

Векторы

План.

1. *Векторное n – мерное пространство.*
2. *Пространство R^2 и R^3 .*
3. *Скалярное произведение векторов. Длина вектора. Угол между векторами.*
4. *Плоскость в трехмерном пространстве.*
5. *Прямая линия в трехмерном пространстве.*
6. *Линейная зависимость и линейная независимость векторов. Базис пространства R^n .*

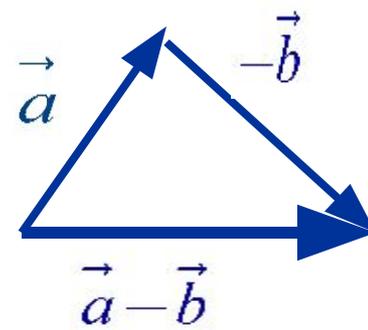
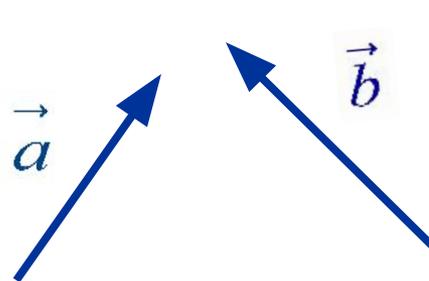
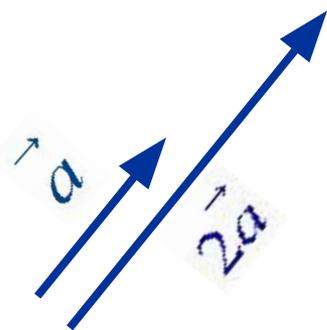
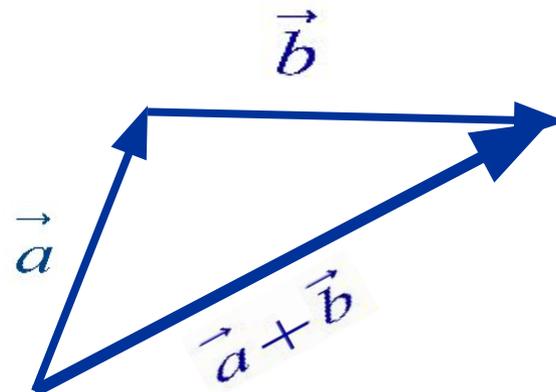
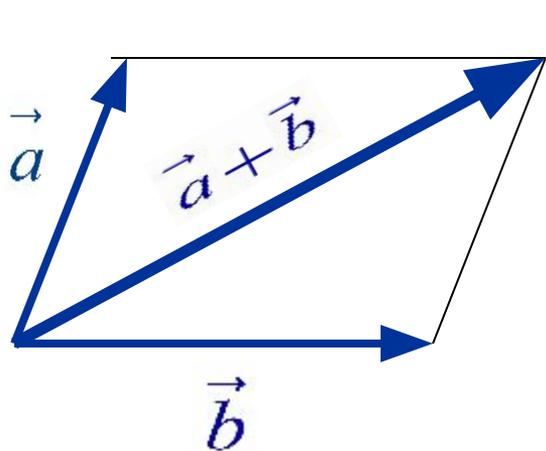
Векторное n – мерное пространство.

- *Определение. Пусть n – любое натуральное число. Упорядоченная совокупность n чисел a_1, a_2, \dots, a_n называется n – мерным вектором.*

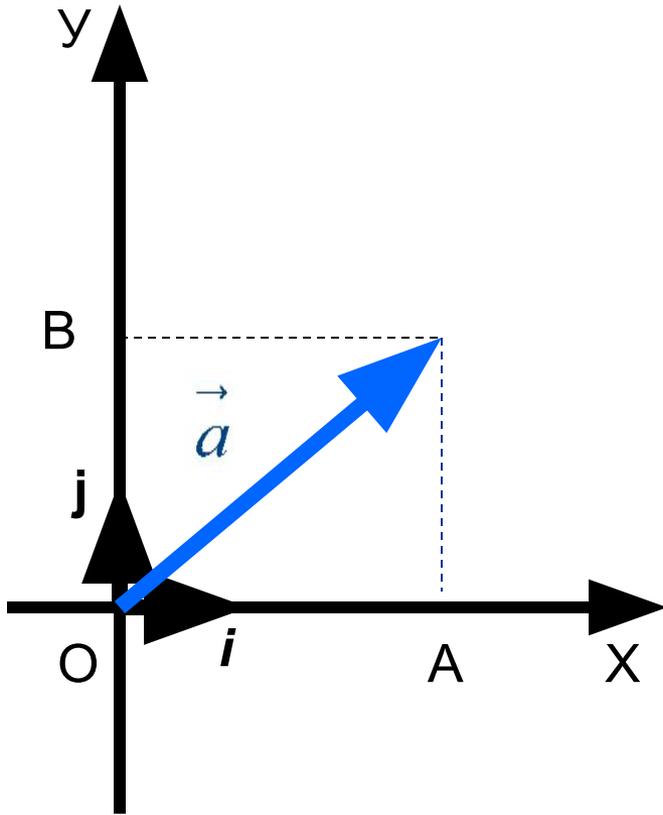
$$\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) = \vec{a}(a_i)_n$$



Линейные действия над векторами



Пространство \mathbb{R}^2 .

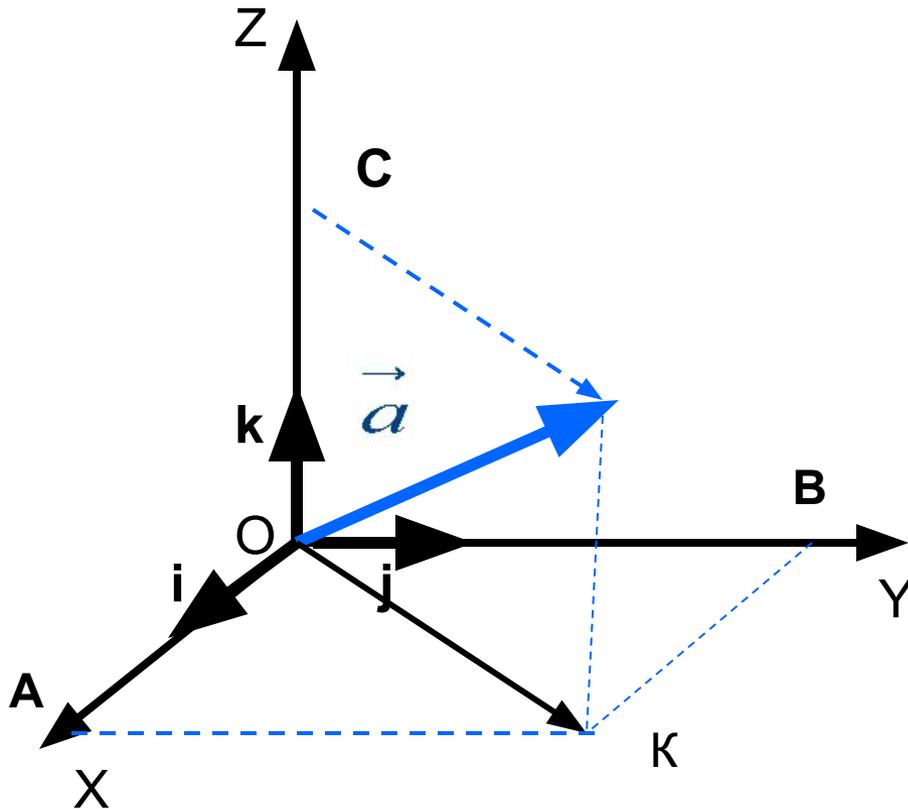


$$\overrightarrow{OA} = xi, \quad \overrightarrow{OB} = yj$$

$$\vec{a} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$$

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

Пространство \mathbb{R}^3 .



$$\vec{a} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC}$$

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

Скалярное произведение векторов

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi$$

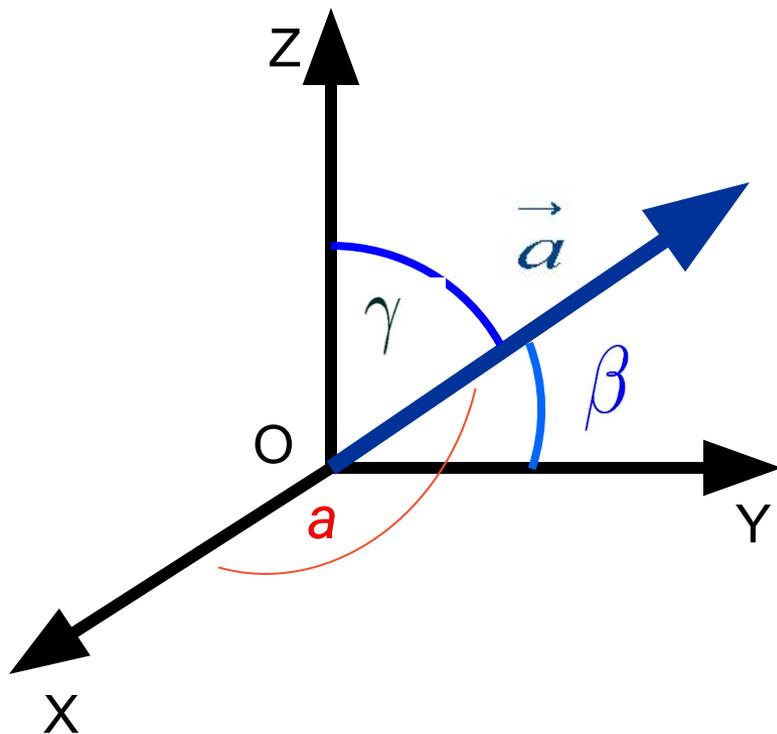
$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\vec{a} = (a_1; a_2, a_3), \quad \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a}_1 \cdot \vec{b}_1 + \vec{a}_2 \cdot \vec{b}_2 + \vec{a}_3 \cdot \vec{b}_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

Направляющие косинусы



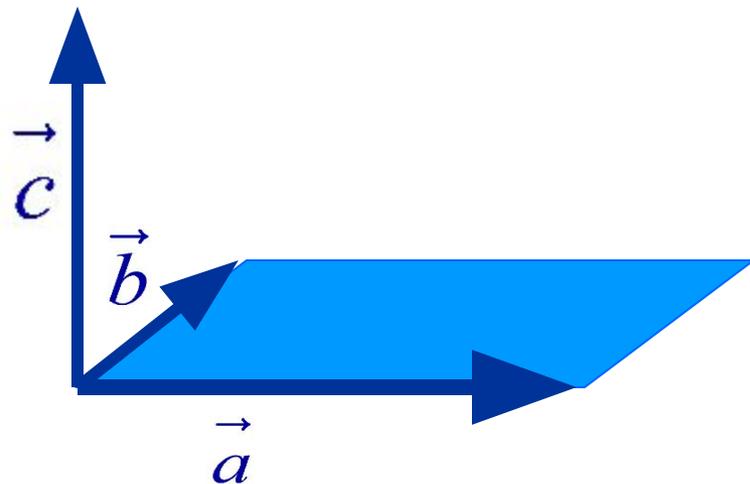
$$\cos \alpha = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$$

$$\cos \beta = \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$$

$$\cos \gamma = \frac{a_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$$

Векторное произведение векторов

$$|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \left| \sin \left(\widehat{\vec{a}; \vec{b}} \right) \right|$$



$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \quad \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = [\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

Свойства векторного произведения

$$1^0 \quad [\vec{a} \vec{b}] = 0 \text{ - условие коллинеарности}$$

$$2^0 \quad [\vec{a} \vec{b}] = -[\vec{b} \vec{a}]$$

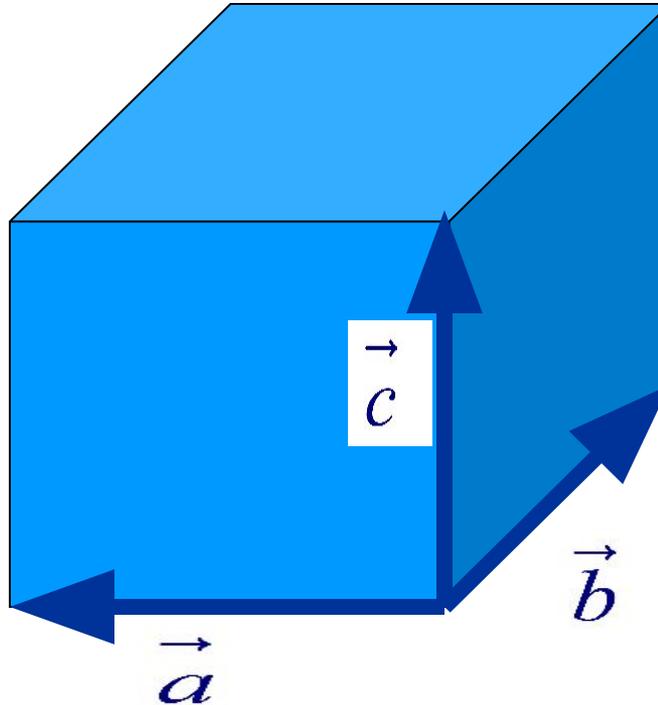
$$3^0 \quad m \cdot [\vec{a} \vec{b}] = [(\vec{m}\vec{a}) \vec{b}] = [\vec{a} (\vec{m}\vec{b})]$$

$$4^0 \quad [\vec{a} \vec{b}] = [\vec{a}' \vec{b}]$$

$$5^0 \quad [(\vec{a} + \vec{b}) \vec{c}] = [\vec{a} \vec{c}] + [\vec{b} \vec{c}]$$

Смешанное произведение векторов

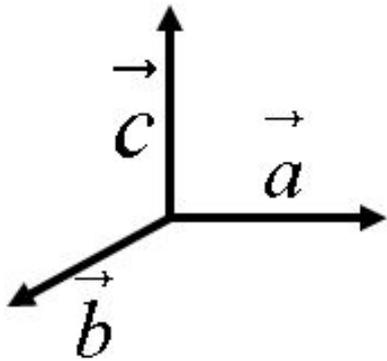
$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c} = \vec{a} \vec{b} \vec{c}$$



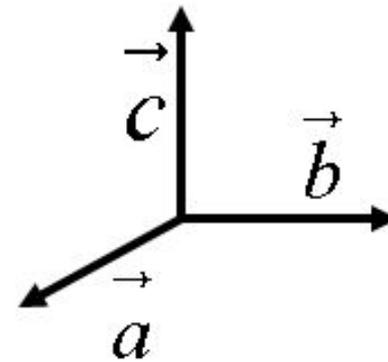
$$V = \left| \vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c} \right|$$

Свойства смешанного произведения

$$1^0 \quad [\vec{a}\vec{b}]\vec{c} > 0$$



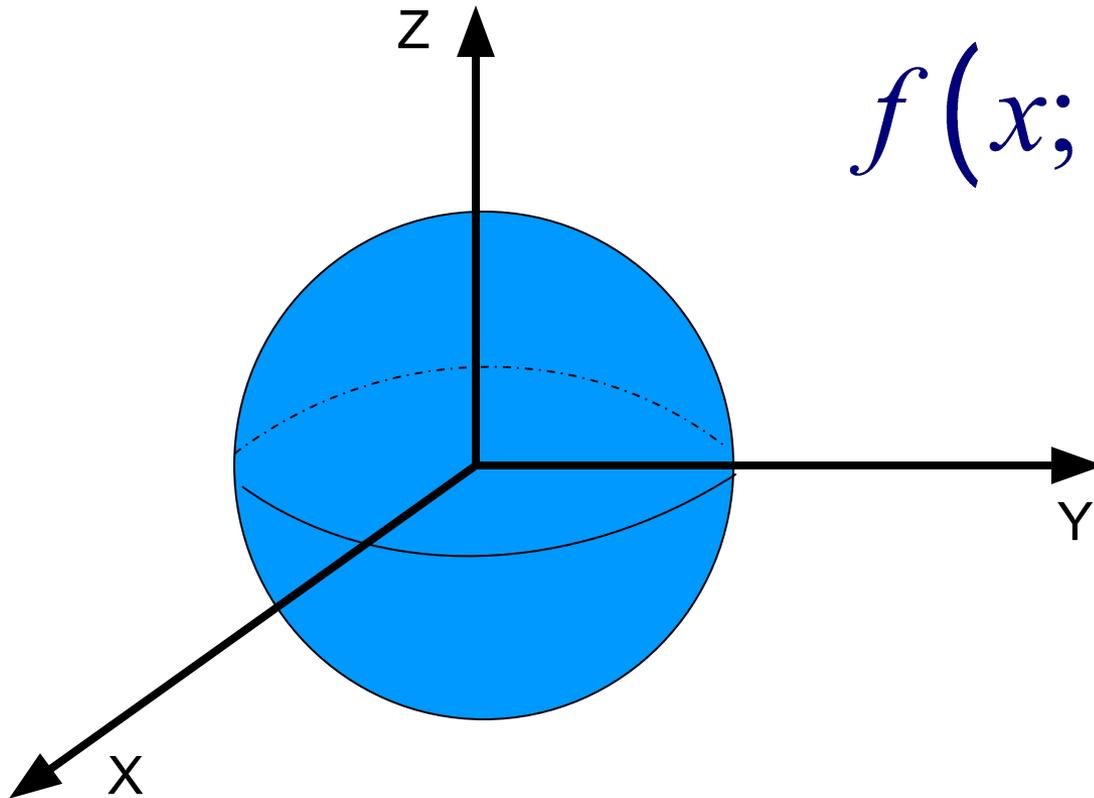
$$[\vec{a}\vec{b}]\vec{c} < 0$$



$$2^0 \quad [\vec{a}\vec{b}]\vec{c} = [\vec{b}\vec{c}]\vec{a} = [\vec{c}\vec{a}]\vec{b} = \vec{a}\vec{b}\vec{c}$$

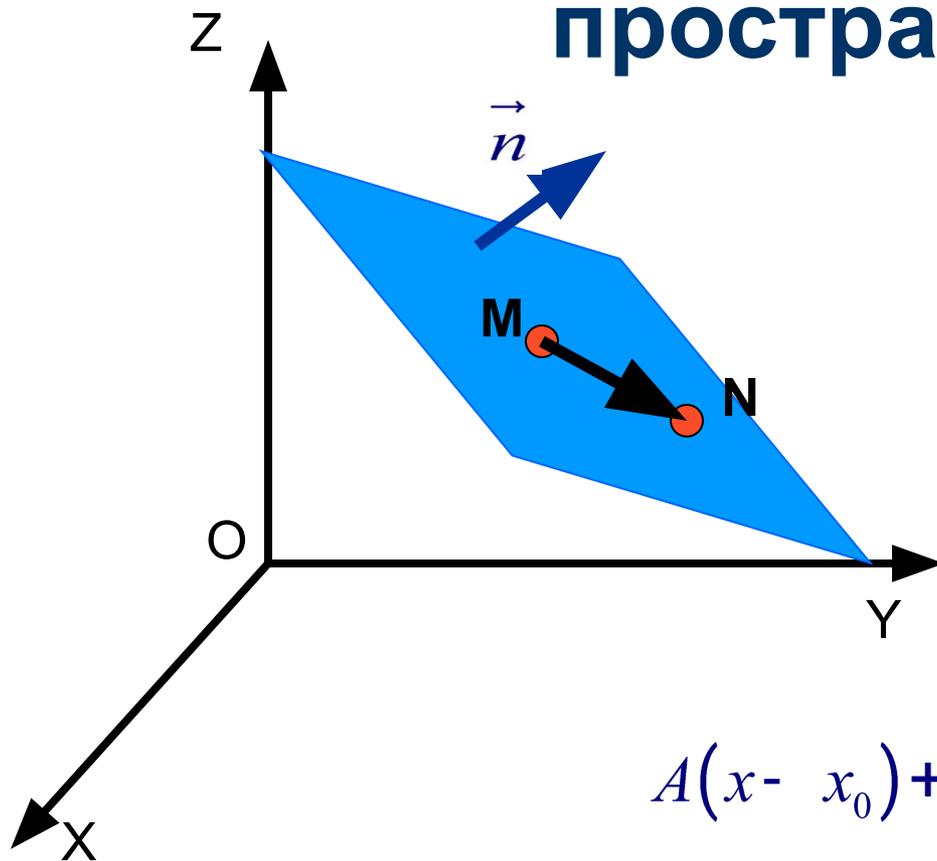
$$3^0 \quad \vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0 \text{ - условие компланарности}$$

Поверхность в трехмерном пространстве



$$f(x; y; z) = 0$$

Плоскость в трехмерном пространстве



$$M(x_0; y_0; z_0), \quad N(x; y; z)$$

$$\overrightarrow{MN} = (x - x_0; y - y_0; z - z_0)$$

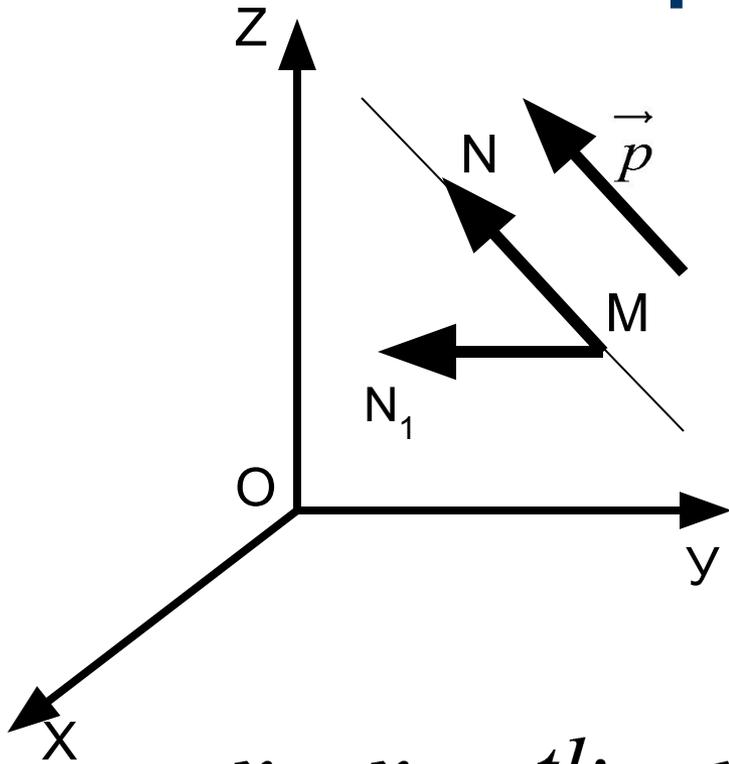
$$\vec{n} = (A; B; C)$$

$$\vec{n} \perp \overrightarrow{MN} \Rightarrow \vec{n} \cdot \overrightarrow{MN} = 0$$

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Прямая линия в трехмерном пространстве



$$M(x_0; y_0; z_0), N(x; y; z), N_1(x_1; y_1; z_1)$$

$$\vec{p}(l; m; n)$$

$$\overrightarrow{MN} = (x - x_0; y - y_0; z - z_0)$$

$$\overrightarrow{MN} = t \vec{p}$$

$$(x - x_0; y - y_0; z - z_0) = (tl; tm; tn)$$

$$x - x_0 = tl; \quad y - y_0 = tm; \quad z - z_0 = tn$$

$$x = x_0 + tl, \quad y = y_0 + tm, \quad z = z_0 + tn$$

Прямая линия в трехмерном пространстве

$$\frac{x - x_0}{l} = t, \quad \frac{y - y_0}{m} = t, \quad \frac{z - z_0}{n} = t,$$

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$

Пример 2. Даны координаты точек $A(-6; 0; 0)$, $B(-1; 1; 0)$, $C(-3; 5; 4)$. Требуется: 1) записать векторы \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{AC} в системе орт и найти модули этих векторов:

2) найти угол между векторами; \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{AC}

3) составить уравнение плоскости, проходящей через точку C перпендикулярного вектору \overrightarrow{AB} .

Решение.

1) Координаты векторов

$$\overrightarrow{AB}((x_B - x_A); (y_B - y_A); (z_B - z_A))$$

$$\overrightarrow{AC}((x_C - x_A); (y_C - y_A); (z_C - z_A))$$

Следовательно,

$$\overrightarrow{AB}(5; 1; 0) \text{ и } \overrightarrow{AC}(3; 5; 4)$$

Запишу векторы

$$\overrightarrow{AB} \text{ и } \overrightarrow{AC}$$

в системе орт:

$$\overrightarrow{AB} = 5i + j; \quad \overrightarrow{AC} = 3i + 5j + 4k$$

Найду модули этих векторов по формулам

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

$$|\overline{AC}| = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2 + (z_C - z_A)^2}$$

Получаем

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(5)^2 + (1)^2 + (0)^2} = \sqrt{26}$$

$$|\overline{AC}| = \sqrt{(3)^2 + (5)^2 + (4)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

2) Найдем угол между векторам

\overline{AB} и \overline{AC}

$$\cos \alpha = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{|\overline{AB}| \cdot |\overline{AC}|}$$

Найдем скалярное произведение векторов

$$\vec{AB} \text{ и } \vec{AC}$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 5 \cdot 3 + 1 \cdot 5 + 4 \cdot 0 = 20$$

Тогда $\cos \alpha$ равен

$$\cos \alpha = \frac{20}{\sqrt{26} \cdot 5\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{52}}{52} = \frac{\sqrt{52}}{13}$$

3) Составим уравнение плоскости, проходящей через точку C (-3;5;4) перпендикулярного вектору \vec{AB} :

По формуле $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$

Получаем $5(x + 3) + 1(y - 5) + 0(z - 4) = 0$

$$5x + 15 + y - 5 = 0, \quad 5x + y + 10 = 0$$

Контрольные вопросы

- 1) Метод координат. Расстояние между двумя точками.
- 2) Деление отрезка в данном отношении.
- 3) Уравнение прямой линии не плоскости. Угол между прямыми линиями.
- 4) Кривая второго порядка. Эллипс. Гипербола. Парабола.
- 5) Полярная система координат.
- 6) Векторное n -мерное пространство.
- 7) Вектор. Действия над векторами. Свойства. Длина вектора.
- 8) Скалярное произведение. Свойства.
- 9) Угол между векторами.
- 10) Векторное произведение. Свойства.
- 11) Смешанное произведение. Свойства.
- 12) Линейная зависимость и линейная независимость векторов.
- 13) Плоскость в трехмерном пространстве.
- 14) Прямая линия в трехмерном пространстве.