задовольняється за рахунок I, II, III кормових сівозмін. Отже умови задачі виконуються: з усіх сівозмін корми вивозяться повністю, потреби ферм задовольняються.

№	Сівозміни що проектується	Ферма 1	Ферма 2	Ферма 3	Обсяги виробництва кормів в сівозмінах
1	I польова	3,6 5374	1,5	6,7	5374
2	II польова	2,1 26	4,4 5174	4,6	5200
3	III польова	4,9	5,6 226	1,8 12523	12749
4	I кормова	6,2	4,9	1,5 931	931
5	II кормова	1,1	5,4	6,8 486	486
6	III кормова	4,0	1,2	5,8 546	546
	Потреба ферм в кормах	5400	5400	14486	25286

Перевіримо вірність отримання опорного рішення: число зайнятих клітинок в таблиці повинно бути

$$L = m + n - 1,$$

де m – число постачальників;

n – число споживачів

$$L = m + n - 1 = 6 + 3 - 1 = 8$$

8

№	Сівозміни що проєктуються	Ферма 1	Ферма 2	Ферма 3	Обсяги виробництва кормів в сівозмінах
1	I польова	5374			5374
2	II польова	26	5174		5200
3	III польова		226	12523	12749
4	I кормова			931	931
5	II кормова			931	486
6	III кормова			12523	546
	Потреба ферм в кормах	5400	5400	14486	25286

Значення цільової функції по першому опорному плану складає

$$F_{\min} = 3,6 \times 5374 + 2,1 \times 26 + 4,4 \times 5174 + 5,6 \times 226 + 1,8 \times 12523 + 1,5 \times 931 + 6,8 \times 486 + 5,8 \times 546 = 73841,7 \text{ (т/км)}.$$