

Оператор примитивной рекурсии

Операция примитивной рекурсии

Будем говорить, что функция

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n, y)$$

получена из функций g и h в результате применения **операции примитивной рекурсии**, если:

$$1) n \neq 0$$

$$\{ f(x_1, \dots, x_n, 0) = g(x_1, \dots, x_n)$$

$$f(x_1, \dots, x_n, y + 1) = h(x_1, \dots, x_n, y, f(x_1, \dots, x_n, y)) \}$$

(схема примитивной рекурсии с параметрами)

Операция примитивной рекурсии

Будем говорить, что функция

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n, y)$$

получена из функций g и h в результате применения **операции примитивной рекурсии**, если:

$$2) n = 0, \quad g \in N$$

$$\begin{cases} f(0) = g \\ f(y + 1) = h(y, f(y)) \end{cases}$$

(схема примитивной рекурсии без параметров)



Операция примитивной рекурсии

$$\begin{cases} f(x_1, \dots, x_n, 0) = g(x_1, \dots, x_n) \\ f(x_1, \dots, x_n, y + 1) = h(x_1, \dots, x_n, y, f(x_1, \dots, x_n, y)) \end{cases}$$

Первое равенство: **начальное условие**

Второе равенство: **рекурсивный шаг**

Обозначение:



$$f = \text{Rec}(g, h)$$

$$f(x_1, \dots, x_n, y) = \text{Rec}(g(x_1, \dots, x_n), h(x_1, \dots, x_n, y, z))$$

$$f(x_1, \dots, x_n, y) = \begin{cases} g(x_1, \dots, x_n) \\ h(x_1, \dots, x_n, y, z) \end{cases}$$

С помощью операции примитивной рекурсии конструируется функция f от $(n + 1)$ переменной из некоторых частичных функций g и h , причем функция g имеет n переменных, а функция h имеет $(n + 2)$ переменные

Примитивно рекурсивные функции

Функция f называется **примитивно рекурсивной**, если она может быть получена из простейших функций с помощью конечного числа применений операторов суперпозиции и примитивной рекурсии.

Некоторые примитивно рекурсивные функции

1) Возведение в степень $f(x, y) = x^y$

2) Факториал $f(x) = x!$

3) Усеченное вычитание единицы

$$f(x) = x \dot{-} 1 = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ x - 1, & x > 0 \end{cases}$$

Схема примитивной рекурсии

$$\begin{cases} f(0) = g = 0 \\ f(y + 1) = h(y, f(y)) = y \end{cases}$$

Некоторые примитивно рекурсивные функции

4) Усеченная разность

$$f(x, y) = x \dot{-} y = \begin{cases} 0, & x < y \\ x - y, & x > y \end{cases}$$

Схема примитивной рекурсии

$$f(x, 0) = x \dot{-} 0 = x$$

$$f(x, y + 1) = x \dot{-} (y + 1) = (x \dot{-} y) \dot{-} 1$$

$$\begin{cases} f(x, 0) = g(x) = x \\ f(x, y + 1) = h(x, y, f(y)) = f(x, y) \dot{-} 1 \end{cases}$$

Некоторые примитивно рекурсивные функции

5) Модуль разности

$$f(x, y) = |x - y|$$

Суперпозиция функций

$$|x - y| = |x \dot{-} y| + |y \dot{-} x|$$