# Векторы

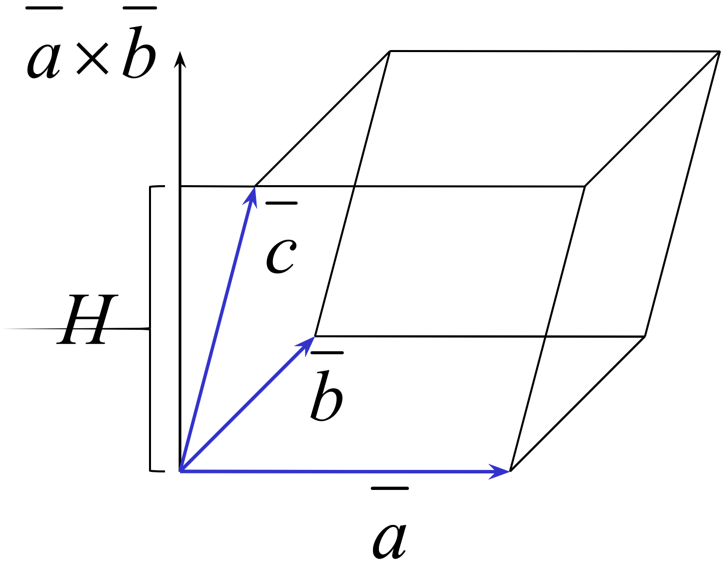
# Смешанное произведение векторов.

- **Смешанным произведением** векторов $\overline{a}, \overline{b}$ и $\overline{c}$ называется число, равное скалярному произведению вектора $\overline{a} \times \overline{b}$ на вектор $\overline{c}$

Обозначение:

$$\left(\overline{a} \times \overline{b}\right) \cdot \overline{c} \qquad \overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \overline{c} \qquad \left(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}\right)$$

# Геометрически:




Смешанное произведение трех векторов равно объему параллелепипеда, построенного на этих векторах, взятому со знаком «+», если эти векторы образуют правую тройку, и со знаком «-», если они образуют левую тройку.

$$\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)\cdot\overline{c}=\left|\overline{a}\times\overline{b}\right|\cdot pr_{\overline{a}\times\overline{b}}\,\overline{c}=S\cdot\left(\pm H\right)=\pm V$$

# Свойства смешанного произведения.

1) $$\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)\cdot\overline{c}=\left(\overline{b}\times\overline{c}\right)\cdot\overline{a}=\left(\overline{c}\times\overline{a}\right)\cdot\overline{b}$$

или $$\overline{a}\cdot\overline{b}\cdot\overline{c}=\overline{b}\cdot\overline{c}\cdot\overline{a}=\overline{c}\cdot\overline{a}\cdot\overline{b}$$

смешанное произведение не меняется при циклической перестановке векторов.

2) $$\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)\cdot\overline{c}=\overline{a}\cdot\left(\overline{b}\times\overline{c}\right)$$

смешанное произведение не меняется при перестановке знаков векторного и скалярного умножения

3) $\quad \overline{a}\cdot\overline{b}\cdot\overline{c} = -\overline{a}\cdot\overline{c}\cdot\overline{b} = -\overline{b}\cdot\overline{a}\cdot\overline{c} = -\overline{c}\cdot\overline{b}\cdot\overline{a}$

смешанное произведение меняет свой знак на противоположный при перемене мест любых двух векторов-сомножителей.

4) $\quad \overline{a}\cdot\overline{b}\cdot\overline{c} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ компланарны

# Смешанное произведение векторов, заданных своими координатами.

$$\overline{a} = a_x \overline{i} + a_y \overline{j} + a_z \overline{k}$$

$$\overline{b} = b_x \overline{i} + b_y \overline{j} + b_z \overline{k}$$

$$\overline{c} = c_x \overline{i} + c_y \overline{j} + c_z \overline{k}$$

$$\boxed{\overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \overline{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}}$$

Смешанное произведение векторов равно определителю третьего порядка, составленному из координат перемножаемых векторов.

Доказательство:

$$\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\cdot\bar{c}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}\cdot\left(c_x\bar{i}+c_y\bar{j}+c_z\bar{k}\right)=$$

$$=\left(\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}\bar{i}-\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}\bar{j}+\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}\bar{k}\right)\cdot\left(c_x\bar{i}+c_y\bar{j}+c_z\bar{k}\right)=$$

$$= \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \cdot c_x - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \cdot c_y + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \cdot c_z$$

или

$$\overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \overline{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

# Некоторые приложения смешанного произведения.

- компланарность векторов:

$$\overline{a}\cdot\overline{b}\cdot\overline{c}=0 \quad\Leftrightarrow\quad \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}=0 \quad\Leftrightarrow\quad \overline{a},\overline{b},\overline{c}$$

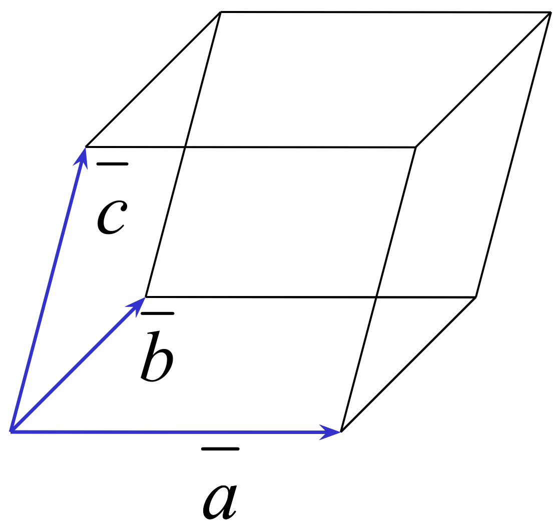
компланарны

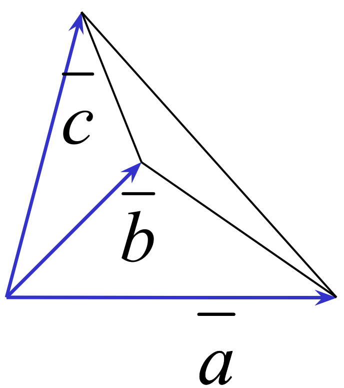
- определение взаимной ориентации векторов в пространстве:

$$\overline{a}\cdot\overline{b}\cdot\overline{c} > 0\,,\quad \text{то}\quad \overline{a},\overline{b},\overline{c}\qquad \text{- правая тройка}$$

$$\overline{a}\cdot\overline{b}\cdot\overline{c} < 0\,,\quad \text{то}\quad \overline{a},\overline{b},\overline{c}\qquad \text{- левая тройка}$$

- определение объемов параллелепипеда и треугольной пирамиды:



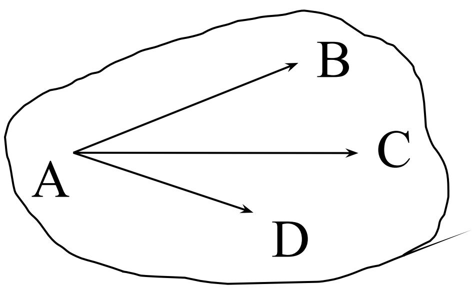




$$V_{пар\text{-}да} = \left|\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}\right|$$

$$V_{пир} = \frac{1}{6}\left|\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}\right|$$

Пример 1. Доказать, что точки A(5;7;-2), B(3;1;-1), C (9;4;-4), D(1;5;0) лежат в одной плоскости.

Решение. Покажем, что векторы $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$ лежат в одной плоскости, т.е. компланарны.




$$\overline{AB} = (-2; -6; 1) \quad \overline{AC} = (4; -3; -2)$$

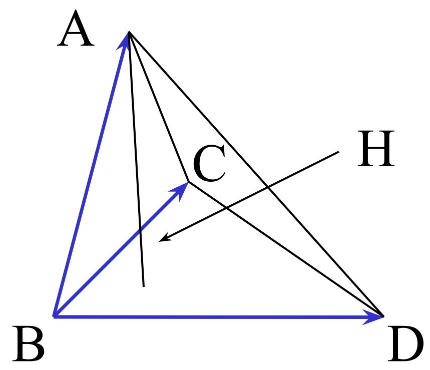
$$\overline{AD} = (-4; -2; 2)$$

$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AD} = \begin{vmatrix} -2 & -6 & 1 \\ 4 & -3 & -2 \\ -4 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Векторы компланарны, следовательно точки A, B, C и D лежат в одной плоскости.

Пример 2. Найти объем пирамиды и длину высоты, опущенной на грань BCD, если даны координаты вершин пирамиды: A(0;0;1), B(2;3;5), C(6;2;3), D(3;7;2)

Решение.




$$\overline{BA} = (-2; -3; -4) \quad \overline{BD} = (1; 4; -3)$$

$$\overline{BC} = (4; -1; -2)$$

$$V = \frac{1}{6} \cdot \left| \overline{BA} \cdot \overline{BD} \cdot \overline{BC} \right| = \frac{1}{6} \cdot \begin{vmatrix} -2 & -3 & -4 \\ 1 & 4 & -3 \\ 4 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 20$$

$$V=\frac{1}{3}S_{OCH}\cdot H \quad\Rightarrow\quad H=\frac{3V}{S_{OCH}}$$

$$S_{OCH}=\frac{1}{2}\cdot\left|\overline{BD}\times\overline{BC}\right|$$

$$\overline{BD}\times\overline{BC}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 1 & 4 & -3\\ 4 & -1 & -2\end{vmatrix}=-11\cdot\bar{i}-10\cdot\bar{j}-17\cdot\bar{k}$$

$$\left|\overline{BD}\times\overline{BC}\right|=\sqrt{11^2+10^2+17^2}=\sqrt{510}$$

$$S_{OCH}=\frac{\sqrt{510}}{2}$$

$$H=\frac{3\cdot V}{S_{OCH}}=\frac{3\cdot 20\cdot 2}{\sqrt{510}}=\frac{120}{\sqrt{510}}$$

Ответ. V=20 (ед$^3$) , $H=\frac{120}{\sqrt{510}}$