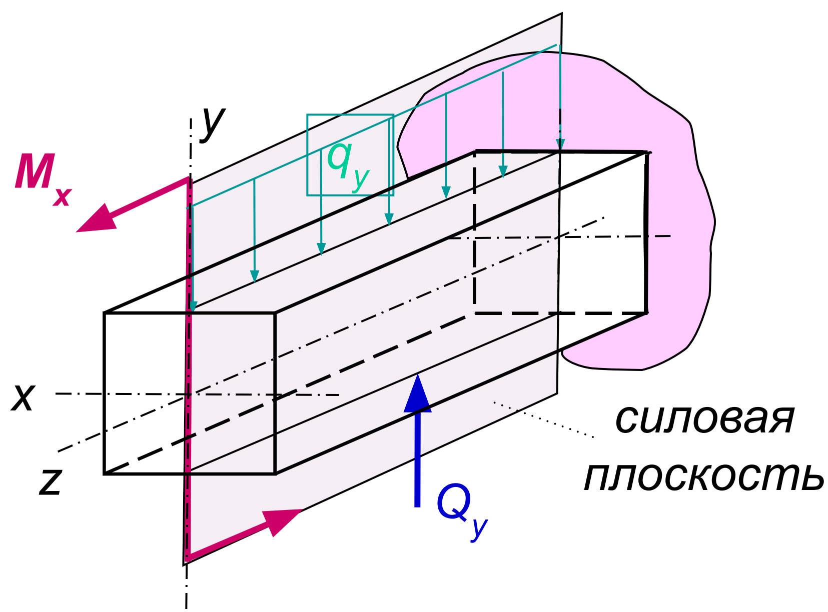
# Лекция № 7

# Прямой изгиб

***Изгибом*** называется вид деформации, при котором ось бруса изгибается по дуге.

*Прямые брусья, работающие на изгиб, называются* ***балками***.

***Прямым изгибом*** называется изгиб, при котором внешние силы, действующие на балку, лежат **в одной силовой плоскости**, проходящей через продольную ось балки и центральную ось поперечного сечения.



## *Чистый изгиб*

***Изгиб*** называется ***чистым***, если в любом поперечном сечении балки возникает только один внутренний силовой фактор - изгибающий момент $M_x$ (или $M_y$).

При этом: $M_x(M_y) = const.$

## *Поперечный изгиб*

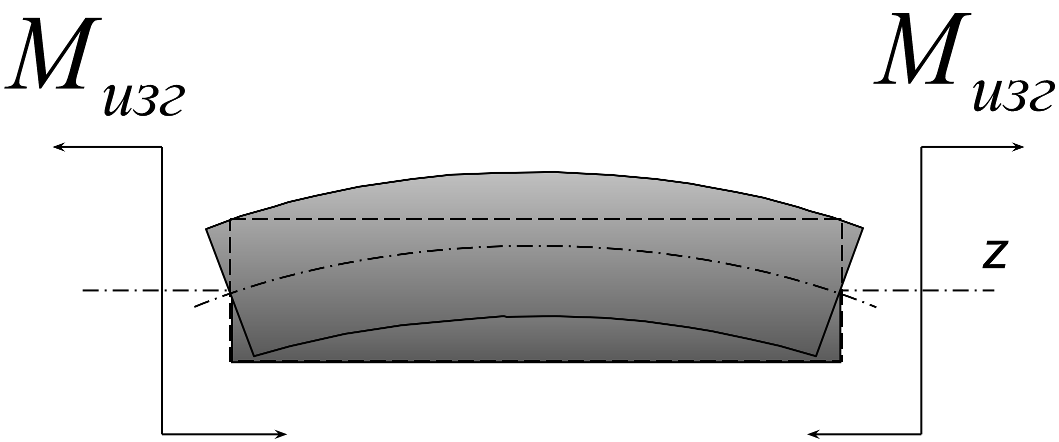
***Изгиб*** называется ***поперечным***, если в любом поперечном сечении балки возникают два внутренних силовых фактора - изгибающий момент $M_x$ и поперечная сила $Q_y$, или $M_y$ и $Q_x$.

# Рассмотрим чистый изгиб

По торцам балки приложим два равных и противоположно направленных изгибающих момента.

Верхние волокна растянуты, а нижние - сжаты. Плоскость, разделяющая область растяжения от области сжатия, называется ***нейтральным слоем.***

***Нейтральной линией*** называется линия пересечения нейтрального слоя с плоскостью поперечного сечения балки.



## Расчет балки на изгиб основан на справедливости гипотезы плоских сечений (гипотезы Бернулли).

*При чистом изгибе ось бруса изгибается по дуге окружности, при этом сечения остаются плоскими, но поворачиваются в пространстве на некоторый угол друг относительно друга.*

*Следствие:*

В случае чистого изгиба в поперечном сечении бруса действуют только *нормальные напряжения*.

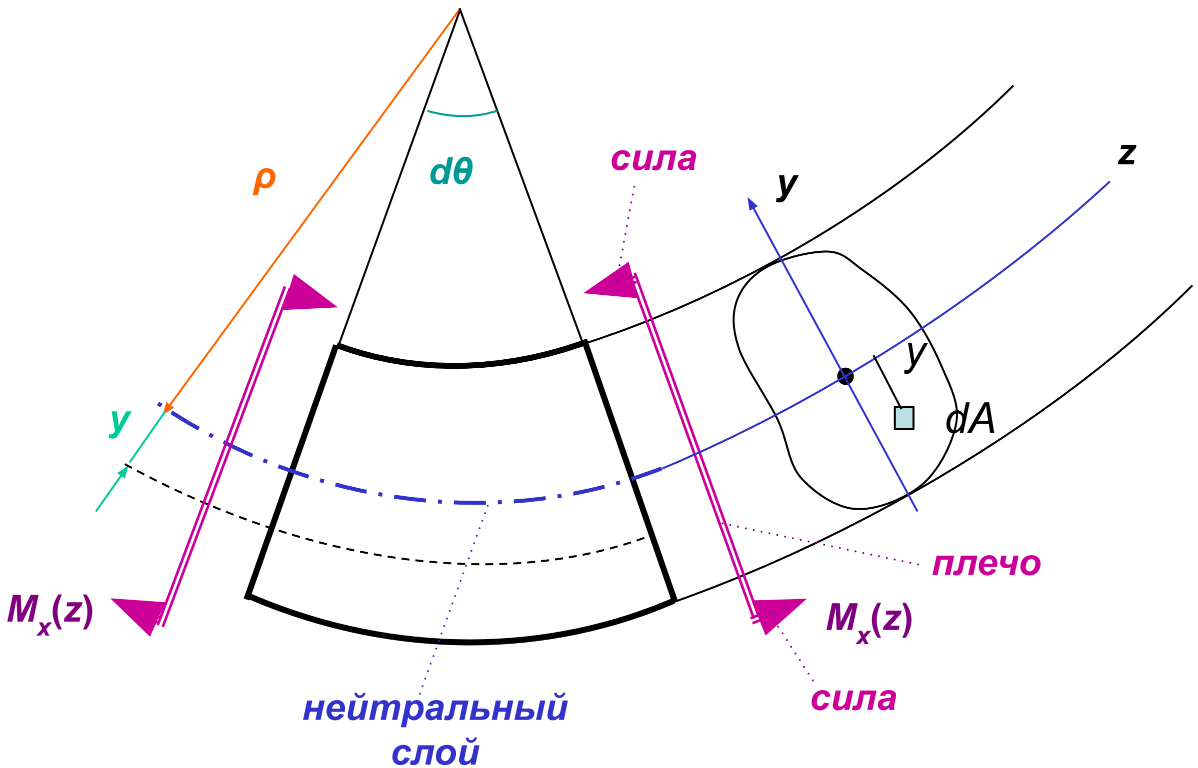
# Нормальные напряжения при чистом изгибе

$dN = \sigma dA$

$$N = \int_A \sigma \, \mathrm{d}A = 0$$

$dM = \sigma dAy$

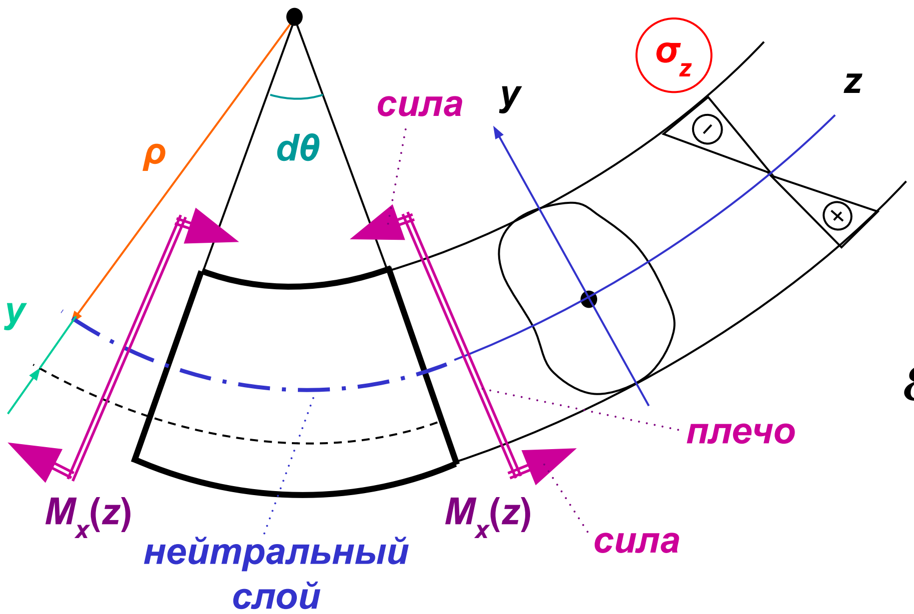
$$M_x = \int_A (\sigma \, \mathrm{d} A) y$$




$d\theta$ – угол, общей кривизны балки

$\rho$ – радиус кривизны нейтрального слоя;

$dz = \rho d\theta$ - длина продольных волокон нейтрального слоя.




Рассмотрим относительное удлинение продольных волокон $\varepsilon$ на расстоянии $y$ от нейтрального слоя:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{(\rho + y)d\theta - \rho d\theta}{\rho d\theta} = \frac{y}{\rho}$$

Итак: $\varepsilon = \dfrac{y}{\rho}$

Согласно закону Гука, нормальные напряжения равны:

$$\sigma_z = E\varepsilon = E\frac{y}{\rho}$$

изгибающий момент равен:

$$M_x = \int_A \sigma_z y dA = \int_A \frac{Ey^2}{\rho} dA = \frac{E}{\rho}\int_A y^2 dA = \frac{EJ_x}{\rho}$$

Следовательно: $M_x = \dfrac{EJ_x}{\rho}$

Полученная формула выражает **закон Гука при изгибе** :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{EI_x}$$

$EJ_x$ – ***жесткость при изгибе***

$$\sigma_z = \left(\frac{1}{\rho}\right) Ey = \frac{M_x E}{EJ_x} y = \frac{M_x y}{J_x},$$

$$\sigma_z = \frac{M_x y}{J_x}$$

Полученная зависимость называется **формулой Навье**.

$EJ_x$ - ***Жесткость при изгибе***. Размерность: $\left[H \cdot м^2\right]$

**Максимальное нормальное напряжение** в площади поперечного сечения балки наблюдается на её поверхности и равно:

$$\sigma_{z\,max} = \frac{M_x}{J_x} y_{max} = \frac{M_x}{W_x}$$

Итак, получено: $\sigma_{z\,max} = \dfrac{M_x}{W_x}$

***Опасным сечением при изгибе*** называется поперечное сечение бруса, в котором возникает максимальное нормальное напряжение.

# Расчеты на прочность при изгибе

а) ***проверочный расчет***

Определяется максимальное расчетное напряжение и сравнивается с допускаемым напряжением.

$$\left|\sigma_{max}\right| = \frac{\left|M_{x_{max}}\right|}{W_x} \le [\sigma]$$

Заданы: нагрузка, площадь сечения, свойства материала.

б) ***проектировочный расчет***

Производится подбор сечения бруса из условия:

$$W_x \ge \frac{\left|M_{x_{max}}\right|}{[\sigma]}$$

Где: $$W_x = \frac{bh^2}{6}$$

Прямоугольное сечение.

Или: $$W_x = W_y = \frac{\pi d^3}{32}$$

Круглое сечение.

# Рациональные типы сечений балок

Спроектировать балку рационального сечения означает задать ей такие размеры и форму, которые обеспечат при минимальном расходе материала выполнение условия прочности.

Несущая способность балки пропорциональна моменту сопротивления сечения, т.е.

$$\left[M_x\right] = W_x\left[\sigma\right]$$

а расход материала – площади поперечного сечения.

Чем меньше площадь поперечного сечения балки, тем она легче и, соответственно, экономичнее.

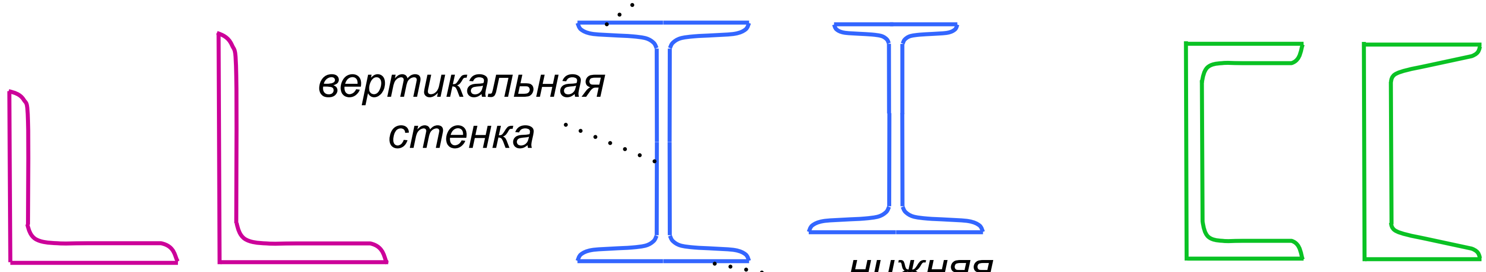
Показателем рациональности сечения балки является ***коэффициент экономичности***, определяемый по формуле:

$$\alpha = \frac{W_x}{F \cdot h}$$

<u>Чем выше $\boldsymbol{\alpha}$ , тем экономичнее сечение.</u>

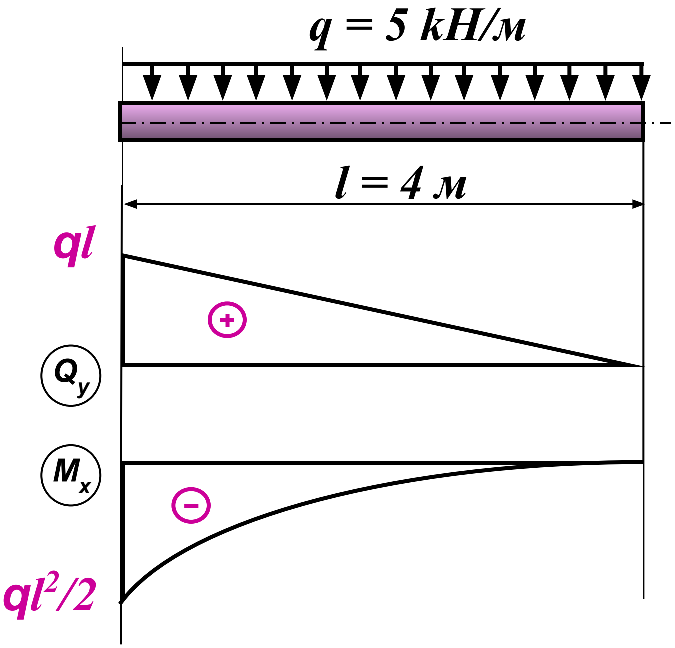
В строительной промышленности используются следующие тонкостенные стандартные прокатные профили поперечных сечений:

- ***равнополочные и неравнополочные уголки***
- ***равнополочные и неравнополочные двутавры***
- ***швеллеры***

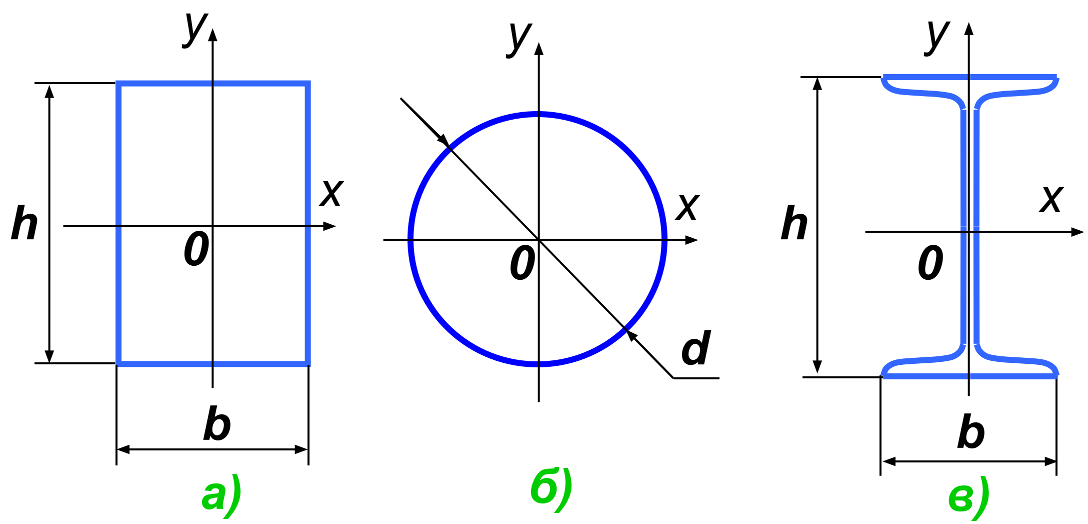



Стандартные профили регламентированы по ГОСТ и сведены в **<u>сортаменты</u>**.

**Пример.** Определить, какое из представленных сечений является наиболее рациональным для стальной балки ([σ] = 160 МПа) консольного типа, нагруженной согласно рисунку.




Формы сечений




**Опасное сечение – жесткая заделка:**

$$\left|M_x\right|_{max} = \frac{ql^2}{2} = \frac{5\cdot 10^3\cdot(4)^2}{2} = 40\,кН/м.$$

**Условие прочности:**

$$\left|\sigma_z\right|_{max} = \frac{M_x}{W_x} \le [\sigma]$$

***а) <u>прямоугольное сечение</u>*** (примем b = h/2)

$$\left|\sigma_z\right|_{max} = \frac{M_x}{W_x} \le [\sigma]$$

$$W_x = \frac{bh^2}{6} = \frac{h}{2}\cdot\frac{h^2}{6} = \frac{h^3}{12} \quad \Rightarrow \quad \frac{M_x \cdot 12}{h^3} \le [\sigma] \quad \Rightarrow$$

$$h = \sqrt[3]{\frac{12M_x}{[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{12\cdot 40\cdot 10^3}{160\cdot 10^6}} = 0{,}144\,м = 14{,}4\,см$$ - требуемая высота сечения.

$$A = b*h = \frac{h}{2}h = \frac{h^2}{2} = \frac{(14{,}4)^2}{2} = 1{,}0368*10^{-2}\,м^2 = 103{,}68\,см^2$$ - площадь сечения.

$$W_x = \frac{h^3}{12} = \frac{(0{,}144)^3}{12} = 248{,}33\,см^3$$ - момент сопротивления сечения.

$$\alpha = \frac{W_x}{A\cdot h} = \frac{248{,}33}{103{,}68\cdot 14{,}4} = 0{,}166$$ - коэффициент экономичности сечения.

## б) круглое сечение

$$\left|\sigma_z\right|_{max} = \frac{M_x}{W_x} \le [\sigma] \qquad \Rightarrow \qquad \frac{M_x \cdot 32}{\pi d^3} \le [\sigma] \qquad \Rightarrow$$

$$W_x = \frac{\pi d^3}{32}$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{32 M_x}{\pi[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 40 \cdot 10^3}{3{,}14 \cdot 160 \cdot 10^6}} = 0{,}136\,м = 13{,}6\,см$$ - требуемый диаметр сечения.

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3{,}14(0{,}136)^2}{4} = 1{,}01452 \cdot 10^{-2}\,м^2 = 145{,}2\,см^2$$ - площадь сечения.

$$W_x = \frac{\pi * d^3}{32} = \frac{3{,}14 * (13{,}6)^3}{32} = 246{,}83\,см^3$$ - момент сопротивления сечения.

$$\alpha = \frac{W_x}{A \cdot h} = \frac{246{,}83}{145{,}2 \cdot 13{,}6} = 0{,}125$$ - коэффициент экономичности сечения.

## в) двутавровое сечение

$$\left|\sigma_z\right|_{max} = \frac{M_x}{W_x} \le [\sigma] \quad \Rightarrow$$

$$W_x = \frac{M_x}{[\sigma]} = \frac{40 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 0{,}25 \cdot 10^{-3}\, м^3 = 250 см^3$$ - требуемый момент сопротивления сечения.

Ближайший момент сопротивления сечения по сортаменту: $W_x = 254 см^3$, что соответствует ***двутавру № 22 «а».***

$$A = 32{,}8 см^2, \qquad h = 22 см.$$

$$\alpha = \frac{W_x}{A \cdot h} = \frac{254}{32{,}8 \cdot 22} = 0{,}352$$ - коэффициент экономичности сечения.

***Итак, получено:***

$$\alpha_{прямоуг.} = 0{,}166$$

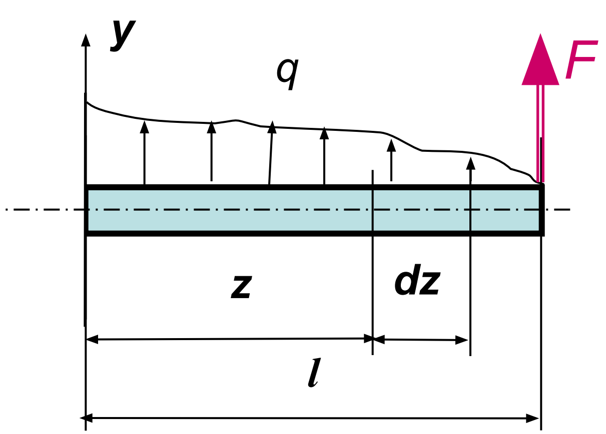
$$\alpha_{кругл.} = 0{,}125$$

$$\alpha_{двут.} = 0{,}352$$

***Вывод:***

*Наиболее предпочтительным оказалось двутавровое сечение, т.к. его коэффициент экономичности максимален.*

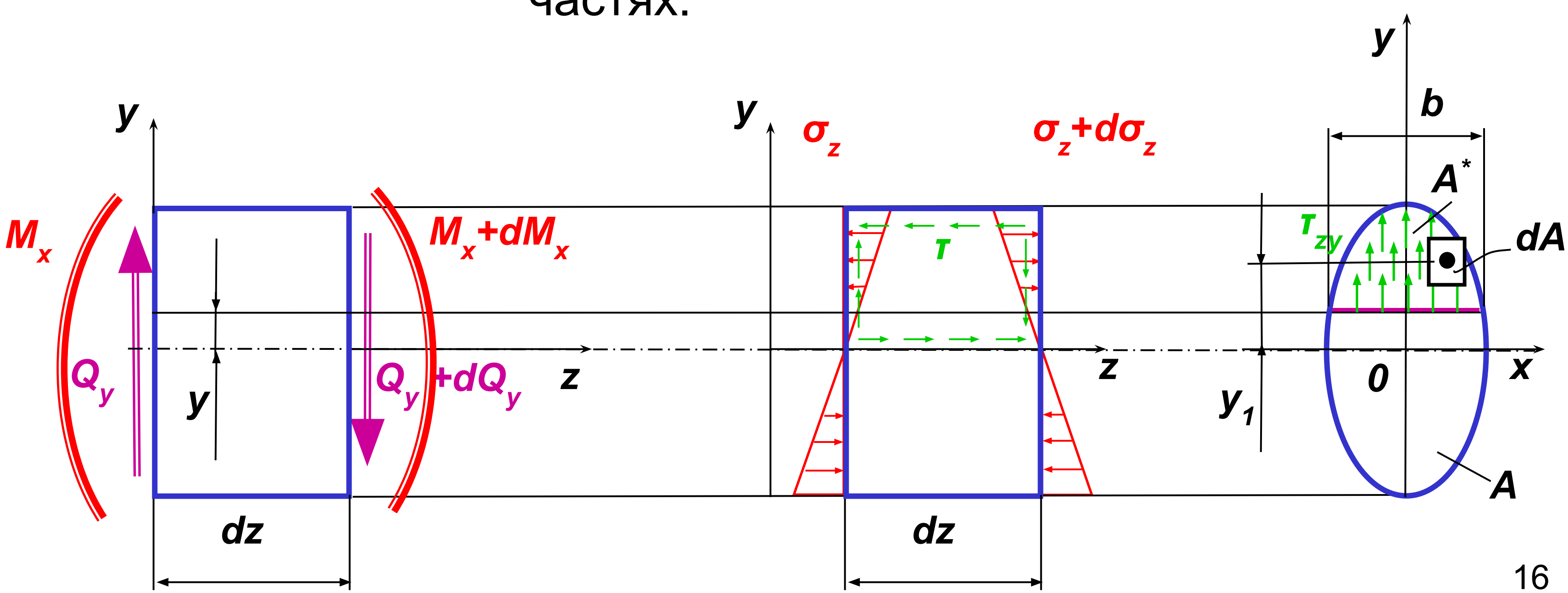
# Касательные напряжения при изгибе. Формула Журавского.



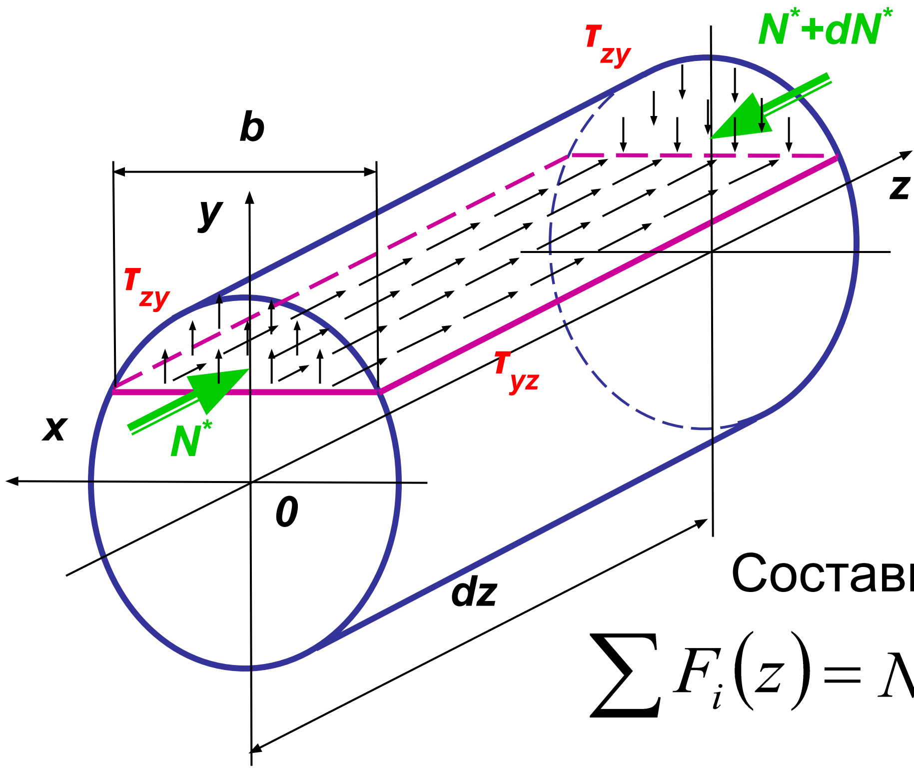

Рассмотрим консольную балку, испытывающую поперечный изгиб.

На расстоянии ***z*** от заделки выделим элемент длиной ***dz.***

Уравновесим его поперечными силами и изгибающими моментами в левой и правой частях.



Продольным горизонтальным сечением на расстоянии ***y*** от нейтрального слоя разделим выделенный элемент на две части.




Рассмотрим равновесие верхней части, имеющей основание шириной ***b***.

С учетом закона парности касательных напряжений получаем, что **τ** *в поперечном сечении равны* **τ** *в продольном сечении, и направлены перпендикулярно.*

Составим уравнение $\sum F_i(z)=0$

$$\sum F_i(z)=N^*-\left(N^*+dN^*\right)+\tau_{yz}b\,dz=0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad dN^*=\tau_{yz}bdz \quad \text{откуда:} \quad \tau_{yz}=\frac{dN^*}{bdz} \quad (1)$$

$$N^*=\int_{A^*}\sigma dA^*=\int_{A^*}\frac{M_x}{J_x}y_1\,dA^*=\frac{M_x}{J_x}\int_{A^*}y_1dA^*=\frac{M_x}{J_x}S_x^*$$ т.е. $N^*=\dfrac{M_x}{J_x}S_x^*$ тогда:

$$dN^*=\frac{dM_x}{J_x}S_x^* \quad (2)$$ Подставим (2) в (1) : $$\tau_{yz}=\frac{dM_xS_x^*}{J_x\,bdz}=\frac{Q_yS_x^*}{J_xb}$$

Полученная зависимость называется **формулой Журавского**:

$$\tau_{yz} = \frac{Q_y S_x^*}{J_x b}$$

где: $Q_y$ – поперечная сила, (Н);

$S_x^*$ – статический момент отсеченной части сечения, находящейся выше (или ниже) некоторой *характерной* точки, (м$^3$);

*Характерными будем считать точки на оси ординат, располагающиеся по верхней и нижней образующей сечения, в местах изменения его ширины, а также в центре тяжести сечения.*

$$S_x^* = A^* \cdot y^*$$

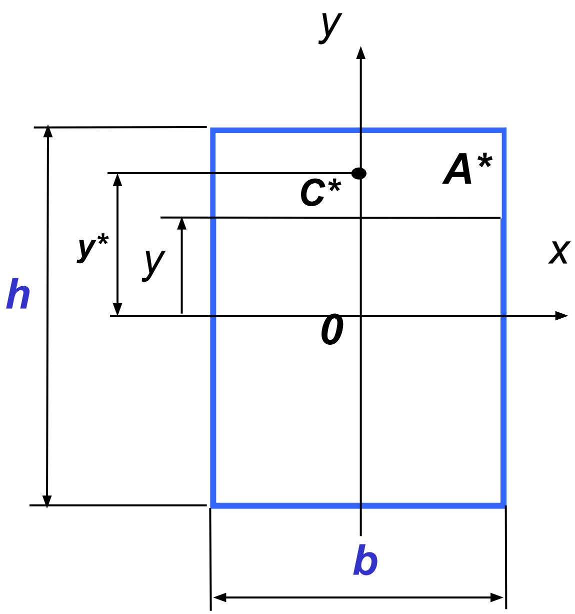
где: $A^*$ – площадь части сечения выше (ниже) характерной точки, (м$^2$);

$y^*$ – расстояние от центра тяжести площади $A^*$ до центра тяжести сечения, (м);

$b$ – ширина сечения в некоторой характерной точке, (м);

$J_x$ – момент инерции всего сечения относительно центральной оси *x* (м$^4$).

Получим формулу для определения статического момента прямоугольного сечения со сторонами **b** и **h** в общем случае, при:




$$0 \le y \le \frac{h}{2}$$

$$S_x^* = A^* \cdot y^* = b \cdot \left(\frac{h}{2} - y\right) \cdot \left(\frac{\left(\frac{h}{2} - y\right)}{2} + y\right) =$$

$$= b \cdot \left(\frac{h}{2} - y\right) \cdot \left(\frac{h}{4} - \frac{y}{2} + y\right) =$$

$$= b \cdot \left(\frac{h}{2} - y\right) \cdot \left(\frac{h}{4} + \frac{y}{2}\right) = b \cdot \left(\frac{h^2}{8} + \frac{hy}{4} - \frac{hy}{4} - \frac{y^2}{2}\right) = b \cdot \left(\frac{h^2}{8} - \frac{y^2}{2}\right) =$$

$$= \frac{b}{2} \cdot \left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)$$

*Итак, получено:*

$$S_x^* = \frac{b}{2} \cdot \left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)$$

## Пример.

*Определить касательные напряжения по высоте прямоугольного (а) и круглого (б) сечения консольной балки, нагруженной положительной силой F на свободном правом торце, построить эпюру **Т**.*

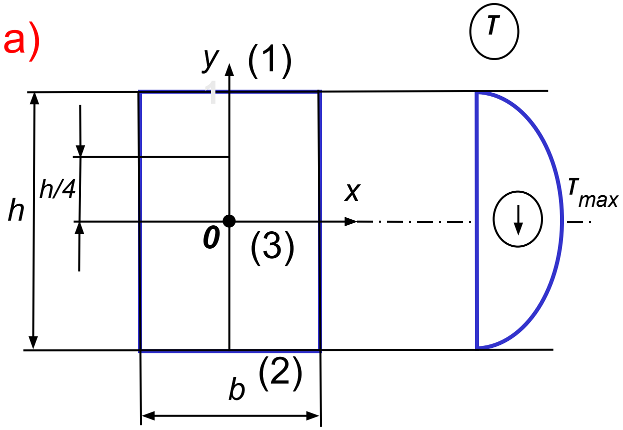
$$\tau_{yz} = \frac{Q_y S_x^*}{J_x b} \qquad S_x^* = A^* \cdot y^*$$

$\tau_{(1)} = 0$ т.к. $S_x^* = 0$ *(A*=0)* $\tau_{(2)} = 0$ т.к. $S_x^* = 0$ *(A*=0)*

***У*=h/4 – коордоната ц.т. сечения выше оси x***

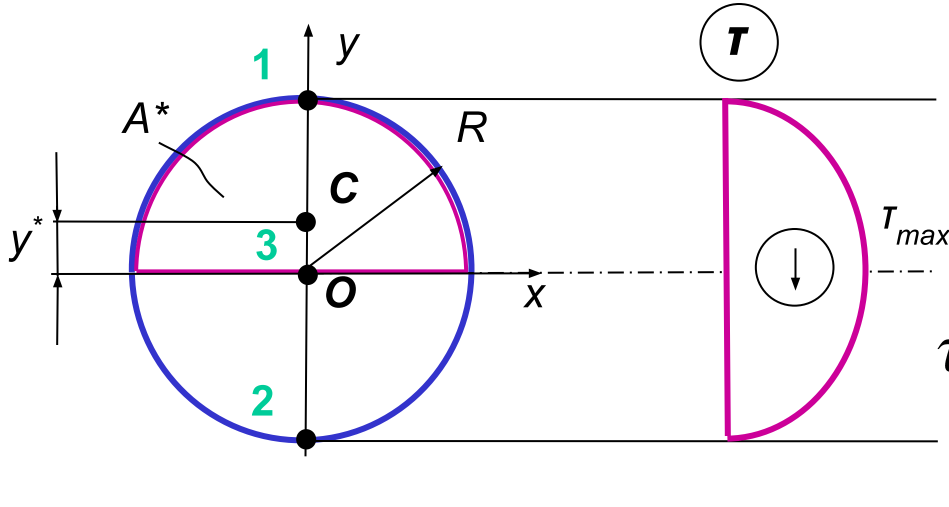
$$\tau_{(3)} = \frac{Q_y \cdot b \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{h}{4}}{\frac{bh^3}{12} \cdot b} = \frac{3Q_y}{2bh} = \tau_{\max}$$ т.к.

а)




$$S_x^* = A^* \cdot y^* = b\frac{h}{2} \cdot \frac{h}{4} = \frac{bh^2}{8} = S_{x_{\max}}$$

## б) брус круглого сечения




$$\tau_{(1)} = 0 \quad \text{т.к.} \quad S_x^* = 0$$

$$\tau_{(2)} = 0 \quad \text{т.к.} \quad S_x^* = 0$$

**Выше точки 1 и ниже точки 3 площадей нет**

$$\tau_{(3)} = \frac{Q_y \cdot \frac{2R^3}{3}}{\frac{\pi R^4}{4} \cdot 2R} = \frac{4Q_y}{3\pi R^2} = \tau_{max}$$

Определим статический момент площади, находящейся выше точки 3:

$$S_x^* = A^* \cdot y^* = \frac{\pi R^2}{2} \cdot \frac{4R}{3\pi} = \frac{2}{3} R^3 = S_{x_{max}}$$

подставим $S_{x_{max}}$ в $\tau_{(3)}$

Площадь эпюры касательных напряжений (также как и для прямоугольного сечения) ограничивается ***параболой второй степени***.

Направление действия напряжений совпадает с направлением действия поперечной силы.

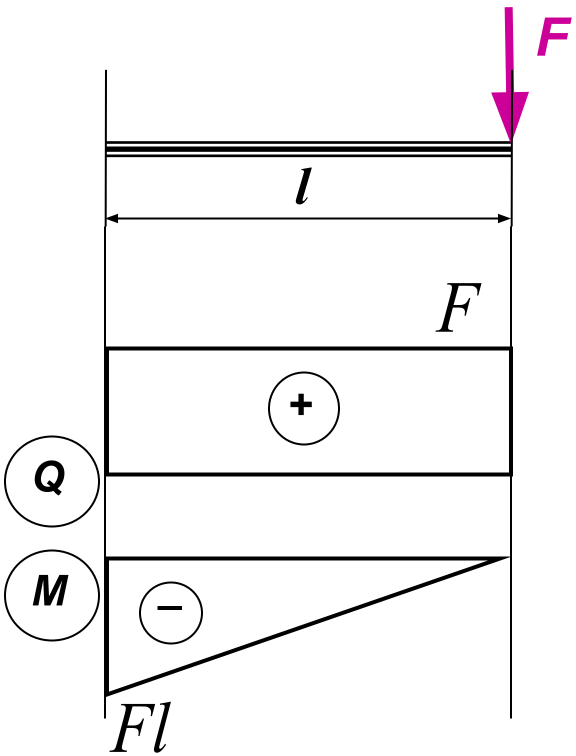
**Вывод:** зависимость $\tau$ от ***y*** в сечении определяется через статический момент $S_x^*$, следовательно,
независимо от формы поперечного сечения,
$\tau_{max}$ достигается в центре его тяжести, т.к. в нем
$S_x^* = max$ т.к. $A^* = \max$.

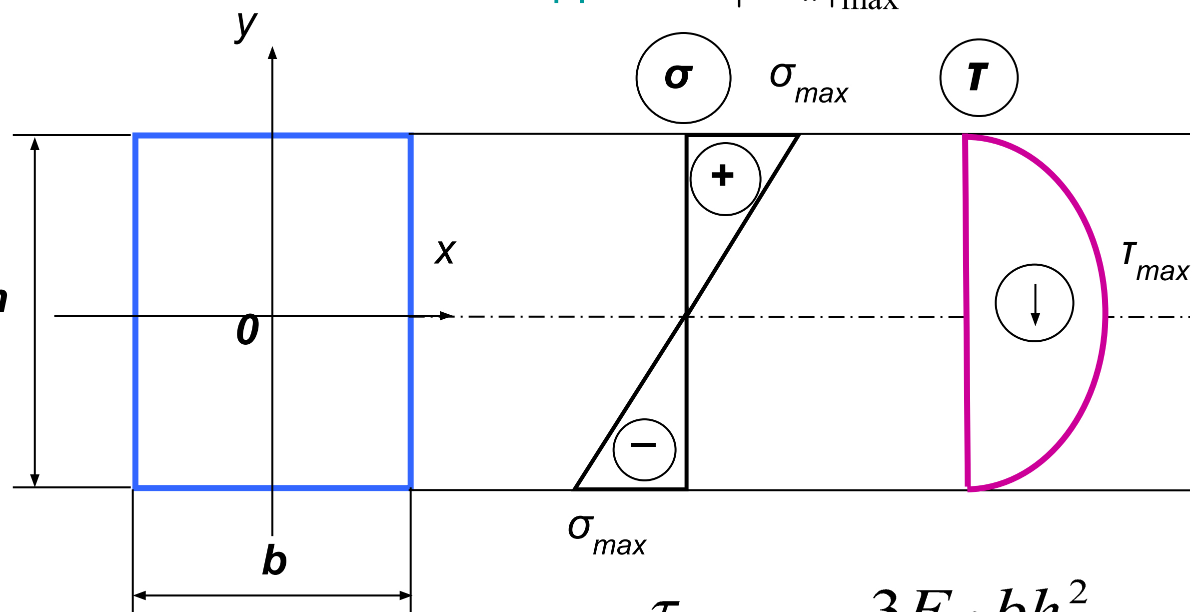
$\tau = 0$ – в верхней и нижней точках по высоте сечения,
т.к. в них $S_x^* = 0$ т.к. $A^* = 0$
выше и ниже характерных точек по верхней и нижней образующим сечения.

***Касательные напряжения**, возникающие в брусе при поперечном изгибе, обычно **на порядок меньше нормальных напряжений**, поэтому в упрощенных расчетах стальных балок на прочность ими пренебрегают.*

Определим различие уровня величин нормальных и касательных напряжений для консольной балки прямоугольного сечения.

Опасное сечение – заделка: $\left|M_x\right|_{\max} = Fl \qquad Q = F$




$$\frac{\tau_{\max}}{\sigma_{\max}} = \frac{3F \cdot bh^2}{2bh \cdot 6Fl} = \frac{h}{4l}$$

**Нормальные напряжения (ф.Навье):**

$$\sigma_{z\,max} = \frac{\left|M_x\right|_{max}}{W_x} = \frac{Fl \cdot 6}{bh^2}$$

$$\frac{\tau_{max}}{\sigma_{max}} \approx \frac{h}{l}$$

**Касательные напряжения (ф.Журавского):**

$$\tau_{zy\,\max} = \frac{F \cdot S_x^*}{J_x \cdot b} = \frac{F \cdot b \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{h}{4}}{\frac{bh^3}{12} \cdot b} = \frac{3}{2}\frac{F}{bh}$$