Лекция 2

Теория функций нескольких переменных (ТФНП)

1. Дифференциалы высших порядков

2. Геометрические приложения ТФНП

3. Экстремумы ФНП

4. Условные экстремумы ФНП

5. Отыскание наибольшего и наименьшего значений ФНП

1. Дифференциалы высших порядков

$$u = f(x, y)$$

Дифференциал *функции двух переменных*

$$du(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$$

du – тоже функция переменных x, y.

Для этой функции тоже можно вычислить дифференциал первого порядка .

Тогда, для исходной функции ***u***, возникает понятие второго дифференциала :

$$d^2u = d\left(du\right)$$

– ***дифференциал второго порядка.***

$$d^3u = d\left(d^2u\right)$$

– ***дифференциал третьего порядка.***

$$d^2u = d(du) = d\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy\right)$$

Найдём формулу для вычисления дифференциала второго порядка $d^2u - ?$

$$d(du) = d\underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy\right)}_{A} = \frac{\partial A}{\partial x}dx + \frac{\partial A}{\partial y}dy =$$

$$A'_x = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}dy$$

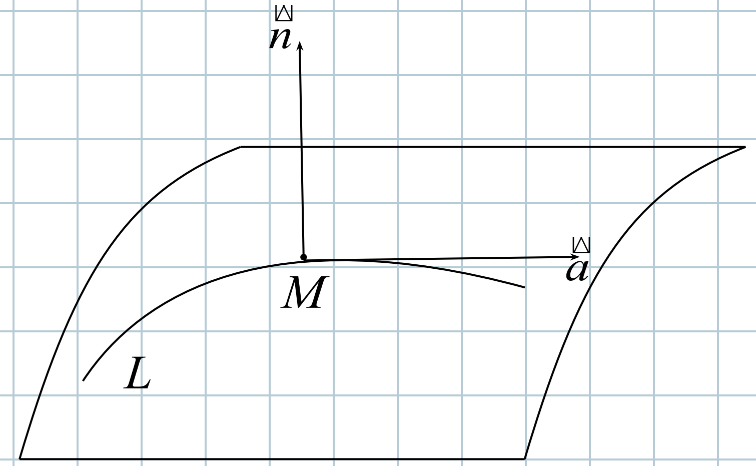
$$A'_y = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}dx + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy$$

$$=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(dx)^2+\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}dydx+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(dy)^2=$$

$$=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(dx)^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(dy)^2$$

2. Геометрические приложения ТФНП

Прямая линия называется ***касательной к поверхности*** в некоторой точке $M(x,y,z)$, если она является касательной к какой-либо кривой, лежащей на поверхности и проходящей через точку M.



Рассмотрим поверхность S с уравнением

$$F(x,y,z)=0$$

Если в точке $M(x,y,z)\in S$ $\dfrac{\partial F}{\partial x}=\dfrac{\partial F}{\partial y}=\dfrac{\partial F}{\partial z}=0,$ или хотя бы одна из производных не существует, то точка M называется ***особой точкой*** поверхности S.

Если в точке $M(x,y,z)\in S$ все частные производные существуют, непрерывны, и хотя бы одна из них отлична от нуля, то точка M называется ***обыкновенной точкой*** поверхности.

Плоскость, в которой расположены все касательные к поверхности в точке *M*, называется ***касательной плоскостью*** к поверхности в этой точке .

Все касательные прямые к данной поверхности в её обыкновенной точке **М** лежат в одной плоскости.

Теорема *(о существовании касательной плоскости)*

Если P_0 – обыкновенная точка поверхности S, то через эту точку можно провести касательную плоскость.

Доказательство:

Проведем через точку P_0 произвольную линию $L \subset S$

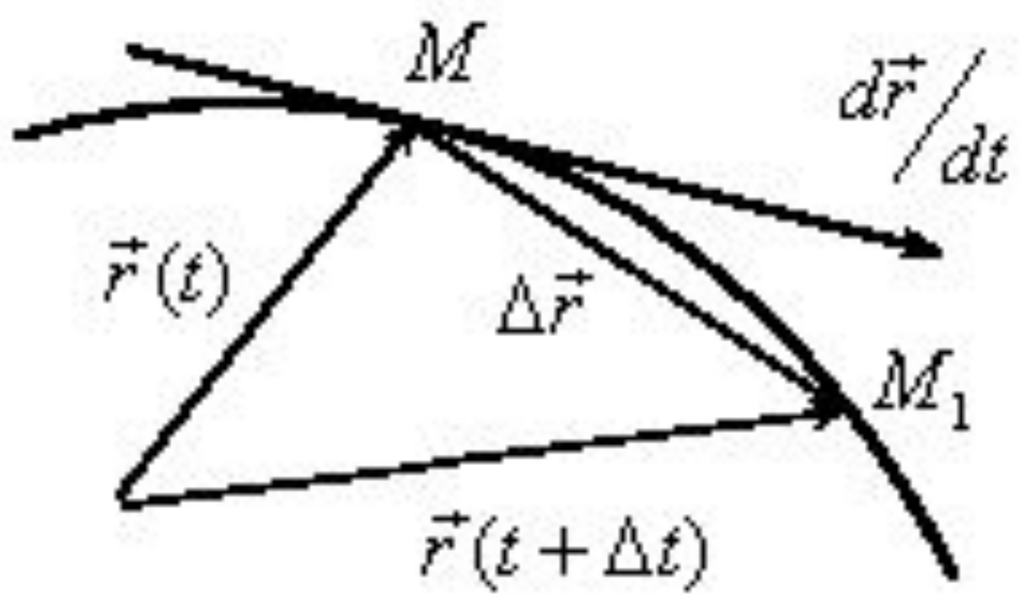
$$L: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \Rightarrow \vec{r} = \vec{r}(t)$$ – вектор-функция

Вектор, направленный по касательной к линии L имеет вид:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right)$$

Вектор касательной

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \left\{\frac{dx}{dt}; \frac{dy}{dt}; \frac{dz}{dt}\right\}$$ точке M



Подставим координаты $\vec{r}(t)$ в уравнение поверхности:

$$F\big(x(t), y(t), z(t)\big) \equiv 0$$ (получим тождество)

Дифференцируем по t:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dt} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\left(\vec{n}, \frac{d\vec{r}}{dt}\right) = 0$$

- справедливо для любой точки линии L

(в частности для фиксированной точки P_0)

$$\left(\vec{n}, \frac{d\vec{r}}{dt}\right) = 0,$$

где $\vec{n} = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right)\Bigg| \Rightarrow$ $\vec{n}$ перпендикулярен касательной к L в точке P_0

Линию L выбирали произвольным образом

$$\Downarrow$$

Вектор $\vec{n}$ перпендикулярен любой касательной

$$\Downarrow$$

$\vec{n}$ нормальный вектор к поверхности S в точке P_0

Нормалью *к поверхности* S *в точке* P_0 *называется прямая, проходящая через точку* P_0, *перпендикулярно касательной плоскости в этой точке.*

Рассмотрим поверхность S с уравнением $F(x,y,z)=0$

и пусть точка $P_0(x_0, y_0, z_0) \in S$.

$$\vec{n}_{P_0} = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right)\Bigg|_{P_0}$$

- нормальный вектор к поверхности S в т. P_0.

Уравнение касательной плоскости

$$\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{P_0}(x-x_0)+\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{P_0}(y-y_0)+\left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{P_0}(z-z_0)=0$$

Уравнение нормали

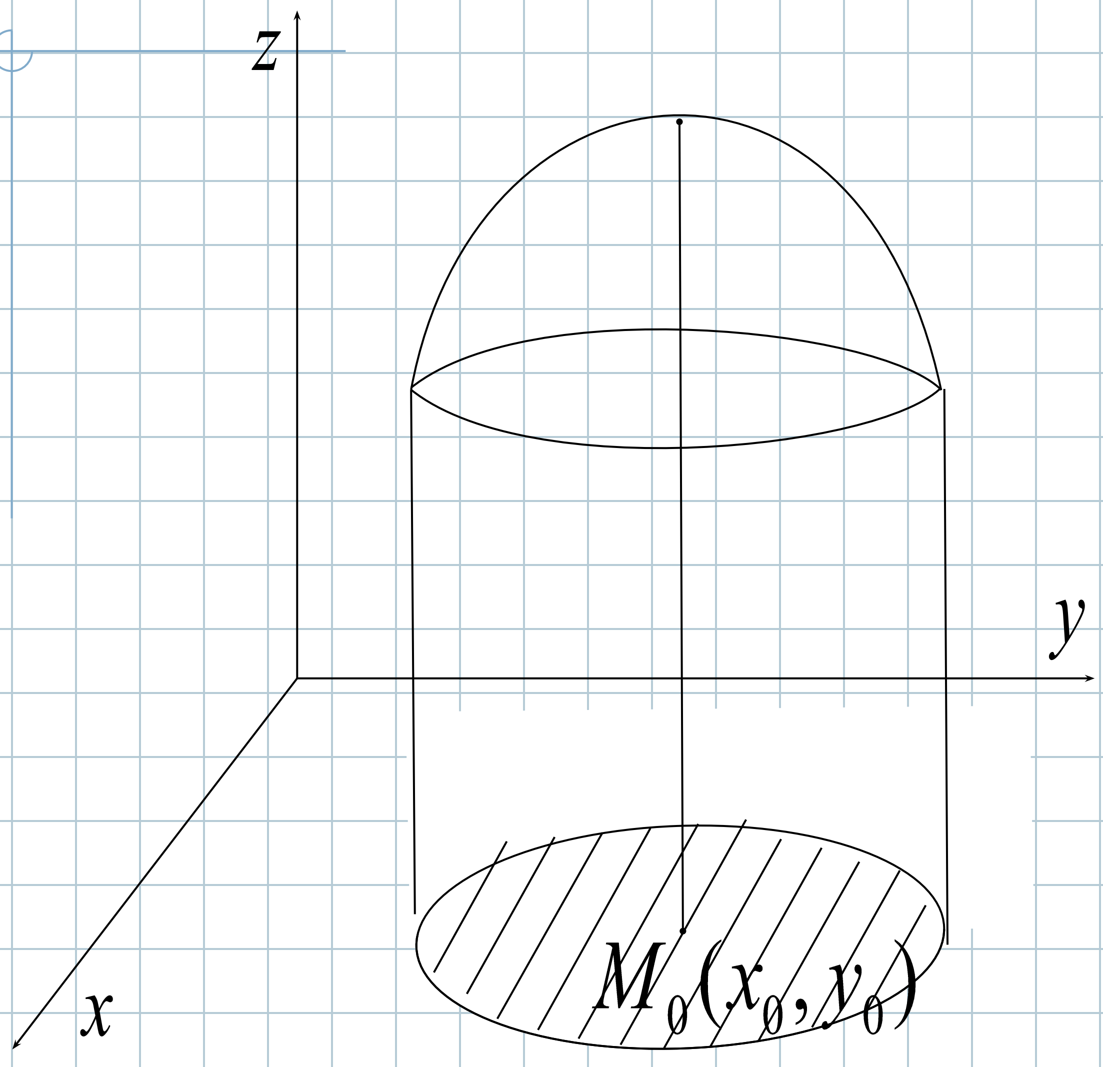
$$\frac{x-x_0}{\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{P_0}}=\frac{y-y_0}{\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{P_0}}=\frac{z-z_0}{\left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{P_0}}$$

3. Экстремум ФНП.

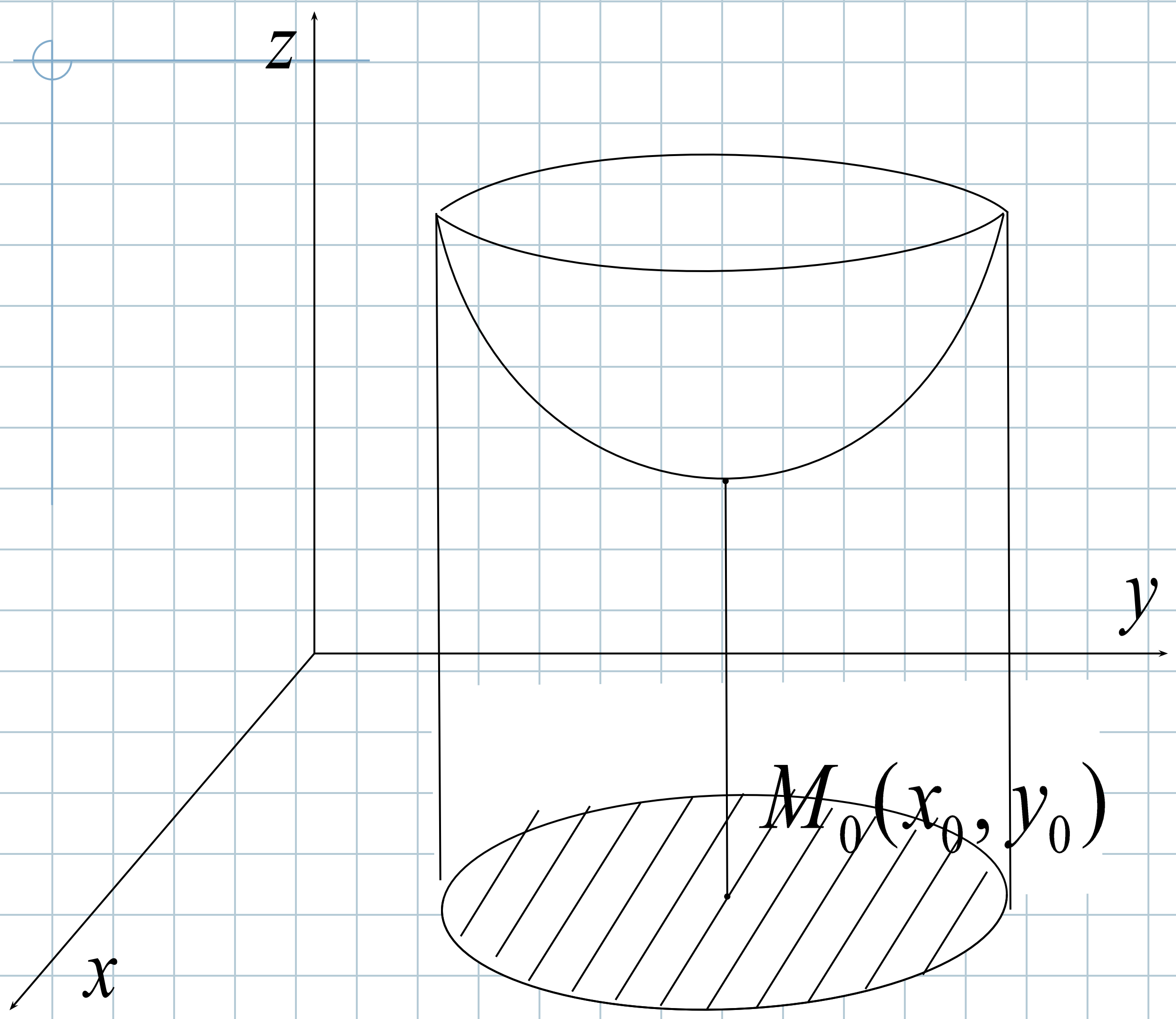
Точка P_0 *называется точкой локального* ***максимума*** *или* ***минимума*** *функции* $u = f(P)$ *если в окрестности этой точки функция непрерывна и удовлетворяет неравенству*

$u(P) < u(P_0)$ *или* $u(P) > u(P_0)$

Локальные максимумы и минимумы функции u= f(P) называют локальными ***экстремумами.***



z
y
x
$M_0(x_0, y_0)$


z
y
x
$M_0(x_0, y_0)$

Теорема *(необходимое условие существования экстремума).*

Если

1. P_0 – точка экстремума,

2. $f(P)$ – дифференцируемая в точке P_0 функция двух переменных,

то

частные производные первого порядка в этой точке равны нулю

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f(P_0)}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial f(P_0)}{\partial y} = 0. \end{cases}$$

Следствие 1

Если P_0 –***стационарная точка*** функции $u=f(P)$ (это точка, где частные производные первого порядка равны нулю),

то $$du\left(P_0\right)=0.$$

Следствие 2

Точки возможного экстремума:

а) стационарные точки,

б) точки , в которых функция $u=f(P)$ не дифференцируема.

Теорема *(достаточное условие существования экстремума).*

Если

1. P_0 – стационарная точка для $u = f(P)$,

2. u – дважды дифференцируемая функция в окрестности точки P_0 ,

3. вторые производные функции $u=f(P)$ непрерывны в точке P_0 , то

1. если $d^2u(P_0) < 0$ то P_0 - точка максимума,

2. если $d^2u(P_0) > 0$ то P_0 - точка минимума,

3. если $d^2u(P_0)$ не сохраняет знака при изменении знака dx , dy , то в точке P_0 нет экстремума,

4. если $d^2u(P_0) = 0$

то для точки P_0 требуется дополнительное исследование.

Необходимые условия экстремума: $\begin{cases} f'_x(x_0, y_0) = 0, \\ f'_y(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$ или не существуют.

Достаточные условия экстремума:

Если $\Delta = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix}_{x_0, y_0}$, то

(x_0, y_0) – точка максимума, если $\Delta > 0$, $f''_{xx} < 0$;

(x_0, y_0) – точка минимума, если $\Delta > 0$, $f''_{xx} > 0$;

в точке (x_0, y_0) экстремума нет, если $\Delta < 0$;

если $\Delta = 0$, нужно исследовать знак разности $f(x, y) - f(x_0, y_0)$.

4. Условные экстремумы .

На практике часто встречаются задачи об отыскании экстремумов функции, аргументы которой не являются независимыми переменными, а удовлетворяют определенным условиям связи (уравнениям).

Такие экстремумы называются ***условными.***

Постановка задачи:

Пусть задана функция $u=f(p)$ аргументы которой связаны уравнением $\varphi(x,y)=0$ (уравнение связи)

Найти *экстремумы* такой функции.

Поставленная задача сводится к задаче отыскания обычного экстремума ***методом Лагранжа.***

Определение.

Функцией Лагранжа, для данной функции

$$u = f(P) = f(x, y)$$

и уравнения связи $\varphi(x, y) = 0$,

называется функция $L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$

где λ ***множитель Лагранжа.***

Теорема

Точке $(x_0, y_0; \lambda)$ обычного экстремума функции $L(x, y; \lambda)$ соответствует точка (x_0, y_0) условного экстремума непрерывной функции *u(P)* при условии связи $\varphi\left(x, y\right) = 0$.

Общая схема отыскания условного экстремума

1. Поиск стационарных точек функции Лагранжа (необходимое условие экстремума).

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 0, \\ \varphi(x, y) = 0. \end{cases}$$

- система уравнений для отыскания стационарных точек $(x_0, y_0; \lambda_0)$.

2. Определение типа экстремума (достаточное условие экстремума).

Для установления факта наличия экстремума и определения типа экстремума нужно исследовать знак

$$d^2L(x_0, y_0; \lambda_0)$$

При этом нужно учитывать, что dx, dy

зависят друг от друга из-за условий связи.

Достаточные условия:

$$D = -\begin{vmatrix} 0 & \varphi'_x(x_0,y_0) & \varphi'_y(x_0,y_0) \\ \varphi'_x(x_0,y_0) & L''_{xx}(x_0,y_0,\lambda_0) & L''_{xy}(x_0,y_0,\lambda_0) \\ \varphi'_y(x_0,y_0) & L''_{xy}(x_0,y_0,\lambda_0) & L''_{yy}(x_0,y_0,\lambda_0) \end{vmatrix},$$

если $D > 0$ $(d^2L > 0)$, то в точке условного экстремума – **минимум**,

если $D < 0$ $(d^2L < 0)$, то – **максимум**,

если $D = 0$ (d^2L не сохраняет знак), то в критической точке экстремума **нет**.

Пример

На плоскости *OXY* дана фигура, ограниченная линиями

$$x = 0; y = 0; y + x^2 - 3 = 0.$$

Найти размеры прямоугольника, две стороны которого совпадают с осями координат, если одна из его вершин *M(x,y)* находится на параболе, а прямоугольник вписан в эту фигуру так, чтобы площадь прямоугольника была наибольшей.

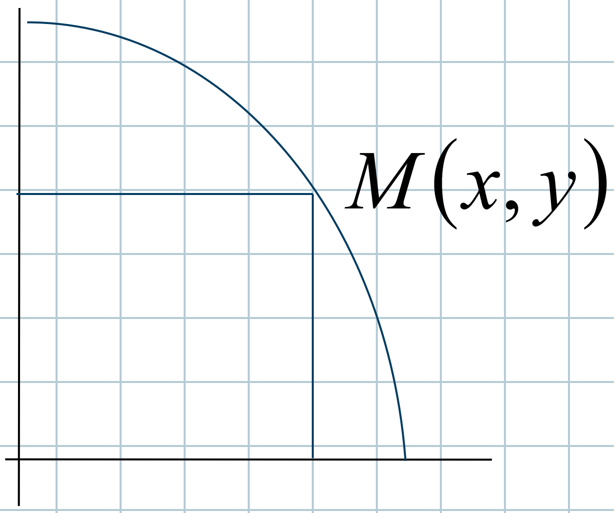
Площадь прямоугольника:

$$f(x,y)=S=xy,\ \ f_{наиб.}(P_0)\Rightarrow P_0(x_0,y_0)$$

$$(x_0,y_0)=?$$

Точка M принадлежит параболе, уравнение связи $\Rightarrow$

$$y+x^2-3=0$$



Пишем функцию Лагранжа

$$L(x, y, \lambda) = xy + \lambda(y + x^2 - 3)$$

1. Находим *стационарные точки* этой функции.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y + 2\lambda x = 0 \\ x + \lambda = 0 \\ y + x^2 - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 2 \\ \lambda_0 = -1 \end{cases}$$

2. Определяем тип экстремума.

Вычислим частные производные

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = -2, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 1, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$d^2 L(1,2,-1) = -2dx^2 + 2dxdy$$

Из уравнения связи $y + x^2 - 3 = 0$ находим

$$dy + 2xdx = 0 \quad \Rightarrow dy = -2xdx$$

При $x_0 = 1$ $dy = -2dx$ $\Rightarrow$

$$d^2 L(1,2,-1) = -6dx^2 \ \Rightarrow d^2 L(1,2,-1) < 0$$

$\Rightarrow P_0(1,2)$ условный максимум функции S,

$$\left(x_0, y_0\right) = \left(1, 2\right).$$

5. Отыскание наибольшего и наименьшего значений ФНП.

Теорема

Если функция $u=f(P)$ дифференцируема в ограниченной замкнутой области, то она достигает наибольшего M (наименьшего m) значений или в стационарной точке, или на границе области.

Схема поиска наибольшего (наименьшего) значения

1. Найти *стационарные точки* P_0 и вычислить

$$u = f\left(P_0\right)$$

2. Найти m_Γ и M_Γ наименьшее и наибольшее значения $u=f(P)$ на границе области

3. Выбрать

$$m = \min\left\{m_\Gamma, f\left(P_0\right)\right\}$$

$$M = \max\left\{M_\Gamma, f\left(P_0\right)\right\}$$

Пример : найти наименьшее и наибольшее значения функции $u = e^{x^2+y^2}$ в области $D: x^2 + y^2 \le R^2$

1. *Стационарные точки*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = e^{x^2+y^2} \cdot 2x = 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = e^{x^2+y^2} \cdot 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 0, \\ y_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad u(0,0) = 1;$$

2. Найдем $m_Г$ и $M_Г$

$$m_Г = M_Г = e^{R^2};$$

3.

$$m = \min\left\{1, e^{R^2}\right\} = 1,$$

$$M = \max\left\{1, e^{R^2}\right\} = e^{R^2}.$$