

Проведите полное исследование и постройте график функции

$$f(x) = \frac{x^3 + 10x^2 + 28x + 24}{2x^2}$$

Исследование функции и построение графика

Порядок исследования функции

1. Область определения
2. Общие свойства (четность/нечетность/периодичность)
3. Непрерывность функции
4. Поведение функции на границах $D(f)$
5. Точки пересечения с осями ($x=0, y=?$; $y=0, x=?$)
6. Промежутки знакопостоянства функции
7. Первая производная
8. Критические точки
9. Исследование на монотонность и экстремумы
10. Исследование на выпуклость и вогнутость

Исследование функции и построение графика

Проведите полное исследование и постройте график функции

$$f(x) = \frac{x^3 + 10x^2 + 28x + 24}{2x^2}$$

1. D(f): $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

2. D(f) симметрична относительно (0;0)

$$f(-x) = \frac{(-x)^3 + 10(-x)^2 + 28(-x) + 24}{2(-x)^2} = \frac{-x^3 + 10x^2 - 28x + 24}{2x^2} \neq \begin{cases} f(x) \\ -f(x) \end{cases}$$

f(x) – функция общего вида, не периодическая

3. Функция непрерывна при $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$

4. Поведение функции на границах области определения

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +0} \frac{x^3 + 10x^2 + 28x + 24}{2x^2} &= \left[\frac{+const}{+0} \right] = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -0} \frac{x^3 + 10x^2 + 28x + 24}{2x^2} &= \left[\frac{+const}{+0} \right] = +\infty \end{aligned} \right\} \Rightarrow x=0 \text{ ур-е верт. ас-ты}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 10x^2 + 28x + 24}{2x^2} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 \left(1 + \frac{10}{x} + \frac{28}{x^2} + \frac{24}{x^3} \right)}{x^2 \cdot 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(1 + \frac{10}{x} + \frac{28}{x^2} + \frac{24}{x^3} \right)}{2} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 10x^2 + 28x + 24}{2x^2} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(1 + \frac{10}{x} + \frac{28}{x^2} + \frac{24}{x^3} \right)}{2} = -\infty \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{гор. ас-та отсутствует}$$

Порядок

1. D(f)
2. Свойства
3. Непрерывность
4. Асимптоты
5. $x=0, y=?; y=0, x=?$
6. $f(x)$ +/-
7. $f'(x)$ +/- \uparrow/\downarrow
8. Критич. точки
9. $f''(x)$ +/- \cup/\cap

Исследование функции и построение графика

4. Поведение функции на границах области определения

$x = 0$ *ур-е верт. ас-ты*
гор. ас-та отсутствует

$$k_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 10x^2 + 28x + 24}{2x^2 \cdot x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 \left(1 + \frac{10}{x} + \frac{28}{x^2} + \frac{24}{x^3}\right)}{x^3 \cdot 2} = \frac{1}{2}$$

$$b_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3 + 10x^2 + 28x + 24}{2x^2} - \frac{x}{2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(10 + \frac{28}{x} + \frac{24}{x^2}\right)}{x^2 \cdot 2} = 5$$

$$f(x) = \frac{x^3 + 10x^2 + 28x + 24}{2x^2} = \frac{x}{2} + 5 + \frac{14}{x} + \frac{12}{x^2} = kx + b + a(x)$$

$y = 0,5x + 5$ – уравнение наклонной асимптоты

$$f(x) = \frac{x^3 + 10x^2 + 28x + 24}{2x^2}$$

Порядок

1. D(f)
2. Свойства
3. Непрерывность
4. Асимптоты
5. $x=0, y=?; y=0, x=?$
6. $f(x) +/-$
7. $f'(x) +/- \uparrow/\downarrow$
8. Критич. точки
9. $f''(x) +/- \cup/\cap$

5. Точки пересечения с осями

$x \neq 0$. Нет точек пересечения с осью OY

$$y = 0$$

$$\begin{cases} x^3 + 10x^2 + 28x + 24 = 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

	1	10	28	24
Какие корни будем проверять?				
-2	1	8	12	0

$$x^2 + 8x + 12 = 0$$

$$\begin{cases} x_2 = -2 \\ x_3 = -6 \end{cases}$$

Точки пересечения с осями:

~~A(0; -2), B(0; -6)~~

A(-2; 0), B(-6; 0)

Исследование функции и построение графика

$$f(x) = \frac{x^3 + 10x^2 + 28x + 24}{2x^2}$$

$x = 0$ ур-е верт. ас-ты

$y = \frac{x}{2} + 5$ ур-е накл. ас-ты

$$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = +\infty$$

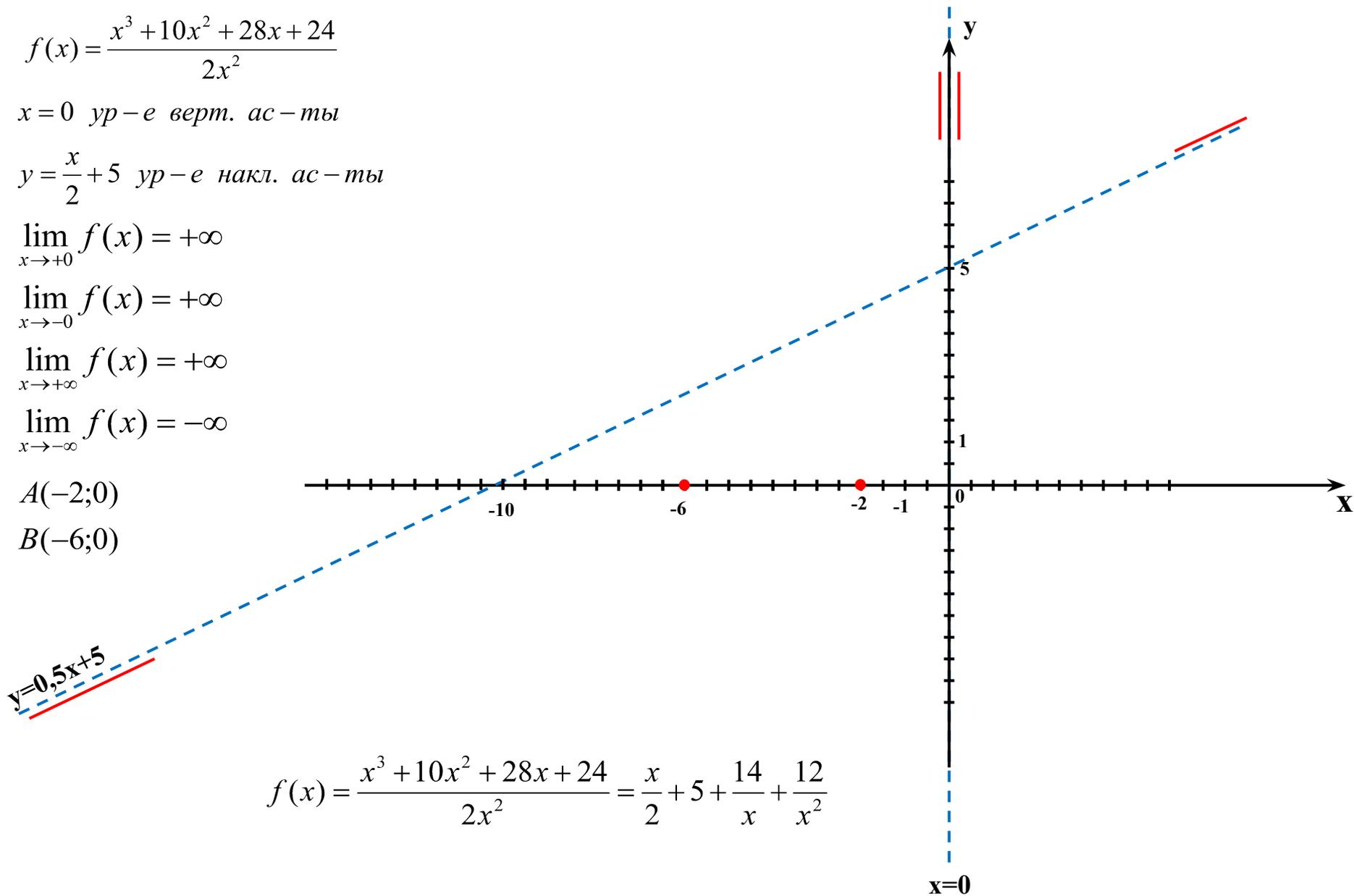
$$\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$A(-2;0)$

$B(-6;0)$



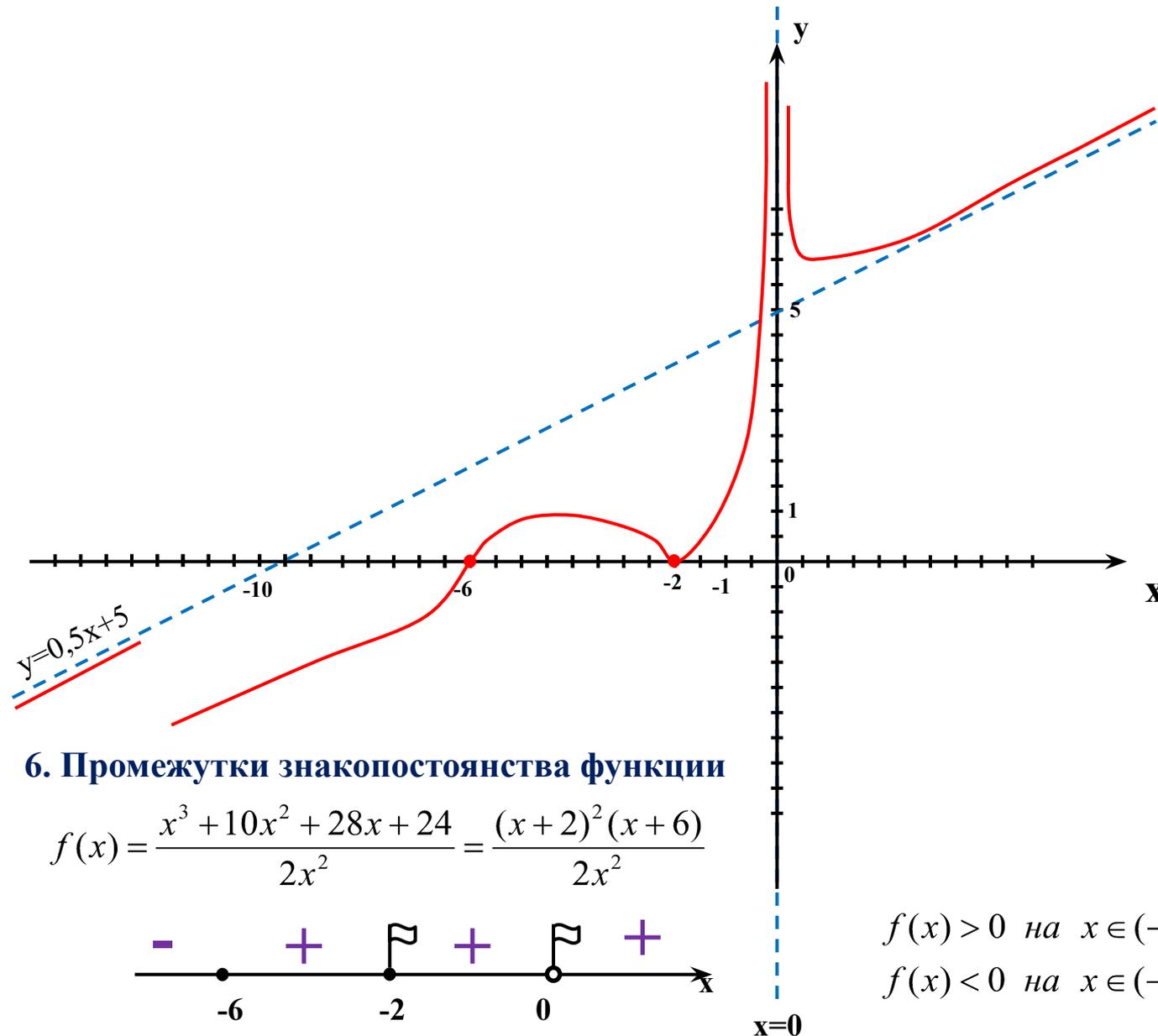
$$f(x) = \frac{x^3 + 10x^2 + 28x + 24}{2x^2} = \frac{x}{2} + 5 + \frac{14}{x} + \frac{12}{x^2}$$

Исследование функции и построение графика

$$f(x) = \frac{x^3 + 10x^2 + 28x + 24}{2x^2}$$

Порядок

1. D(f)
2. Свойства
3. Непрерывность
4. Асимптоты
5. $x=0, y=?; y=0, x=?$
6. $f(x) +/-$
7. $f'(x) +/- \uparrow/\downarrow$
8. Критич. точки
9. $f''(x) +/- \cup/\cap$



Исследование функции и построение графика

7. Первая производная

$$f(x) = \frac{x^3 + 10x^2 + 28x + 24}{2x^2}$$

Порядок

1. D(f)
2. Свойства
3. Непрерывность
4. Асимптоты
5. $x=0$, $y=?$; $y=0$, $x=?$
6. $f(x)$ +/-
7. $f'(x)$ +/- ↑/↓
8. Критич. точки
9. $f''(x)$ +/- U/∩

$$f'(x) = \left(\frac{x^3 + 10x^2 + 28x + 24}{2x^2} \right)' =$$

$$= \frac{(x^3 + 10x^2 + 28x + 24)' \cdot 2x^2 - (2x^2)' \cdot (x^3 + 10x^2 + 28x + 24)}{(2x^2)^2} =$$

$$= \frac{(3x^2 + 20x + 28) \cdot 2x^2 - 4x \cdot (x^3 + 10x^2 + 28x + 24)}{4x^4} =$$

$$= \frac{2x \cdot (3x^2 + 20x + 28) \cdot x - 2x \cdot (x^3 + 10x^2 + 28x + 24) \cdot 2}{4x^4} =$$

$$= \frac{2x \cdot (3x^3 + 20x^2 + 28x - (x^3 + 10x^2 + 28x + 24) \cdot 2)}{4x^4} =$$

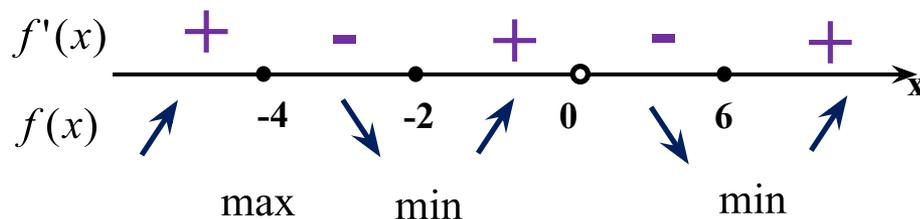
$$= \frac{(3x^3 + 20x^2 + 28x - 2x^3 - 20x^2 - 56x - 48)}{2x^3} = \frac{x^3 - 28x - 48}{2x^3} = 0$$

	1	0	-28	-48
Какие корни будем проверять?				
-2	1	-2	-24	0

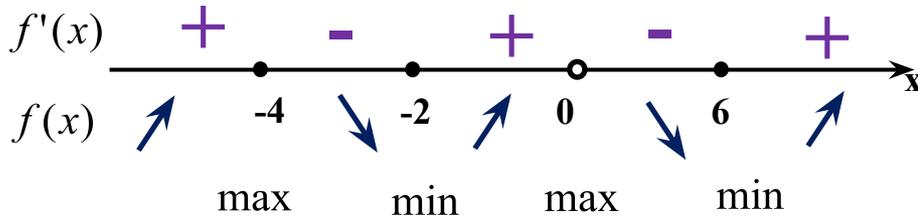
$$x^2 - 2x - 24 = 0$$

$$\begin{cases} x_2 = -4 \\ x_3 = 6 \end{cases}$$

$$f'(x) = \frac{(x+2)(x+4)(x-6)}{2x^3}$$



Исследование функции и построение графика



$f(x) \uparrow$ на $x \in (-\infty; -4]; [-2; 0]; [6; +\infty)$

$f(x) \downarrow$ на $x \in [-4; -2]; (0; 6]$

$$f_{\max}(-4) = \frac{(-4)^3 + 10 \cdot (-4)^2 + 28 \cdot (-4) + 24}{2 \cdot (-4)^2} = \frac{-64 + 160 - 112 + 24}{32} = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$$

$$f_{\min}(-2) = 0$$

$$f_{\min}(6) = 10 \frac{2}{3}$$

$$f(x) = \frac{x^3 + 10x^2 + 28x + 24}{2x^2}$$

Порядок

1. D(f)
2. Свойства
3. Непрерывность
4. Асимптоты
5. $x=0, y=?; y=0, x=?$
6. $f(x) +/-$
7. $f'(x) +/- \uparrow/\downarrow$
8. Критич. точки
9. $f''(x) +/- \cup/\cap$

Исследование функции и построение графика

$f(x) > 0$ на $x \in (-6; +\infty) \setminus \{0\}$

$f(x) < 0$ на $x \in (-\infty; -6)$

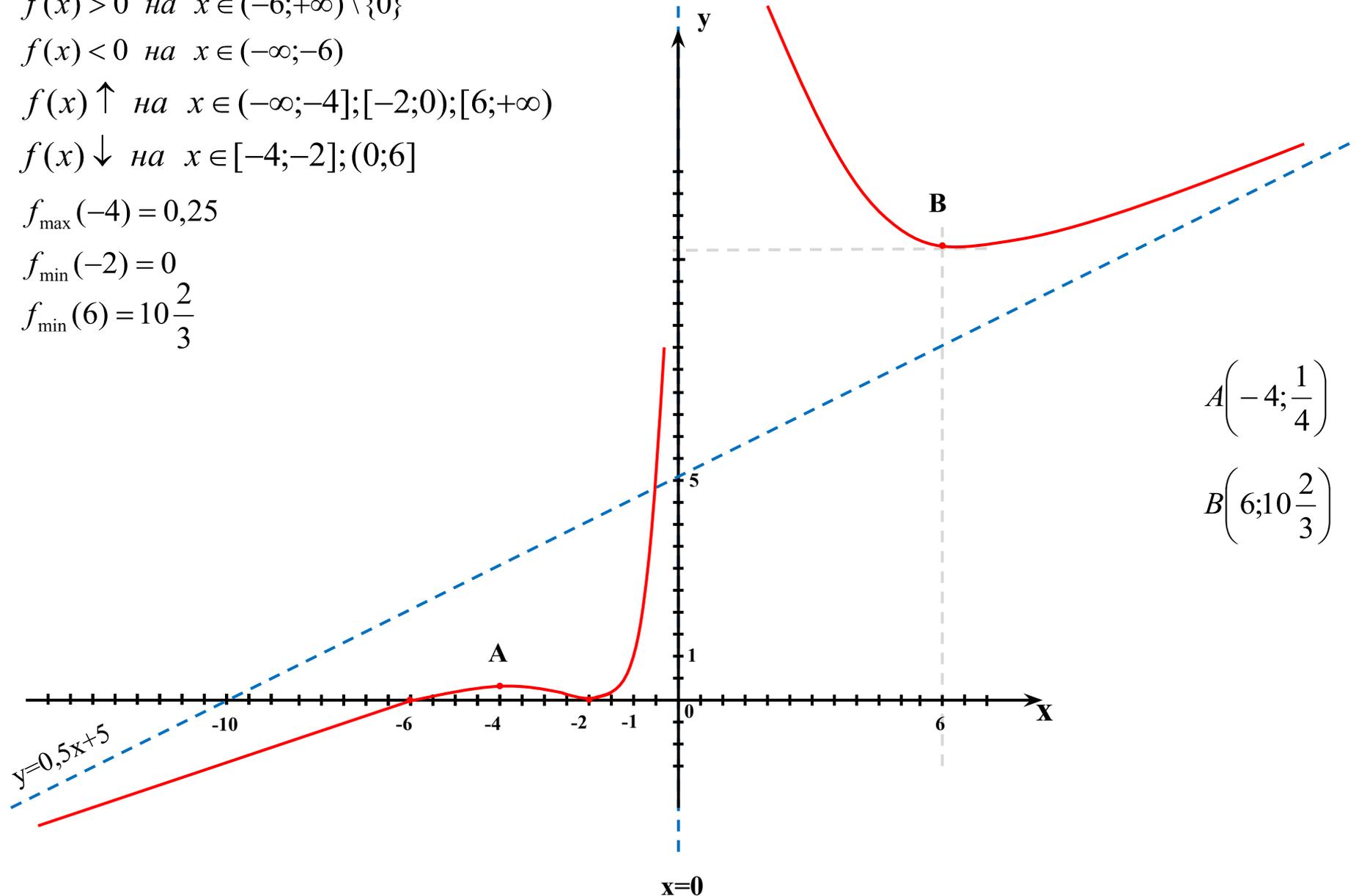
$f(x) \uparrow$ на $x \in (-\infty; -4]; [-2; 0]; [6; +\infty)$

$f(x) \downarrow$ на $x \in [-4; -2]; (0; 6]$

$f_{\max}(-4) = 0,25$

$f_{\min}(-2) = 0$

$f_{\min}(6) = 10\frac{2}{3}$



$$A\left(-4; \frac{1}{4}\right)$$

$$B\left(6; 10\frac{2}{3}\right)$$

Исследование функции и построение графика

$$f'(x) = \frac{x^3 - 28x - 48}{2x^3}$$

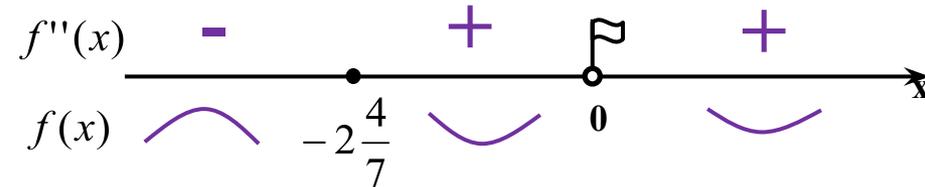
$$f(x) = \frac{x^3 + 10x^2 + 28x + 24}{2x^2}$$

$$f''(x) = \left(\frac{x^3 - 28x - 48}{2x^3} \right)' = \frac{(x^3 - 28x - 48)' \cdot 2x^3 - (2x^3)' \cdot (x^3 - 28x - 48)}{(2x^3)^2} =$$

$$= \frac{(3x^2 - 28) \cdot 2x^3 - 6x^2 \cdot (x^3 - 28x - 48)}{4x^6} = \frac{2x^2(3x^2 - 28) \cdot x - 2x^2 \cdot (x^3 - 28x - 48) \cdot 3}{2x^2 \cdot 2x^4} =$$

$$= \frac{2x^2(3x^3 - 28x - (x^3 - 28x - 48) \cdot 3)}{2x^2 \cdot 2x^4} = \frac{3x^3 - 28x - 3x^3 + 3 \cdot 28x + 3 \cdot 48}{2x^4} =$$

$$= \frac{56x + 144}{2x^4} = \frac{28x + 72}{x^4} = 0$$



$$f\left(-2\frac{4}{7}\right) = \frac{\left(-\frac{18}{7}\right)^3 + 10 \cdot \left(-\frac{18}{7}\right)^2 + 28 \cdot \left(-\frac{18}{7}\right) + 24}{2\left(-\frac{18}{7}\right)^2} = -\frac{18}{2 \cdot 7} + 5 - \frac{28 \cdot 7}{2 \cdot 18} + \frac{24 \cdot 49}{2 \cdot 324} = -\frac{9}{7} + 5 - \frac{7 \cdot 7}{9} + \frac{3 \cdot 49}{81} =$$

$$= \frac{26}{7} - \frac{6 \cdot 7 \cdot 7}{81} \approx 0.4$$

Порядок

1. D(f)
2. Свойства
3. Непрерывность
4. Асимптоты
5. $x=0$, $y=?$; $y=0$, $x=?$
6. $f(x)$ +/-
7. $f'(x)$ +/- \uparrow/\downarrow
8. Критич. точки
9. $f''(x)$ +/- \cup/\cap

Исследование функции и построение графика

$f(x) > 0$ при $x \in (-6; +\infty) \setminus 0$

$f(x) < 0$ при $x \in (-\infty; -6)$

$f(x) \uparrow$ на $x \in (-\infty; -4]; [-2; 0); [6; +\infty)$

$f(x) \downarrow$ на $x \in [-4; -2]; (0; 6]$

$$f_{\max}(-4) = 0,25$$

$$f_{\min}(-2) = 0$$

$$f_{\min}(6) = 10\frac{2}{3}$$

