ВЫПУКЛЫЙ АНАЛИЗ

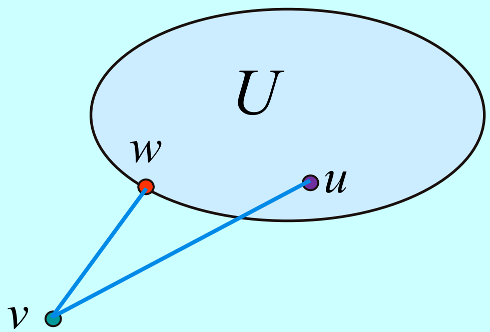
ЛЕКЦИЯ 17

6. ТЕОРЕМЫ ОБ ОТДЕЛИМОСТИ ВЫПУКЛЫХ МНОЖЕСТВ

6. ТЕОРЕМЫ ОБ ОТДЕЛИМОСТИ ВЫПУКЛЫХ МНОЖЕСТВ

6.1. Проекция точки на множество

Определение 1. ***Пусть*** $U \subset R^n$. ***Проекцией точки*** $v \in R^n$ ***на множество*** U ***называется точка*** $w = P_U(v) \in U$, ***удовлетворяющая условию***



$$\| w - v \| = \inf_{u \in U} \| u - v \|.$$

Справедливо следующее утверждение.

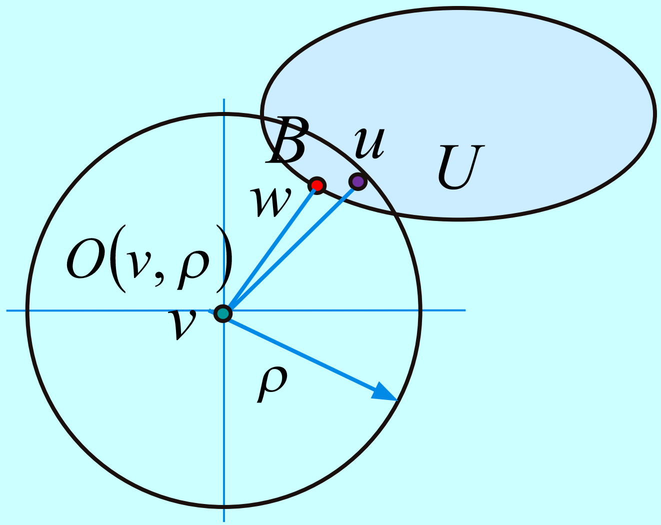
Теорема 1. ***Пусть*** $U \subset R^n$ ***замкнутое множество. Тогда для всякой точки*** $v \in R^n$ ***существует ее проекция на это множество. Если множество*** U ***выпукло, то проекция единственна и равенство*** $w = P_U(v)$ ***имеет место тогда и только тогда, когда***

$$\langle w - v, u - w \rangle \geq 0, \forall u \in U. \qquad (1)$$

Доказательство. Задача построения $w = P_U(v)$ - проекции точки v на множество U сводится к минимизации функции $I : U \to R^1$, определенной равенством

$$I(u) = \| u - v \|^2 = \langle u - v, u - v \rangle. \qquad (2)$$

Очевидно, что точка минимума этой функции, если она существует, должна



принадлежать множеству $B = \bar{O}(v,\rho) \cap U$,

где $\bar{O}(v,\rho)$ шар столь большого радиуса, что для него $B \neq \varnothing$. Множество B компактно и выпукло, а функция I непрерывна, поэтому по теореме Вейерштрасса точка минимума $w \in U$ функции I действительно существует, т.е.

$P_U(v) = w$. По **теореме 5.2** (минимум гладкой выпуклой функции) выводим

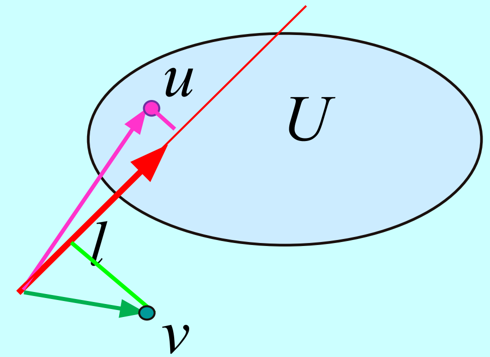
$$\left\langle \overset{2(u-v)|_{u=w}}{I'(w)}, u - \overset{\text{точка минимума}}{w} \right\rangle \geq 0 \Rightarrow \langle w - v, u - w \rangle \geq 0 \;\forall u \in U.$$

Единственность точки $w = P_U(v)$ следует из строгой выпуклости функции (2).

Теорема доказана.

6.2. Отделимость точки и множества. Точку и выпуклое множество можно разделить гиперплоскостью так, что они будут находиться в разных замкнутых полупространствах, определяемых этой гиперплоскостью.

Теорема 2. ***Пусть*** $U \subset R^n$ ***выпуклое множество. Тогда для любой точки*** $v \notin \operatorname{int} U$ ***существует вектор*** $l \neq 0$, ***такой, что***

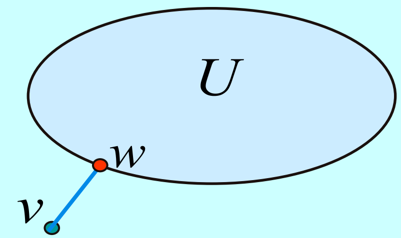


$$\langle l,\ u\rangle \geq \langle l, v\rangle,\ \forall u \in \bar{U},$$

если при этом $v \notin \bar{U}$, ***то***

$$\langle l,\ u\rangle \geq \langle l, v\rangle + \|l\|^2,\ \forall u \in \bar{U}.$$

Доказательство. Сначала рассмотрим случай $v \notin \bar{U}$. Множество $\bar{U}$ замкнуто и выпукло. Тогда согласно **теореме 1** существует проекция $w = P_{\bar{U}}(v) \in \bar{U}$ точки v на множество $\bar{U}$, причем

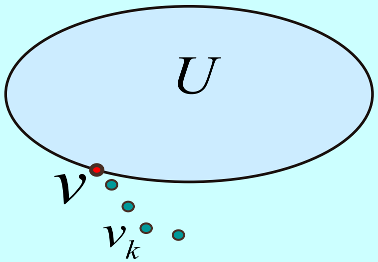


$$\langle w - v, u - w\rangle \geq 0, \forall u \in \bar{U}. \qquad (1)$$

Заметим, что $w - v \neq 0$, так как $v \notin \bar{U}$. Положим $l = w - v$. Тогда

$$\langle \overset{w-v}{l}, u-v\rangle = \langle w-v, u-v\rangle = \langle w-v, u-v \pm w\rangle = \langle w-v, (u-w)+(w-v)\rangle =$$

$$= \overset{(1)\Rightarrow \ge 0}{\langle w-v, u-w\rangle} + \langle \overset{l}{w-v}, \overset{l}{w-v}\rangle \ge \langle l, l\rangle = \|l\|^2 \Rightarrow$$



$$\langle l, u-v\rangle \ge \|l\|^2 \Rightarrow \langle l, u\rangle \ge \langle l, v\rangle + \|l\|^2 \quad \forall u \in \bar{U}$$

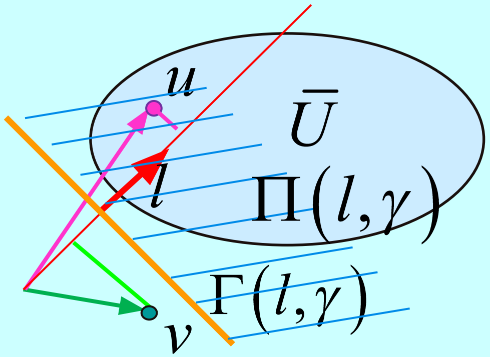
и для рассматриваемого случая теорема доказана. $\langle l, u\rangle \ge \langle l, v\rangle + \|l\|^2, \forall u \in \bar{U}$

Пусть теперь $v \in \bar{U} \setminus \operatorname{int} U.$ Тогда $v \in \partial(U)$ и существует последовательность $\{v_k\} \to v, v_k \notin \bar{U}, k = 1,2,\ldots$ Для каждого номера $k = 1,2,\ldots$ по доказанному выше существует вектор $l_k \ne 0$ такой, что

$$\langle l_k, u\rangle > \langle l_k, v_k\rangle, \forall u \in \bar{U}. \qquad (1)$$

Можно считать, что $\|l_k\| = 1, k = 1,2\ldots$. Если бы это было не так, то обе части неравенства (1) следовало бы поделить на величину $\|l_k\| > 0, \quad k = 1,2,\ldots$ Переходя, если это необходимо, к подпоследовательности, принимаем, что $\{l_k\} \to l.$ При этом $\|l\| = 1 \ne 0.$ В неравенстве (1) устремим k в бесконечность. В пределе получим требуемое соотношение. $\langle l, u\rangle \ge \langle l, v\rangle, \forall u \in \bar{U}$ Теорема доказана.

Доказанной теореме придадим следующий геометрический смысл. Пусть $v \notin \bar{U}$



и $l \neq 0$ – вектор существование которого доказано в **теореме 2.** Этот вектор будет нормальным для гиперплоскости

$$\Gamma(l,\gamma) = \left\{ u \in R^n \;\middle|\; \langle l,u \rangle = \gamma \right\}, \qquad (2)$$

разделяющей точку v и множество U. При изменении величины γ гиперплоскость будет перемещаться параллельно самой себе. Она будет оставаться разделяющей, если

$$\langle l,u \rangle \geq \langle l,v \rangle,\ \forall u \in \bar{U} \Rightarrow \inf_{u \in \bar{U}} \langle l,u \rangle \geq \langle l,v \rangle$$

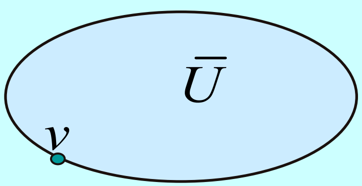
$$\gamma \in \left[\langle l,v \rangle, \inf_{u \in \bar{U}} \langle l,u \rangle \right].$$

Полупространство, содержащее множество $\bar{U}$, имеет вид

$$\Pi(l,\gamma) = \left\{ u \in R^n \;\middle|\; \langle l,u \rangle \geq \gamma \right\}.$$

Для него гиперплоскость $\Gamma(l,\gamma)$ служит границей.

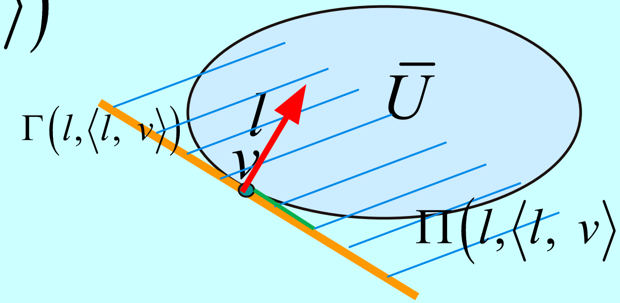
Пусть теперь $v \in \partial(U) = \bar{U} \setminus \operatorname{int} U$. В этом случае $v \in \bar{U}$ и должно выполняться неравенство $\inf_{u \in \bar{U}} \langle l,u \rangle \leq \langle l,\ v \rangle$. Тогда



$$\inf_{u \in \bar{U}} \langle l,u \rangle = \langle l,v \rangle \Rightarrow \gamma \in \left[\langle l,v \rangle, \inf_{u \in \bar{U}} \langle l,u \rangle \right] \Rightarrow \gamma = \langle l,\ v \rangle \Rightarrow$$

$$v \in \Gamma(l,\gamma) = \Gamma(l, \langle l,\ v \rangle).$$

В этом случае разделяющая гиперплоскость $\Gamma\left(l,\langle l,\ v\rangle\right)$ и множество $\bar{U}$ имеют общую точку $v.$



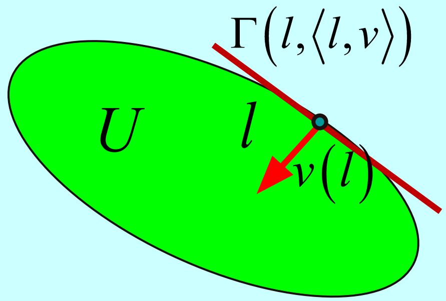
Гиперплоскость $\Gamma\left(l,\langle l,\ v\rangle\right)$ называется опорной к множеству U в точке $v\in\bar{U}.$

Полупространство $\Pi\left(l,\langle l,\ v\rangle\right)$ называется опорным к множеству U в точке $v\in\bar{U}.$

Вектор l называют опорным вектором к множеству U в точке $v.$

Заметим, что если множество U компактно, то любой вектор $l\in S(0,1)$ может служить опорным к множеству U в некоторой точке $v(l)\in\partial U.$

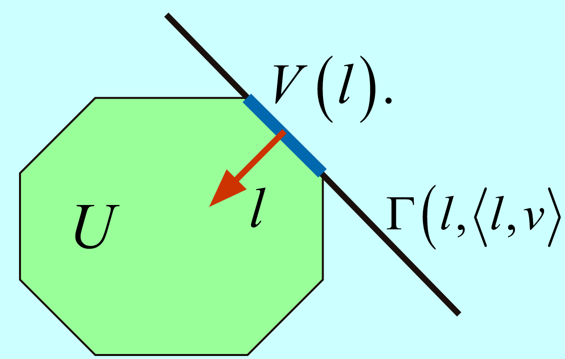
Эта точка определяется из условия $\left\langle l,\ v(l)\right\rangle=\min\limits_{v\in U}\langle l,\ v\rangle.$



Множество $V(l)=\left\{v(l)\in U\,\middle|\,\left\langle l,\ v(l)\right\rangle=\min\limits_{v\in U}\langle l,\ v\rangle\right\}-$ совокупность всех точек $v(l)$

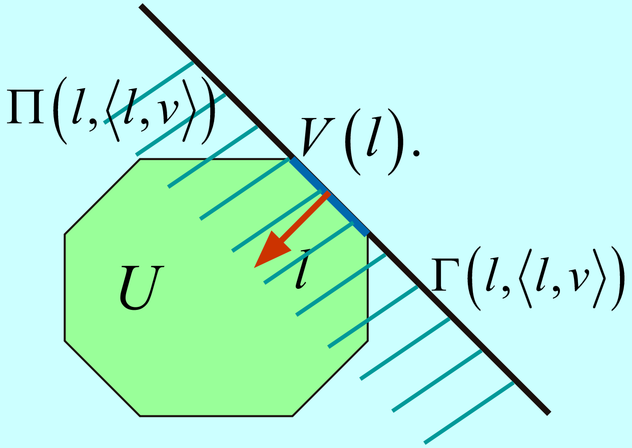
$V(l).$

может содержать более одного элемента.



Множество $V(l)$ называется опорным множеством к множеству U в направлении вектора l.

Опорные гиперплоскости $\Gamma\left(l,\langle l,v\rangle\right)$ и опорные полупространства $\Pi\left(l,\langle l,v\rangle\right)$ для всех $v\in V(l)$ совпадают между собой. Эту гиперплоскость и полупространство



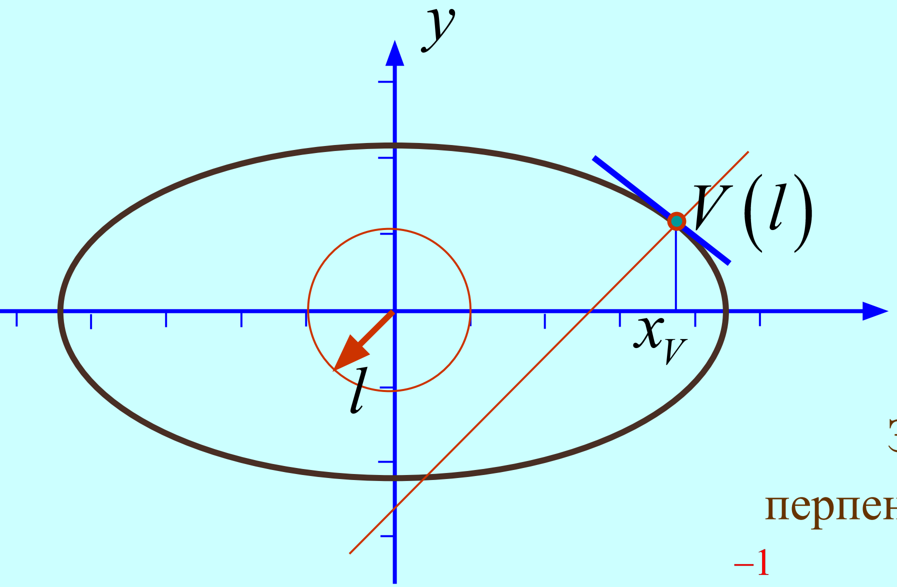
будем называть опорной гиперплоскостью и опорным полупространством к множеству U в направлении вектора l и обозначать символами $\Gamma(l), \Pi(l)$, соответственно.

Таким образом,

$$\Gamma(l)=\left\{u\in R^n \,\middle|\, \langle l,u\rangle=\min_{v\in U}\langle l,\ v\rangle\right\}. \quad (2)$$

$$\Pi(l)=\left\{u\in R^n \,\middle|\, \langle l,u\rangle\geq\min_{v\in U}\langle l,\ v\rangle\right\}. \quad (3)$$

Упражнение. Для множества $U=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\middle|\,\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{5}\le 1\right\}\subset R^2$ построить



опорное множество,

отвечающее направлению $l=\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2}\\-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}.$

Решение.

Запишем уравнение касательной к эллипсу, перпендикулярную направлению $l.$ Имеем

$$y=\overset{-1}{k}x+b\Rightarrow y=-x+b$$

Координата x_V является корнем уравнения

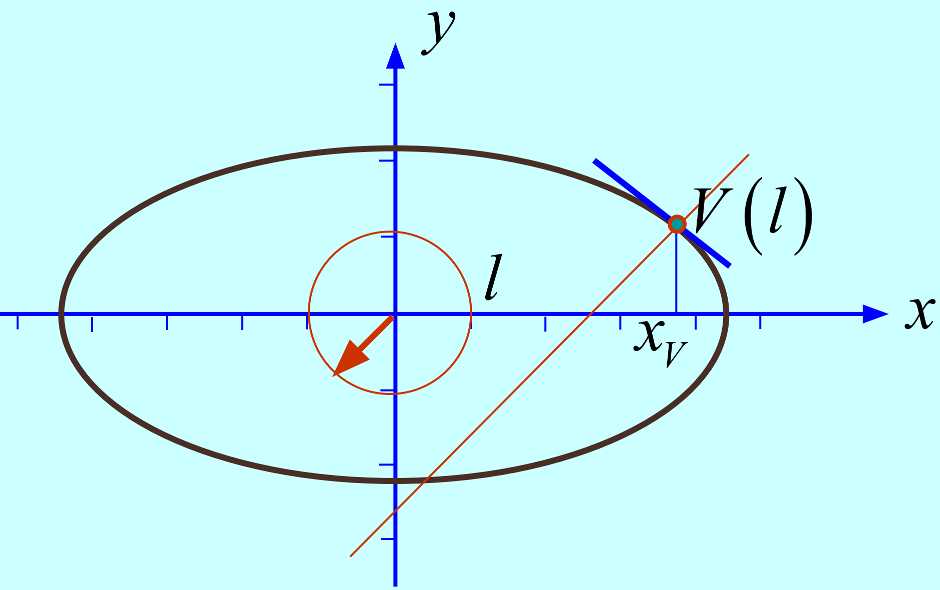
$$\frac{x^2}{20}+\frac{(-x+b)^2}{5}=1\Rightarrow \qquad x^2+4(-x+b)^2=20\Rightarrow$$

$$x^2+4x^2-8xb+4b^2-20=0\Rightarrow \quad 5x^2-8xb+4b^2-20=0\Rightarrow$$

$$x_{1,2}=\frac{4b\pm\sqrt{16b^2-20b^2+100}}{5}=\frac{4b\pm\sqrt{-4b^2+100}}{5}.$$

$$x_{1,2} = \frac{4b \pm \sqrt{16b^2 - 20b^2 + 100}}{5} = \frac{4b \pm \sqrt{-4b^2 + 100}}{5}.$$

Корень должен быть только один. Тогда $b = \pm 5, \quad x_V = \pm 4, \; y_V = \pm 1$



$$\begin{pmatrix} x_V \\ y_V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix}$$ *не подходит, т.к.*

$$\langle l,\ v(l) \rangle = \min_{v \in U} \langle l,\ v \rangle,\ l = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

Из чертежа видно, что $V(l) = \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$

6.3. Отделимость выпуклых множеств. Результаты предыдущего пункта допускают обобщение на случай, когда вместо точки берется выпуклое множество.

Определение 2. ***Будем говорить, что множества*** $A, B \subset R^n$ ***отделимы, если для некоторого вектора*** $l \in S(0,1)$ ***справедливо неравенство***

$$\sup_{b\in B}\langle l,\ b\rangle \le \inf_{a\in A}\langle l,\ a\rangle \Leftrightarrow \quad \exists\gamma \in R^1 : \langle l,b\rangle \le \gamma \le \langle l,a\rangle, \forall a \in \bar{A},\ b \in \bar{B}, \qquad (2)$$

строго отделимы, если

$$\langle l,b\rangle < \langle l,a\rangle,\ \forall a \in \bar{A},\ b \in \bar{B},$$

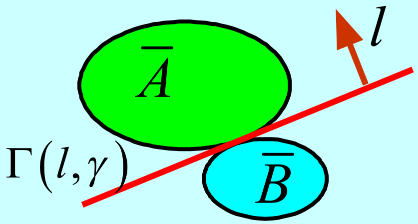
сильно отделимы, если знак неравенства в (2) $\sup\limits_{b\in B}\langle l,\ b\rangle \le \inf\limits_{a\in A}\langle l,\ a\rangle \quad (2)$ ***строгий.***

Геометрический смысл отделимости множеств состоит в существовании гиперплоскости $\Gamma(l,\gamma) = \left\{u \in R^n \middle| \langle u,l\rangle = \gamma\right\},\ l \in S(0,1),\ \gamma \in R^1,$ для которой множества A и B находятся в разных по отношению к ней полупространствах.

Такую гиперплоскость называют отделяющей (строго, сильно).

Ниже дается геометрическая интерпретация различных случаев отделения.

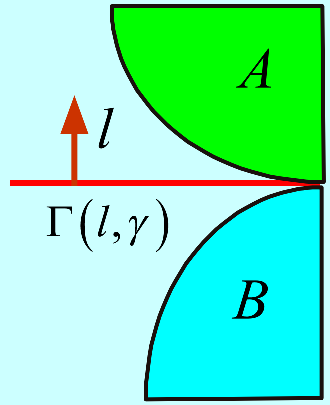
$$\sup_{b\in B}\langle l,\ b\rangle \le \inf_{a\in A}\langle l,\ a\rangle$$



Отделимость

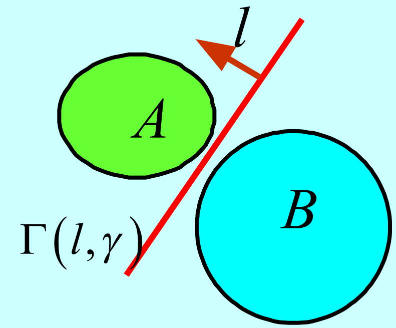
$$\langle l,b\rangle < \langle l,a\rangle,$$

$$\forall a\in A,\ b\in B,$$



Строгая отделимость

$$\sup_{b\in B}\langle l,\ b\rangle < \inf_{a\in A}\langle l,\ a\rangle$$



Сильная отделимость

В **теореме 2** утверждается, что любая точка, не принадлежащая выпуклому множеству, отделима от его замыкания, и если при этом точка не принадлежит замыканию множества, то отделение сильное.

Теорема 3. ***Пусть*** $A, B \subset R^n$ ***непустые выпуклые множества и*** $A \cap B = \varnothing$. ***Тогда множества*** A и B ***можно отделить. Причем, если*** $\bar{A} \cap \bar{B} \neq \varnothing$ ***и*** $v \in \bar{A} \cap \bar{B}$, ***то в отделяющей гиперплоскости*** $\Gamma(l,\gamma) = \left\{u \in R^n \,\middle|\, \langle u, l\rangle = \gamma\right\}$ ***можно положить*** $\gamma = \langle l,\ v\rangle$, ***т. е отделяющая гиперплоскость будет проходить через точку*** v.

Доказательство. Рассмотрим множество

$$U = A - B = \left\{ u = a - b \,\middle|\, a \in A, b \in B \right\}.$$

Множество U выпукло. Поскольку $A \cap B = \varnothing$, постольку $0 \notin U$. Тогда по **теореме 2** существует вектор $l \in S(0,1)$, что $\left\langle l, \overset{a-b}{u} \right\rangle \geq \langle l, 0 \rangle = 0, \ \forall \ u \in U.$

Отсюда выводим

$$\langle l, a - b \rangle \geq 0 \Rightarrow \langle l, a \rangle \geq \langle l, b \rangle, \quad a \in A, b \in B. \qquad (3)$$

Пусть теперь $a \in \overline{A}, b \in \overline{B}.$ Найдутся последовательности

$$\{a_k\} \to a, \{b_k\} \to b, \quad a_k \in A, b_k \in B, k = 1, 2, \ldots .$$

В силу неравенства (3) будет выполняться

$$\langle l, \ a_k \rangle \geq \langle l, \ b_k \rangle, \ k = 1, 2, \ldots$$

Переходя в последнем неравенстве к пределу при $k \to \infty,$ получим

$$\langle l, \ a \rangle \geq \langle l, b \rangle, \ \forall \ \ a \in \overline{A}, \ b \in \overline{B}, \qquad (4)$$

что и означает выполнение неравенства (2). $\sup\limits_{b \in \overline{B}} \langle l, \ b \rangle \leq \inf\limits_{a \in \overline{A}} \langle l, \ a \rangle \quad (2)$

Пусть, наконец, $v \in \overline{A} \cap \overline{B} \neq \varnothing.$ Тогда с одной стороны из $v \in \overline{A}$ и (4)

$\langle l,\ a \rangle \geq \langle l, b \rangle,\ \forall\ \ a \in \overline{A},\ b \in \overline{B},\quad (4)$ вытекает, что $\langle l, b \rangle \leq \langle l, v \rangle,\ \forall b \in \overline{B},$

а с другой из $v \in \overline{B}$ и снова (4) следует $\langle l,\ a \rangle \geq \langle l, v \rangle,\ \forall a \in \overline{A}.$ Таким образом,

$$\langle l, b \rangle \leq \langle l, v \rangle \leq \langle l,\ a \rangle,\ \forall a \in \overline{A}, \forall b \in \overline{B} \Rightarrow\ \gamma = \langle l, v \rangle.$$

Теорема доказана.

Теорема 4. ***Пусть*** $A, B \subset R^n$ ***непустые выпуклые замкнутые множества, одно из которых ограничено и*** $A \cap B = \varnothing.$ ***Тогда множества*** A ***и*** B ***сильно отделимы.*** $\sup\limits_{b \in B} \langle l,\ b \rangle < \inf\limits_{a \in A} \langle l,\ a \rangle$

Доказательство. В условиях доказываемой теоремы множество $U = A - B$ замкнуто. Действительно, пусть для определенности множество A ограничено, u – предельная точка множества U, и последовательность $\{u_k\} \to u,$ где $\overset{\in U = A - B}{u_k} = a_k - b_k,$

$a_k \in A, b_k \in B, k = 1, 2, \ldots$ В силу ограниченности (компактности) множества A

из последовательности $\{a_k\}$ можно извлечь сходящуюся подпоследовательность

$\{a_{k_j}\} \to a \in A.$ Из $u_k = a_k - b_k$ следует $b_k = a_k - u_k \Rightarrow b_{k_j} = \overset{\to a \in A}{a_{k_j}} - \overset{\to u \in U}{u_{k_j}}$.

В результате предельного перехода при $k_j \to \infty$ получим

$$\overset{\in A}{a_{k_j}} - \overset{\in U}{u_{k_j}} \to \overset{\in A}{a} - \overset{\in U}{u} = b \in A - U \Rightarrow \qquad b_{k_j} \to b = a - u.$$

В силу замкнутости множества $B,$ выполнено включение $b \in B.$ Тогда

$$b = a - u \Rightarrow u = \overset{\in A}{a} - \overset{\in B}{b}, \Rightarrow u \in A - B = U,$$

Таким образом, предельная точка u множества U принадлежит множеству $U,$ что и означает его замкнутость.

Из условия $A \cap B = \varnothing$ следует, что $0 \notin U = \bar{U}.$ По т**еореме 2** существует вектор $l \neq 0,$ такой, что

$$\langle l, u \rangle \geq \langle l, 0 \rangle + \|l\|^2, \forall u \in \bar{U} \Rightarrow \left\langle l, \overset{a-b}{u} \right\rangle \geq \|l\|^2, \forall u \in \bar{U}.$$

Отсюда выводим

$$\langle l, a - b \rangle \geq \|l\|^2, \forall a \in A, b \in B.$$

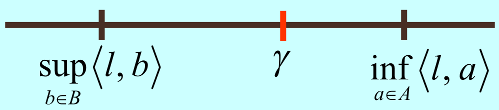
$$\langle l, a-b\rangle \geq \|l\|^2, \forall a \in A, b \in B \Rightarrow \langle l, a\rangle \geq \langle l, b\rangle + \|l\|^2 \ \forall a \in A, b \in B \Rightarrow$$

$$\inf_{a\in A}\langle l, a\rangle \geq \sup_{b\in B}\langle l, b\rangle + \|l\|^2 \Rightarrow \quad \inf_{a\in A}\langle l, a\rangle > \sup_{b\in B}\langle l, b\rangle$$

Теорема доказана.

Заметим, что любая гиперплоскость $\Gamma(l,\gamma) = \left\{u \in R^n \middle| \langle l,u\rangle = \gamma\right\}$, где

$$\gamma \in \left(\sup_{b\in B}\langle l, b\rangle, \inf_{a\in A}\langle l, a\rangle\right)$$



Может служить сильно отделяющей для множеств A и B.