# ВЫПУКЛЫЙ АНАЛИЗ

## ЛЕКЦИЯ 17

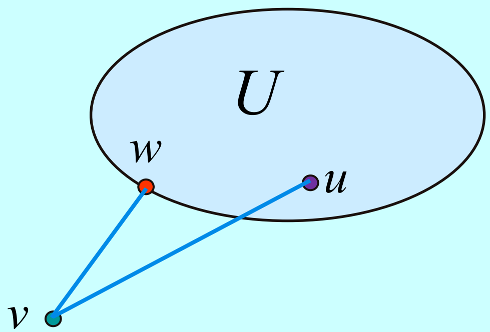
### 6. ТЕОРЕМЫ ОБ ОТДЕЛИМОСТИ ВЫПУКЛЫХ МНОЖЕСТВ

# 6. ТЕОРЕМЫ ОБ ОТДЕЛИМОСТИ ВЫПУКЛЫХ МНОЖЕСТВ

## 6.1. Проекция точки на множество

**Определение 1.** *Пусть* $U \subset R^n$. *Проекцией точки* $v \in R^n$ *на множество* $U$ *называется точка* $w = P_U(v) \in U$, *удовлетворяющая условию*

$$\| w - v \| = \inf_{u \in U} \| u - v \|.$$




Справедливо следующее утверждение.

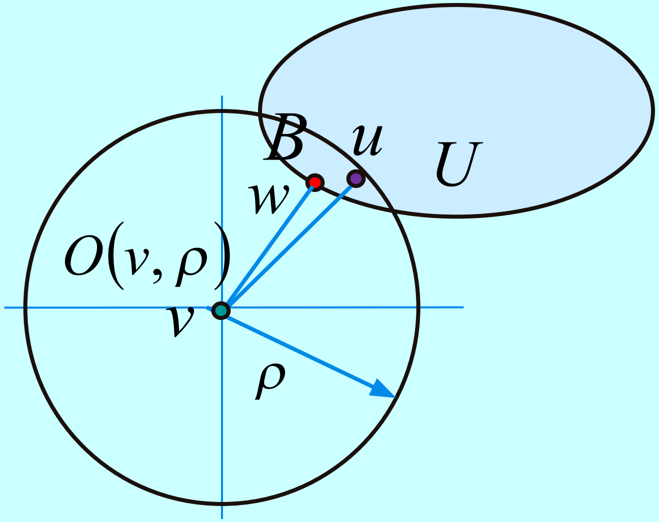
**Теорема 1.** *Пусть* $U \subset R^n$ *замкнутое множество. Тогда для всякой точки* $v \in R^n$ *существует ее проекция на это множество. Если множество* $U$ *выпукло, то проекция единственна и равенство* $w = P_U(v)$ *имеет место тогда и только тогда, когда*

$$\langle w - v, u - w \rangle \geq 0, \forall u \in U. \qquad (1)$$

**Доказательство.** Задача построения $w = P_U(v)$ - проекции точки $v$ на множество $U$ сводится к минимизации функции $I : U \to R^1$, определенной равенством

$$I(u) = \| u - v \|^2 = \langle u - v, u - v \rangle. \qquad (2)$$

Очевидно, что точка минимума этой функции, если она существует, должна




принадлежать множеству $B = \bar{O}(v,\rho) \cap U$,

где $\bar{O}(v,\rho)$ шар столь большого радиуса, что

для него $B \neq \varnothing$. Множество $B$ компактно

и выпукло, а функция $I$ непрерывна, поэтому по

теореме Вейерштрасса точка минимума $w \in U$

функции $I$ действительно существует, т.е.

$P_U(v) = w$. По **теореме 5.2** (минимум гладкой выпуклой функции) выводим

$$\left\langle \overset{2(u-v)|_{u=w}}{I'(w)}, u - \overset{\text{точка минимума}}{w} \right\rangle \geq 0 \Rightarrow \langle w - v, u - w \rangle \geq 0 \;\forall u \in U.$$

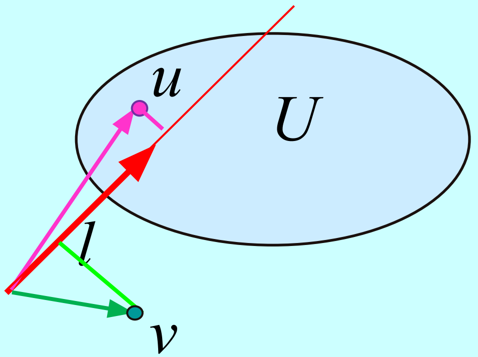
Единственность точки $w = P_U(v)$ следует из строгой выпуклости функции (2).

Теорема доказана.

**6.2. Отделимость точки и множества.** Точку и выпуклое множество можно разделить гиперплоскостью так, что они будут находиться в разных замкнутых полупространствах, определяемых этой гиперплоскостью.

**Теорема 2.** ***Пусть*** $U \subset R^n$ ***выпуклое множество. Тогда для любой точки*** $v \notin \operatorname{int} U$ ***существует вектор*** $l \neq 0,$ ***такой, что***

$$\langle l,\ u \rangle \geq \langle l, v \rangle, \forall u \in \bar{U},$$

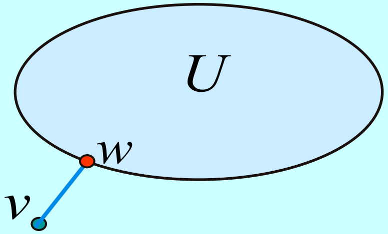



***если при этом*** $v \notin \bar{U},$ ***то***

$$\langle l,\ u \rangle \geq \langle l, v \rangle + \|l\|^2, \forall u \in \bar{U}.$$

**Доказательство.** Сначала рассмотрим случай $v \notin \bar{U}.$ Множество $\bar{U}$ замкнуто и выпукло. Тогда согласно **теореме 1** существует проекция $w = P_{\bar{U}}(v) \in \bar{U}$ точки $v$ на множество $\bar{U},$ причем

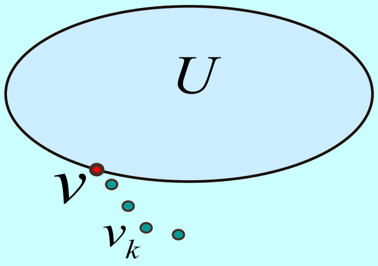
$$\langle w - v, u - w \rangle \geq 0, \forall u \in \bar{U}. \qquad (1)$$




Заметим, что $w - v \neq 0,$ так как $v \notin \bar{U}.$ Положим $l = w - v.$ Тогда

$$\left\langle \overset{w-v}{l}, u-v \right\rangle = \langle w-v, u-v\rangle = \langle w-v, u-v \pm w\rangle = \langle w-v, (u-w)+(w-v)\rangle =$$

$$= \underbrace{\langle w-v, u-w\rangle}_{(1)\Rightarrow\, \ge 0} + \left\langle \overset{l}{w-v}, \overset{l}{w-v} \right\rangle \ge \langle l, l\rangle = \|l\|^2 \Rightarrow$$




$$\langle l, u-v\rangle \ge \|l\|^2 \Rightarrow \langle l, u\rangle \ge \langle l, v\rangle + \|l\|^2 \quad \forall u \in \bar{U}$$

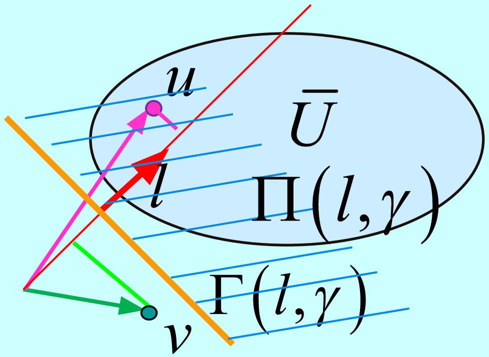
и для рассматриваемого случая теорема доказана. $\langle l, u\rangle \ge \langle l, v\rangle + \|l\|^2, \forall u \in \bar{U}$

Пусть теперь $v \in \bar{U} \setminus \operatorname{int} U$. Тогда $v \in \partial(U)$ и существует последовательность $\{v_k\} \to v, v_k \notin \bar{U}, k = 1,2,\ldots$ Для каждого номера $k = 1,2,\ldots$ по доказанному выше существует вектор $l_k \ne 0$ такой, что

$$\langle l_k, u\rangle > \langle l_k, v_k\rangle, \forall u \in \bar{U}. \qquad (1)$$

Можно считать, что $\|l_k\| = 1, k = 1,2\ldots$ . Если бы это было не так, то обе части неравенства (1) следовало бы поделить на величину $\|l_k\| > 0, \quad k = 1,2,\ldots$ Переходя, если это необходимо, к подпоследовательности, принимаем, что $\{l_k\} \to l.$ При этом $\|l\| = 1 \ne 0.$ В неравенстве (1) устремим $k$ в бесконечность. В пределе получим требуемое соотношение. $\langle l, u\rangle \ge \langle l, v\rangle, \forall u \in \bar{U}$ Теорема доказана.

Доказанной теореме придадим следующий геометрический смысл. Пусть $v \notin \bar{U}$




и $l \neq 0 -$ вектор существование которого доказано в **теореме 2.** Этот вектор будет нормальным для гиперплоскости

$$\Gamma(l,\gamma) = \left\{ u \in R^n \;\middle|\; \langle l,u \rangle = \gamma \right\}, \qquad (2)$$

разделяющей точку $v$ и множество $U$. При изменении величины $\gamma$ гиперплоскость будет перемещаться параллельно самой себе. Она будет оставаться разделяющей, если

$\langle l,u\rangle \geq \langle l,v\rangle,\ \forall u\in\bar{U} \Rightarrow \inf\limits_{u\in\bar{U}}\langle l,u\rangle \geq \langle l,v\rangle$

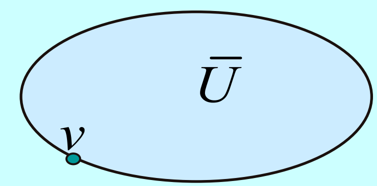
$$\gamma \in \left[ \langle l,v \rangle, \inf_{u\in\bar{U}} \langle l,u \rangle \right].$$

Полупространство, содержащее множество $\bar{U}$, имеет вид

$$\Pi(l,\gamma) = \left\{ u \in R^n \;\middle|\; \langle l,u \rangle \geq \gamma \right\}.$$

Для него гиперплоскость $\Gamma(l,\gamma)$ служит границей.

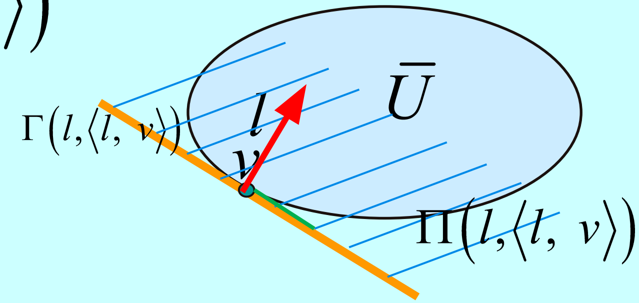
Пусть теперь $v \in \partial(U) = \bar{U} \setminus \operatorname{int} U$. В этом случае $v \in \bar{U}$ и должно выполняться неравенство $\inf\limits_{u\in\bar{U}} \langle l,u \rangle \leq \langle l,\ v \rangle$. Тогда




$$\inf_{u\in\bar{U}} \langle l,u \rangle = \langle l,v \rangle \Rightarrow \gamma \in \left[ \langle l,v \rangle, \inf_{u\in\bar{U}} \langle l,u \rangle \right] \Rightarrow \gamma = \langle l,\ v \rangle \Rightarrow$$

$$v \in \Gamma(l,\gamma) = \Gamma\left(l, \langle l,\ v \rangle\right).$$

В этом случае разделяющая гиперплоскость $\Gamma\left(l,\langle l,\ v\rangle\right)$ и множество $\bar{U}$ имеют общую точку $v.$



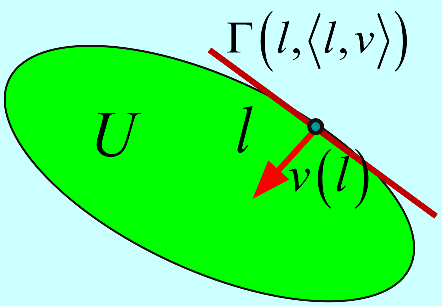

Гиперплоскость $\Gamma\left(l,\langle l,\ v\rangle\right)$ называется опорной к множеству $U$ в точке $v\in\bar{U}.$

Полупространство $\Pi\left(l,\langle l,\ v\rangle\right)$ называется опорным к множеству $U$ в точке $v\in\bar{U}.$

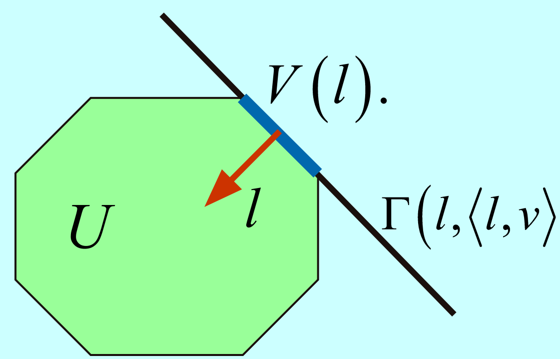
Вектор $l$ называют опорным вектором к множеству $U$ в точке $v.$

Заметим, что если множество $U$ компактно, то любой вектор $l\in S(0,1)$ может служить опорным к множеству $U$ в некоторой точке $v(l)\in\partial U.$

Эта точка определяется из условия $\langle l,\ v(l)\rangle=\min\limits_{v\in U}\langle l,\ v\rangle.$

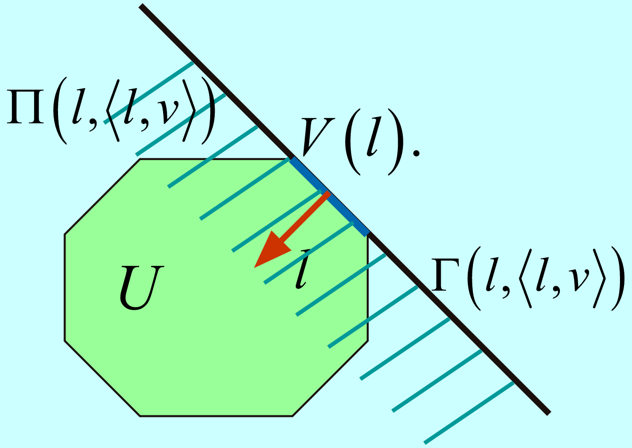



Множество $V(l)=\left\{v(l)\in U\,\middle|\,\langle l,\ v(l)\rangle=\min\limits_{v\in U}\langle l,\ v\rangle\right\}-$ совокупность всех точек $v(l)$ может содержать более одного элемента.



Множество $V(l)$ называется опорным множеством к множеству $U$ в направлении вектора $l$.

Опорные гиперплоскости $\Gamma\left(l,\langle l,v\rangle\right)$ и опорные полупространства $\Pi\left(l,\langle l,v\rangle\right)$ для всех $v\in V(l)$ совпадают между собой. Эту гиперплоскость и полупространство



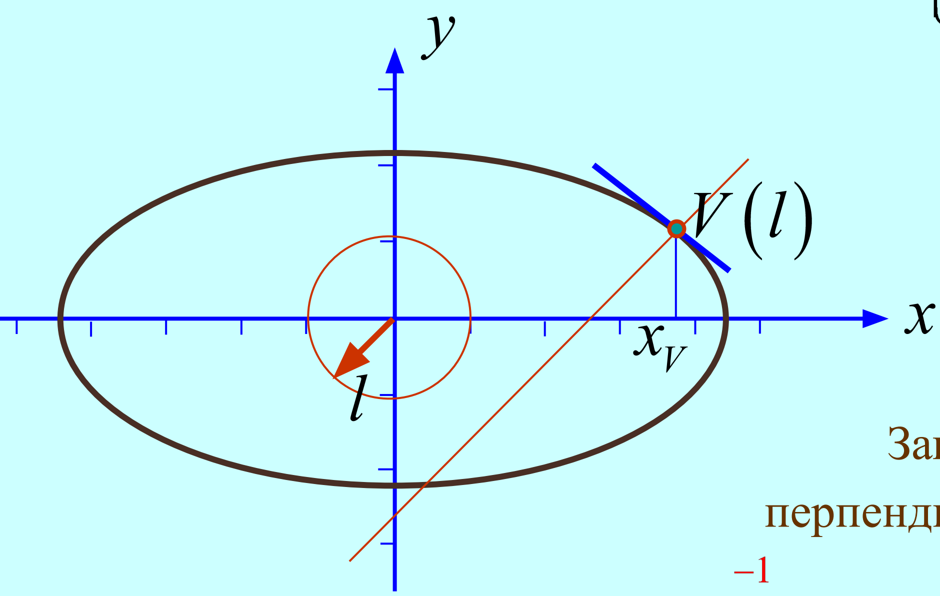

будем называть опорной гиперплоскостью и опорным полупространством к множеству $U$ в направлении вектора $l$ и обозначать символами $\Gamma(l), \Pi(l)$, соответственно.

Таким образом,

$$\Gamma(l)=\left\{u\in R^n \,\middle|\, \langle l,u\rangle=\min_{v\in U}\langle l,\ v\rangle\right\}. \quad (2)$$

$$\Pi(l)=\left\{u\in R^n \,\middle|\, \langle l,u\rangle\geq\min_{v\in U}\langle l,\ v\rangle\right\}. \quad (3)$$

**Упражнение.** Для множества $U=\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{5}\le 1\right\}\subset R^2$ построить




опорное множество,

отвечающее направлению $l=\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$.

**Решение.**

Запишем уравнение касательной к эллипсу, перпендикулярную направлению $l$. Имеем

$$y=\overset{-1}{k}x+b \Rightarrow y=-x+b$$

Координата $x_V$ является корнем уравнения

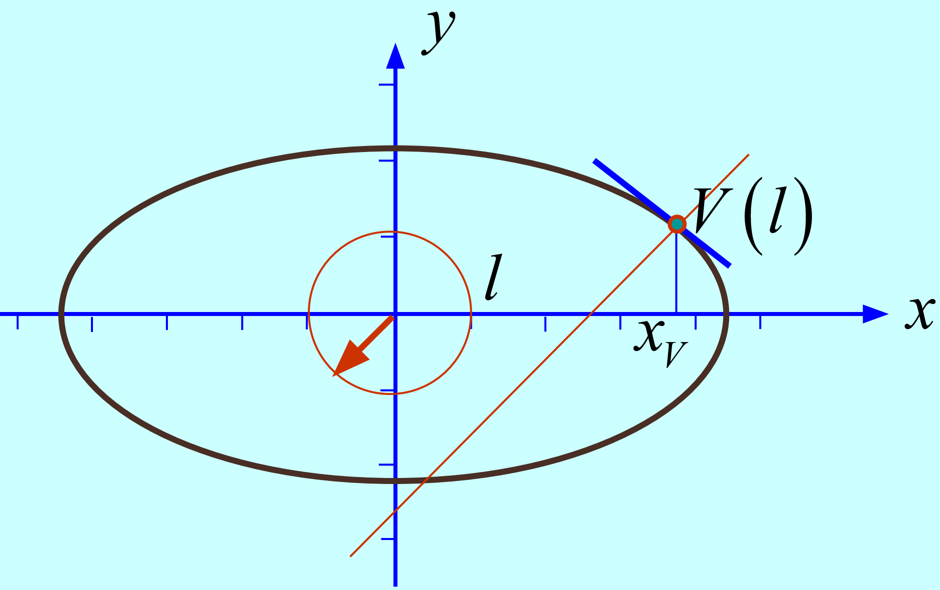
$$\frac{x^2}{20}+\frac{(-x+b)^2}{5}=1 \Rightarrow \quad x^2+4(-x+b)^2=20 \Rightarrow$$

$$x^2+4x^2-8xb+4b^2-20=0 \Rightarrow \quad 5x^2-8xb+4b^2-20=0 \Rightarrow$$

$$x_{1,2}=\frac{4b\pm\sqrt{16b^2-20b^2+100}}{5}=\frac{4b\pm\sqrt{-4b^2+100}}{5}.$$

$$x_{1,2} = \frac{4b \pm \sqrt{16b^2 - 20b^2 + 100}}{5} = \frac{4b \pm \sqrt{-4b^2 + 100}}{5}.$$

Корень должен быть только один. Тогда $b = \pm 5, \quad x_V = \pm 4, \; y_V = \pm 1$




$\begin{pmatrix} x_V \\ y_V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix}$ *не подходит, т.к.*

$$\langle l,\ v(l) \rangle = \min_{v \in U} \langle l,\ v \rangle,\ l = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

Из чертежа видно, что $V(l) = \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$

**6.3. Отделимость выпуклых множеств.** Результаты предыдущего пункта допускают обобщение на случай, когда вместо точки берется выпуклое множество.

**Определение 2.** ***Будем говорить, что множества*** $A, B \subset R^n$ ***отделимы, если для некоторого вектора*** $l \in S(0,1)$ ***справедливо неравенство***

$$\sup_{b \in B} \langle l,\ b \rangle \le \inf_{a \in A} \langle l,\ a \rangle \Leftrightarrow \quad \exists \gamma \in R^1 : \langle l, b \rangle \le \gamma \le \langle l, a \rangle, \forall a \in \bar{A},\ b \in \bar{B}, \qquad (2)$$

***строго отделимы, если***

$$\langle l, b \rangle < \langle l, a \rangle,\ \forall a \in \bar{A},\ b \in \bar{B},$$

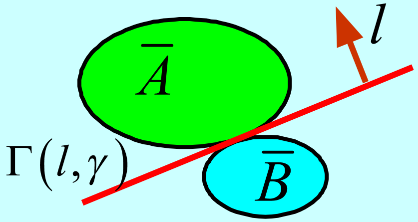
***сильно отделимы, если знак неравенства в (2)*** $\sup_{b \in B} \langle l,\ b \rangle \le \inf_{a \in A} \langle l,\ a \rangle \quad (2)$ ***строгий.***

Геометрический смысл отделимости множеств состоит в существовании гиперплоскости $\Gamma(l,\gamma) = \left\{ u \in R^n \middle| \langle u, l \rangle = \gamma \right\},\ l \in S(0,1),\ \gamma \in R^1,$ для которой множества $A$ и $B$ находятся в разных по отношению к ней полупространствах.

Такую гиперплоскость называют отделяющей (строго, сильно).

Ниже дается геометрическая интерпретация различных случаев отделения.

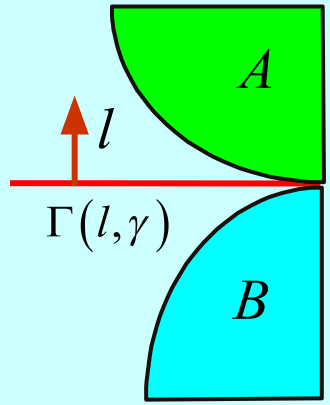
$$\sup_{b\in B}\langle l,\ b\rangle \le \inf_{a\in A}\langle l,\ a\rangle$$




**Отделимость**

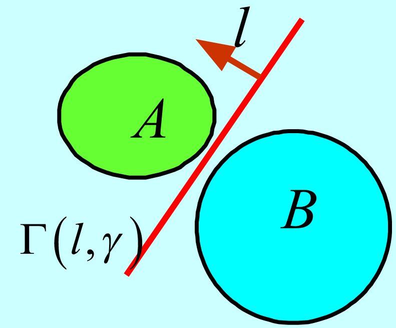
$$\langle l,b\rangle < \langle l,a\rangle,$$

$$\forall a\in A,\ b\in B,$$




**Строгая отделимость**

$$\sup_{b\in B}\langle l,\ b\rangle < \inf_{a\in A}\langle l,\ a\rangle$$




**Сильная отделимость**

В **теореме 2** утверждается, что любая точка, не принадлежащая выпуклому множеству, отделима от его замыкания, и если при этом точка не принадлежит замыканию множества, то отделение сильное.

**Теорема 3.** ***Пусть*** $A, B\subset R^n$ ***непустые выпуклые множества и*** $A\cap B=\varnothing$. ***Тогда множества*** $A$ и $B$ ***можно отделить. Причем, если*** $\bar{A}\cap\bar{B}\neq\varnothing$ ***и*** $v\in\bar{A}\cap\bar{B}$, ***то в отделяющей гиперплоскости*** $\Gamma(l,\gamma)=\left\{u\in R^n \,\middle|\, \langle u,l\rangle=\gamma\right\}$ ***можно положить*** $\gamma=\langle l,\ v\rangle$, ***т. е отделяющая гиперплоскость будет проходить через точку*** $v$.

**Доказательство.** Рассмотрим множество

$$U = A - B = \left\{ u = a - b \,\middle|\, a \in A, b \in B \right\}.$$

Множество $U$ выпукло. Поскольку $A \cap B = \varnothing$, постольку $0 \notin U$. Тогда по **теореме 2** существует вектор $l \in S(0,1)$, что $\left\langle l, \overset{a-b}{u} \right\rangle \geq \langle l, 0 \rangle = 0, \ \forall \ u \in U$.

Отсюда выводим

$$\langle l, a-b \rangle \geq 0 \Rightarrow \langle l, a \rangle \geq \langle l, b \rangle, \quad a \in A, b \in B. \qquad (3)$$

Пусть теперь $a \in \overline{A}, b \in \overline{B}$. Найдутся последовательности

$$\{a_k\} \to a, \{b_k\} \to b, \quad a_k \in A, b_k \in B, k = 1, 2, \ldots .$$

В силу неравенства (3) будет выполняться

$$\langle l, \ a_k \rangle \geq \langle l, \ b_k \rangle, \ k = 1, 2, \ldots$$

Переходя в последнем неравенстве к пределу при $k \to \infty$, получим

$$\langle l, \ a \rangle \geq \langle l, b \rangle, \ \forall \ \ a \in \overline{A}, \ b \in \overline{B}, \qquad (4)$$

что и означает выполнение неравенства (2). $\sup\limits_{b \in \overline{B}} \langle l, \ b \rangle \leq \inf\limits_{a \in \overline{A}} \langle l, \ a \rangle \quad (2)$

Пусть, наконец, $v \in \bar{A} \cap \bar{B} \neq \varnothing.$ Тогда с одной стороны из $v \in \bar{A}$ и (4)

$\langle l,\ a \rangle \geq \langle l, b \rangle,\ \forall\ \ a \in \bar{A},\ b \in \bar{B},\quad (4)$ вытекает, что $\langle l, b \rangle \leq \langle l, v \rangle,\ \forall b \in \bar{B},$

а с другой из $v \in \bar{B}$ и снова (4) следует $\langle l,\ a \rangle \geq \langle l, v \rangle,\ \forall a \in \bar{A}.$ Таким образом,

$$\langle l, b \rangle \leq \langle l, v \rangle \leq \langle l,\ a \rangle,\ \forall a \in \bar{A}, \forall b \in \bar{B} \Rightarrow\ \ \gamma = \langle l, v \rangle.$$

Теорема доказана.

**Теорема 4.** ***Пусть*** $A, B \subset R^n$ ***непустые выпуклые замкнутые множества, одно из которых ограничено и*** $A \cap B = \varnothing.$ ***Тогда множества*** $A$ ***и*** $B$ ***сильно отделимы.*** $\sup\limits_{b \in B} \langle l,\ b \rangle < \inf\limits_{a \in A} \langle l,\ a \rangle$

**Доказательство.** В условиях доказываемой теоремы множество $U = A - B$ замкнуто. Действительно, пусть для определенности множество $A$ ограничено, $u -$ предельная точка множества $U$, и последовательность $\{u_k\} \rightarrow u,$ где $\overset{\in U = A - B}{u_k} = a_k - b_k,$ $a_k \in A, b_k \in B, k = 1, 2, \ldots$ В силу ограниченности (компактности) множества $A$

из последовательности $\{a_k\}$ можно извлечь сходящуюся подпоследовательность

$\{a_{k_j}\} \to a \in A.$ Из $u_k = a_k - b_k$ следует $b_k = a_k - u_k \Rightarrow \quad b_{k_j} = \overset{\to a\in A}{a_{k_j}} - \overset{\to u\in U}{u_{k_j}}$ .

В результате предельного перехода при $k_j \to \infty$ получим

$$\overset{\in A}{a_{k_j}} - \overset{\in U}{u_{k_j}} \to \overset{\in A}{a} - \overset{\in U}{u} = b \in A - U \Rightarrow \qquad b_{k_j} \to b = a - u.$$

В силу замкнутости множества $B,$ выполнено включение $b \in B.$ Тогда

$$b = a - u \Rightarrow \ u = \overset{\in A}{a} - \overset{\in B}{b}, \ \Rightarrow \ u \in A - B = U,$$

Таким образом, предельная точка $u$ множества $U$ принадлежит множеству $U,$ что и означает его замкнутость.

Из условия $A \cap B = \varnothing$ следует, что $0 \notin U = \bar{U}.$ По т**еореме 2** существует вектор $l \neq 0,$ такой, что

$$\langle l,\ u\rangle \geq \langle l, 0\rangle + \|l\|^2, \forall u \in \bar{U} \Rightarrow \left\langle l,\ \overset{a-b}{u} \right\rangle \geq \|l\|^2, \forall u \in \bar{U}.$$

Отсюда выводим

$$\langle l, a - b\rangle \geq \|l\|^2, \forall a \in A, b \in B.$$

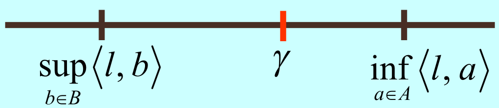
$$\langle l, a-b\rangle \geq \|l\|^2, \forall a \in A, b \in B \Rightarrow \langle l, a\rangle \geq \langle l, b\rangle + \|l\|^2 \ \forall a \in A, b \in B \Rightarrow$$

$$\inf_{a\in A}\langle l, a\rangle \geq \sup_{b\in B}\langle l, b\rangle + \|l\|^2 \Rightarrow \inf_{a\in A}\langle l, a\rangle > \sup_{b\in B}\langle l, b\rangle$$

Теорема доказана.

Заметим, что любая гиперплоскость $\Gamma(l,\gamma) = \left\{u \in R^n \,\middle|\, \langle l,u\rangle = \gamma\right\}$, где

$$\gamma \in \left(\sup_{b\in B}\langle l, b\rangle, \inf_{a\in A}\langle l, a\rangle\right)$$




Может служить сильно отделяющей для множеств $A$ и $B$.