Задание №19 из базового ЕГЭ по математике

Признаки делимости на 2 и 4:

- **Число делится на 2, если оно заканчивается четной цифрой или нулём.**

Числа 2346 и 3650 - делятся на 2. Число 4521 - не делится на 2.

- **Число делится на 4, если две последние его цифры нули или образуют число, делящееся на 4. В остальных случаях - не делится.**

Числа 31700 и 16608 -делятся на 4. 215634 – не делится на 4.

Признаки делимости на 3 и 9:

- **На 3 делятся только те числа, у которых сумма цифр делится на 3.**

Числа 17835 и 5472 – делятся на 3. Число 105499 – не делится на 3.

- **На 9 делятся только те числа, у которых сумма цифр делится на 9.**

Числа 2376 и 342000 – делятся на 9. Число 106499 – не делится на 9.

Признаки делимости на 8 и 6:

- **Число делится на 8, если три последние цифры его нули или образуют число, делящееся на 8. В остальных случаях - не делится.**

Числа 125000 и 111120 – делятся на 8. Числа 170004 и 124300 – не делятся на 8.

- **Число делится на 6, если оно делится одновременно на 2 и на 3. В противном случае - не делится.**

Числа 126 и 254610 – делятся на 6. Числа 3585 и 6574 - не делятся на 6.

Признаки делимости на 5 и 25:

- **На 5 делятся числа, последняя цифра которых 0 или 5. Другие - не делятся.**

Числа 245 и 56780 – делятся на 5. Числа 451 и 678 – не делятся на 5.

- **На 25 делятся числа, две последние цифры которых нули или образуют число, делящееся на 25 (т. е. числа, оканчивающиеся на 00, 25, 50 или 75). Другие не делятся.**

Числа 7150 и 345600 – делятся на 25. Число 56755 – не делится на 25.

Признаки делимости на 10, 100 и 1000:

- **На 10 делятся только те числа, последняя цифра которых нуль, на 100 - только те числа, у которых две последние цифры нули, на 1000 - только те, у которых три последние цифры нули.**

Число 34680 – делится на 10. Число 56700 – делится на 100 и на 10. Число 87549000 - делится на 10, 100 и 1000. Числа 75864, 7776539 и 9864032 – не делятся на 10, 100 и 1000.

Признак делимости на 11:

- **На 11 делятся только те числа, у которых сумма цифр, занимающих нечетные места, либо равна сумме цифр, занимающих четные места, либо разнится от нее на число, делящееся на 11.**

Число 103785 делится на 11, так как сумма цифр, занимающих нечетные места, 1+3+8=12 равна сумме цифр, занимающих четные места 0+7+5=12.

Число 9163627 делится на 11, так как сумма цифр, занимающих нечетные места, есть 9 + 6 + 6 + 7 = 28, а сумма цифр, занимающих четные места, есть 1 + 3 +2 =6; разность между числами 28 и 6 есть 22, а это число делится на 11.
Число 461025 не делится на 11, так как числа 4+ 1 + 2 = 7 и б +0 + 5=11 не равны друг другу, а их разность 11 -7 = 4 на 11 не делится.

Делимость квадратов натуральных чисел:

- Если число *а* : *4*, то a^2: *16;*
- Если число *а* : *7*, то a^2: *49;*
- Если число a^2: 25, то число *а* :*5;*
- Если число a^2: 81, то число *а* :*9*.

Делимость на составные числа:

- Если нужно выяснить, делится ли заданное число на некоторое составное число, необходимо разложить это составное число на множители (признаки которых вам известны) и проверить делимость исходного числа на эти множители.
- Если число делится на 27, то это число должно делится на 9 и 3;
- Если число делится на 24, то оно должно делится на 6 и 4;
- На какие числа должно делится число, делящееся на 18? На 36?

Деление с остатком:

- Известно, что число при делении на 3 даёт в остатке 2. Найти несколько таких чисел. Если число делится на 3, его можно представить в виде : $3n$ (n – порядковый номер числа). Если число дает в остатке 2, его можно представить в виде: $3n + 2$. Получаем числа: при $n = 1$ – 5, при $n = 2$ – 8, при $n = 5$ – 17, при $n = 12$ – 38.
- Известно, что число при делении на 5, даёт в остатке 3. Найдите любые 4 таких числа. Если число делится на 5, его можно представить в виде : $5n$. Если число дает в остатке 3, его можно представить в виде: $5n + 3$.

Получаем числа: при $n = 4$ – 23, при $n = 7$ – 38, при $n = 10$ – 53, при $n = 15$ – 78.

- Известно, что число при делении на 7, даёт в остатке 4. Найдите три таких числа.
- Известно, что число при делении на 4, даёт в остатке 3. Найдите такие числа стоящие на 5, 10 и 12 местах.
- Что означает запись: $8n + 3$?
- Придумайте задание к следующей записи:

$2n + 1$.

Задача №1. Вычеркните в числе 123456 три цифры так, чтобы получившееся трёхзначное число делилось на 27. В ответе укажите получившееся число.

Решение:

Если число делится на 27, тогда оно делится на 3 и на 9. Число делится на 9, тогда и только тогда, когда сумма цифр числа делится на 9. Число делится на 3, тогда и только тогда, когда сумма цифр числа делится на 3. Заметим, что, если число делится на 9,то оно делится и на 3. Сумма цифр числа 123456 равна 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21. Вычеркнув числа 2, 4 и 6 получим, число, сумма цифр которого равна девяти. Девять делится на девять.

Ответ: 135.

Задача №2. Вычеркните в числе 141565041 три цифры так, чтобы получившееся число делилось на 30. В ответе укажите ровно одно получившееся число.

Решение:

Если число делится на 30, то оно также делится на 3 и на 10. Поэтому в последнем разряде числа должен быть ноль. Тогда вычёркиваем 41. Остаётся 1415650. Для того, чтобы число делилось на три необходимо, чтобы сумма цифр была кратна трём, значит, нужно вычеркнуть цифру 1 или цифру 4. Таким образом, получаем числа 145650, 115650 и 415650

Ответ: 145650, 115650 или 415650.

- **Задача №3.** Вычеркните в числе 74513527 три цифры так, чтобы получившееся число делилось на 15. В ответе укажите ровно одно получившееся число.
- **Задача №4.** Вычеркните в числе 85417627 три цифры так, чтобы получившееся число делилось на 18. В ответе укажите ровно одно получившееся число.

Задача №5. Приведите пример шестизначного натурального числа, которое записывается только цифрами 1 и 2 и делится на 24. В ответе укажите ровно одно такое число.

Решение:

Если число делится на 24, то оно также делится на 3 и на 8.

.Перебрав трёхзначные числа из 1 и 2, получим, что только 112 делится на 8. Это число образует последние три цифры искомого числа.

Последние три цифры 112 дают к сумме 4. Рассмотрим первые три цифры. Их сумма может быть от 3 до 6. Условиям задачи удовлетворяет сумма цифр, равная 5. Троек с данной суммой цифр три: 122, 212, 221.

Таким образом, подходят числа: 122112, 212112, 221112.

Задача №6. Найдите шестизначное натуральное число, которое записывается только цифрами 1 и 0 и делится на 24.

Решение:

Чтобы число делилось на 24 оно должно делится на 3 и на 8.

Число делится на 8, если три его последние цифры образуют число, делящееся на 8. Искомое число записывается только нулями и единицами, значит, оно заканчивается на 000.

Число делится на 3, если его сумма цифр числа делится на 3. По скольку три последние цифры числа нули, первые три должны быть единицами.

Таким образом, единственное число, удовлетворяющее условию за дачи, это число 111 000.

Ответ: 111 000.

Задача №7. Найдите шестизначное нату ральное число, которое записывается только циф рами 2 и 0 и делится на 24.

Задача №8. Найдите четырёхзначное число, кратное 22, произведение цифр которого равно 24. В ответе укажите какое-нибудь одно такое число.

Решение:

Чтобы число abcd делилось на 22, оно должно делиться и на 2, и на 11. Произведение цифр 24 можно предста вить многими способами, основой которых являются произведения - 1и24, 2и12, 8и3, 6и4. Признак делимости на 11: a+c=b+d или a+c=b+d+11 или a+c+11=b+d. Кроме того, раз число делится на 2, то оно должно быть чет ным. Согласно перечисленным признакам можно подо брать следующие числа: 4312, 2134, 1342, 3124

Задача №9. Приведите пример трёхзначного числа, сумма цифр которого равна 20, а сумма квадратов цифр делится на 3, но не делится на 9.

Решение:

Разложим число 20 на слагаемые различными способами:

20 = 9 + 9 + 2 = 9 + 8 + 3 = 9 + 7 + 4 = 9 + 6 + 5 = 8 + 8 + 4 = 8 + 7 + 5 = 8 + 6 + 6 = 7 + 7 + 6.

При разложении способами 1−4, 7 и 8 суммы квадратов чисел не кратны трём. При разложении пятым способом сумма квадратов кратна девяти. Разложение шестым способом удовлетворяет условиям задачи. Таким образом, условию задачи удовлетворяет любое число, записанное цифрами 5, 7 и 8, например, число 578.

Задача №10. Найдите четырёхзначное число, кратное 88, все цифры которого различны и чётны. В ответе укажите какое-нибудь одно такое число.

Решение:

Число делится на 88, если оно делится на 8 и на 11. Ис пользуя признак делимости на 8, и учитывая, что все цифры искомого числа должны быть чётны и различны получаем, что последними цифрами числа могут быть: 024, 048, 064, 208, 240, 248, 264, 280, 408, 480, 608, 624, 640, 648, 680, 824, 840, 864. Используя признак делимости на 11 получим, что условию задачи удовлетворяют числа: 6248, 8624, 2640.

Ответ: 2640, 6248 или 8624.

Задача №11. Приведите пример трёхзначного натурального числа, кратного 4, сумма цифр которого равна их произведению. В ответе укажите ровно одно такое число.

Решение:

Можно заметить, что если среди цифр есть хотя бы две единицы, то равенство невозможно, так как сумма будет больше произведения. То же самое, если единиц нет вообще. В этом случае произведение будет слишком большое. Таким образом, среди цифр есть ровно одна единица. Число делится на 4, значит, последняя цифра чётная, а это значит, что произведение тоже чётное. А значит, и сумма. И так как последняя цифра чётная, то оставшиеся две цифры должны быть одной чётности. А так как мы выяснили, что среди цифр есть ровно одна единица, то эти числа нечётные. Под эти ограничения подходят числа: 132, 136, 152, 156, 172, 176, 192, 196, 312, 316, 512, 516, 712, 716, 912, 916, из которых удовлетворяют всем условиям только числа 132 и 312.

- **Задача №12.** Найдите четырёхзначное число, кратное 18, произведение цифр которого равно 24. В ответе укажите какое-нибудь одно такое число.
- **Задача №13.** Найдите трёхзначное число, сумма цифр которого равна 25, если известно, что его квадрат делится на 16.

- **Задача №14.** Приведите пример трёхзначного нату ральнoго числа, которое при делении на 3, на 5 и на 7 даёт в остатке 1 и цифры которого расположены в порядке убывания слева направо. В ответе укажите ровно одно такое число.

Решение:

Если число имеет одинаковые остатки по каким-то модулям, то оно имеет такой же остаток по модулю, являющемуся НОК этих модулей. То есть в данном случае по модулю 105. Тогда наше число 105k + 1. Переберём все возможные варианты: 106, 211, 316, 421, 526, 631, 736, 841, 946. Условиям задачи удо влетворяют числа 421, 631 и 841.

Ответ: 421; 631; 841.

Задача №15. Приведите пример трёхзначного натурального числа, большего 500, которое при делении на 3, на 4 и на 5 даёт в остатке 2 и в записи которого есть только две различные цифры. В ответе укажите ровно одно такое число.

Решение:

Раз число даёт один и тот же остаток по модулю 3, 4 и 5, то оно даёт такой же остаток и по модулю 3•4•5=60. А значит, число имеет вид $500 \le 60k+2 \le 999$ Все числа, удовлетворяющие этому неравенству: 542, 602, 662, 722, 782, 842, 902, 962. Из них удовлетворяют условию про две различные цифры: 662, 722.

Задача №16. Приведите пример трёхзначного натурального числа, большего 600, которое при делении на 4, на 5 и на 6 даёт в остатке 3 и цифры которого расположены в порядке убывания слева направо. В ответе укажите ровно одно такое число.

Решение:

Так как число даёт одинаковый остаток по модулям 4, 5 и 6, то оно также даёт такой же остаток и по модулю 60. То есть число имеет вид $60k + 3$ Все такие числа: 603, 663, 723, 783, 843, 903, 963. Из них подходят под последнее условие только 843 и 963.

Задача №17. Найдите трёхзначное натуральное число, большее 400, которое при делении на 6 и на 5 даёт равные ненулевые остатки и первая слева цифра которого является средним арифметическим двух других цифр. В ответе укажите какое-нибудь одно такое число.

Решение:

Число имеет одинаковые остатки при делении на 5 и на 6, следовательно, число имеет тот же остаток при делении на 30, причём этот остаток не равен нулю и меньше пяти. Таким образом, искомое число может иметь вид: *30n+1, 30n+2, 30n+3,3n+4.*

При *n=1-13* Ни одно из чисел не больше 400

При *n=14*: 421, 422, 423, 424. Первая слева цифра не является средним арифметическим двух других цифр

При *n=15*: 451, 452, 453, 454. Число 453 удовлетворяет всем условиям задачи.

875.

Задача №18. Трёхзначное число при делении на 10 даёт в остатке 3. Если последнюю цифру числа перенести в начало его записи, то полученное число будет на 72 больше первоначального. Найдите исходное число.

Решение:

Пусть число имеет вид xyz

Тогда условие записывается

так: $\begin{cases} x \geq 0, y, z \leq 9 \\ z = 3 \\ 100x + 10y + z = 100z + 10x + y - 72 \end{cases}$

Подставив значение z = 3 в третье выражение и преобразовав его, получим, что 10x + y = 25

Подходит только пара x = 2, y = 5.

Таким образом, условиям задачи удовлетворяет число 253.

- **Задача №19.** Найдите наименьшее трёхзначное число, которое при делении на 2 даёт остаток 1, при делении на 3 даёт остаток 2, при делении на 5 даёт остаток 3 и которое записано тремя различными нечётными цифрами.
- **Задача №20.** Найдите трехзначное натуральное число, большее 500, которое при делении на 4, на 5 и на 6 дает в остатке 2, и в записи которого есть только две различные цифры. В ответе укажите какое-нибудь одно такое число.