ВЫПУКЛЫЙ АНАЛИЗ

ЛЕКЦИЯ 10

2. ВЫПУКЛЫЕ МНОЖЕСТВА (ПРОДОЛЖЕНИЕ)

2. ВЫПУКЛЫЕ МНОЖЕСТВА (ПРОДОЛЖЕНИЕ)

2.11. Сопряженные конусы.

2.11. Сопряженные конусы. Пусть $U \subset R^n$.

Определение 16. Множество $U^* = \left\{ u^* \in R^n \,\middle|\, \left\langle u, u^* \right\rangle \geq 0, \ \forall u \in U \right\}$ называется сопряженным к множеству U.

Пример 14. Построить сопряженные множества к конусам

1) $K_1 = \left\{ u \in R^n \,\middle|\, \left\langle a, u \right\rangle = 0 \right\}$; **2)** $K_2 = \left\{ u \in R^n \,\middle|\, \left\langle a, u \right\rangle \leq 0 \right\}$;

3) $K_4 = \left\{ u \in R^n \,\middle|\, u \geq 0 \right\}$.

Решение.

1) $K_1 = \left\{ u \in R^n \,\middle|\, \left\langle a, u \right\rangle = 0 \right\} \Rightarrow K_1^* = \left\{ u^* \in R^n \,\middle|\, u^* = \lambda a, \ \lambda \in R^1 \right\}$

Действительно,

$$\left\langle u^*, u \right\rangle = \left\langle \lambda a, u \right\rangle = \lambda \overset{u \in K_1 \Rightarrow \langle a,u \rangle = 0}{\left\langle a, u \right\rangle} = 0$$

2) $K_2 = \left\{ u \in R^n \,\middle|\, \left\langle a, u \right\rangle \leq 0 \right\} \Rightarrow K_2^* = \left\{ u^* \in R^n \,\middle|\, u^* = -\lambda a, \ \lambda \geq 0 \right\}$.

Действительно,

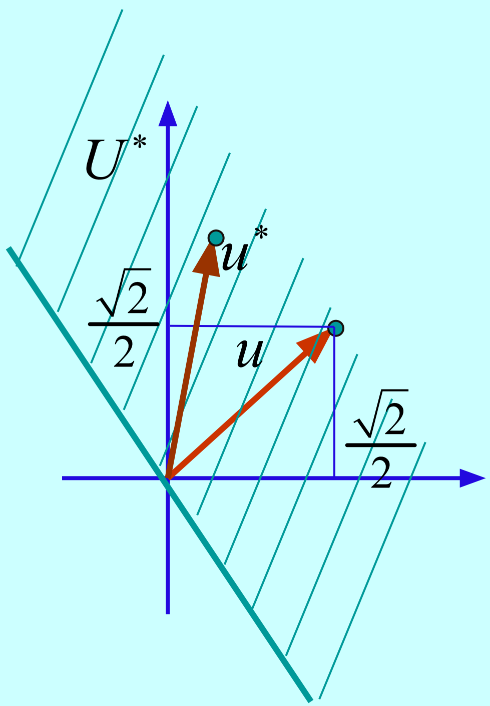
$$\left\langle u^*, u \right\rangle = \left\langle -\lambda a, u \right\rangle = -\lambda \overset{u \in K_3 \Rightarrow \langle a,u \rangle \leq 0}{\left\langle a, u \right\rangle} \geq 0$$

4) $K_4 = \{u \in R^n \mid u \geq 0\} \Rightarrow K_4^* = \{u^* \in R^n \mid u^* \geq 0\}$.

Действительно, $$\left\langle \overset{\geq 0}{u^*}, \overset{\substack{u \in K_4 \Rightarrow \\ u \geq 0}}{u} \right\rangle \geq 0.$$

Упражнение 1.

Построить сопряженное множество к множеству $U = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \right\}$.



Решение.

$$U^* = \left\{ \begin{pmatrix} u^{1*} \\ u^{2*} \end{pmatrix} \,\middle|\, \frac{\sqrt{2}}{2} u^{1*} + \frac{\sqrt{2}}{2} u^{2*} \geq 0 \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} u^{1*} \\ u^{2*} \end{pmatrix} \,\middle|\, u^{1*} + u^{2*} \geq 0 \right\}.$$

Следующая теорема устанавливает, что сопряженное множество к множеству $U \subset R^n$ является выпуклым замкнутым конусом и, что этот факт не зависит от свойств множества U.

Теорема 22. ***Пусть*** $U \subset R^n$. ***Тогда множество*** U^*

$U^* = \left\{ u^* \in R^n \,\middle|\, \left\langle u, u^* \right\rangle \geq 0,\ u \in U \right\}$ ***является выпуклым замкнутым конусом.***

Доказательство. Пусть $u^* \in U^*$ и $\lambda > 0$. Тогда для всех $u \in U$ имеем

$$\left\langle \lambda u^*, u \right\rangle = \lambda \overbrace{\left\langle u^*, u \right\rangle}^{\geq 0} \geq 0 \Rightarrow \lambda u^* \in U^*.$$

Отсюда следует, что U^* - конус. Аналогично, для $u^*, v^* \in U^*, \lambda \in [0,1]$ и $u \in U$ справедливо неравенство

$$\left\langle \lambda u^* + (1-\lambda) v^*, u \right\rangle = \lambda \overbrace{\left\langle u^*, u \right\rangle}^{\geq 0} + (1-\lambda) \overbrace{\left\langle v^*, u \right\rangle}^{\geq 0} \geq 0 \Rightarrow$$

$$\lambda u^* + (1-\lambda) v^* \in U^*.$$

и U^* выпуклое множество. Для доказательства его замкнутости достаточно установить, что любая предельная точка u_0^* множества U^* принадлежит самому множеству. Пусть $\left\{ u_k^* \right\} \to u_0^*, u_k^* \in U^*, \quad k = 1, 2, \ldots$

Тогда для всех $u \in U$ и $k = 1,2,\ldots$ справедливо неравенство $\left\langle u, u_k^* \right\rangle \geq 0.$

Переходя в нем к пределу при $k \to \infty,$ получим

$$\lim_{k\to\infty} \left\langle u, u_k^* \right\rangle = \left\langle u, \lim_{k\to\infty} u_k^* \right\rangle = \left\langle u, u_0^* \right\rangle \geq 0,$$

что и означает $u_0^* \in U^*.$ Теорема доказана.

Замечание. Имеет место вложение $U \subset U^{**} = \left(U^*\right)^*.$ Действительно,

из определения U^* следует, что $\left\langle u, u^* \right\rangle \geq 0$ для всех $u \in U$ и $u^* \in U^*.$

Последнее означает, что $u \in U^{**}.$