

Лекция 8

Формализация циклических процессов в экономике методами теории бифуркаций

1. Причины цикличности в нелинейных системах

Цикличность эволюции в экономике могут обуславливать два вида причин:

1. *Внешние* (экзогенные) факторы изменяют значения характеристик экономической системы (засуха, наводнения, землетрясения и т.п. стихии)
2. *Внутренние* (эндогенные) факторы возникают вследствие нелинейных взаимодействий между переменными внутри системы. Они вызывают колебания экономических характеристик и находятся за пределами нашего интуитивного понимания.

- В нелинейных системах ведущая роль принадлежит внутренним причинам. **Нелинейность и неустойчивость систем и являются причиной их периодического поведения.**
- Однако, вблизи критических точек внешние причины могут ускорить, замедлить или повернуть вспять эндогенное развитие системы.
- Пониманию циклических явлений способствует их зрительное восприятие в **фазовом пространстве.**

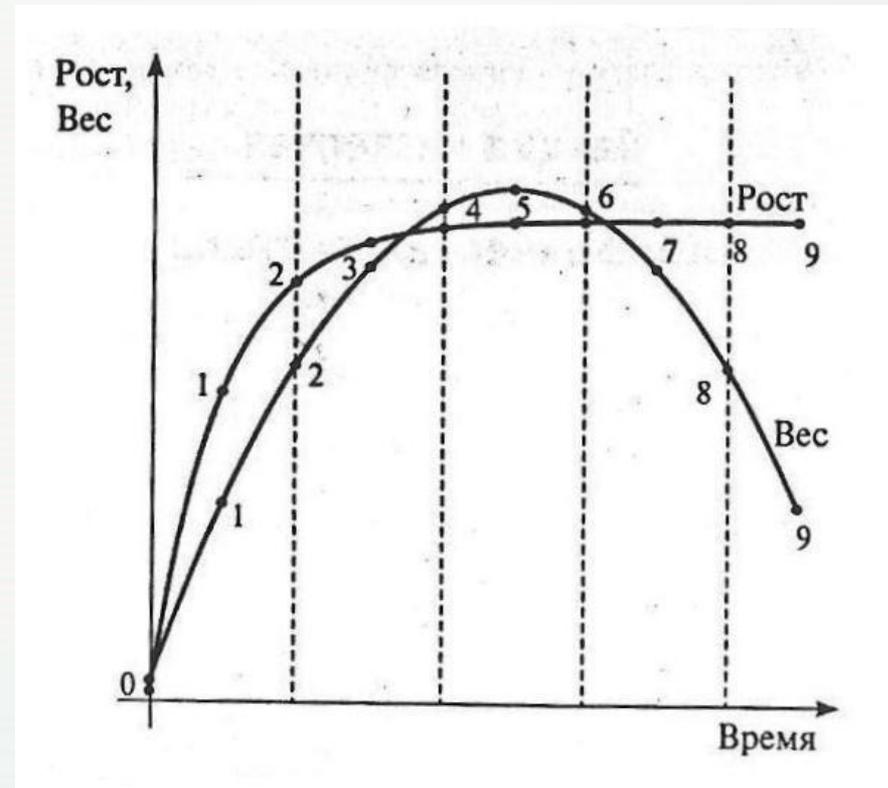
2. Представление процессов в фазовом пространстве

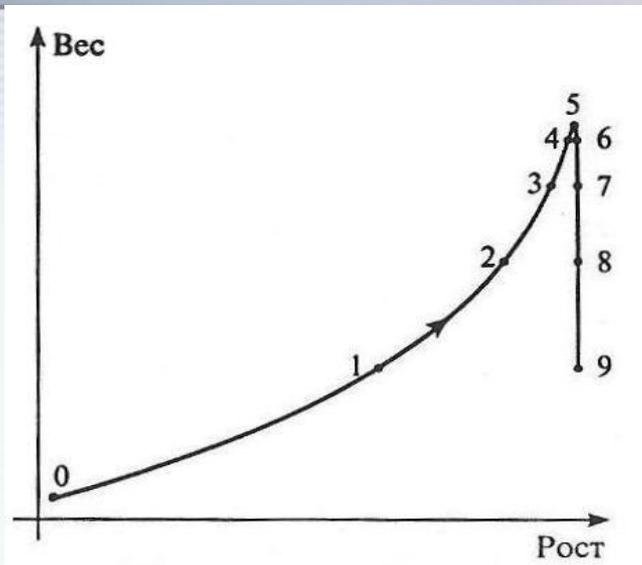
Фазовое пространство – абстрактное пространство с числом измерений, равным числу переменных, характеризующих состояние системы.



Система «домашняя кошка» характеризуется переменными «рост» и «вес»

Зависимость роста и веса кошки от времени





Фазовая плоскость с фазовой траекторией для динамической системы «домашняя кошка»

Размерность фазового пространства зависит от количества переменных системы.

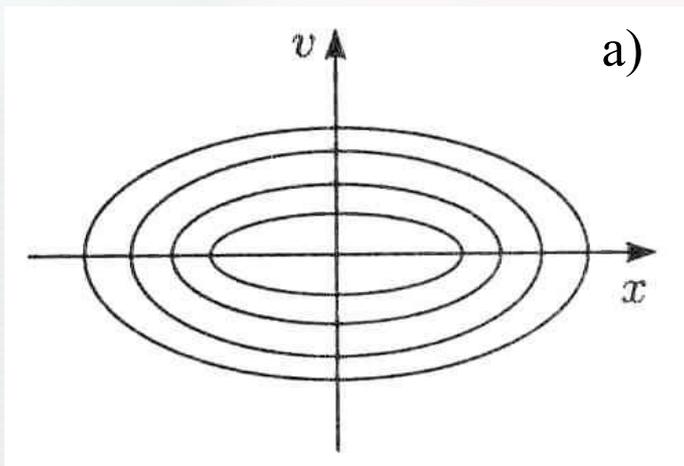
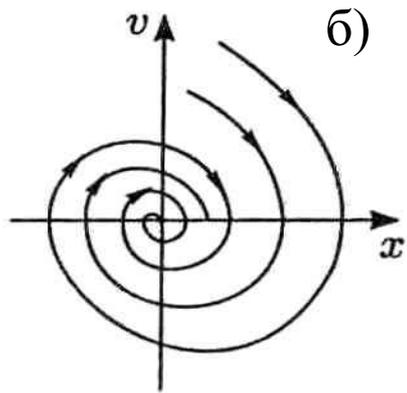
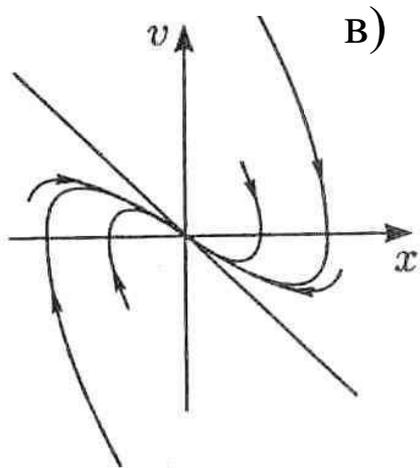


Рис. 1 Фазовые портреты маятника:

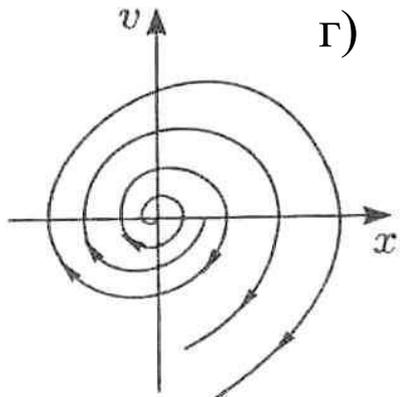
а) Колебания без трения, траектории не являются аттракторами;



б) При малой диссипации система имеет аттрактор – *устойчивый фокус*, к нему притягиваются все фазовые траектории;



в) При сильной диссипации аттрактор – *узел*. Притяжение состояний не колебательным образом;



г) при отрицательной диссипации (такая ситуация возможна в экономическом маятнике) система имеет *репеллер – неустойчивый фокус*. Все спиральные траектории уходят из него.

В нелинейных автоколебательных системах (часы с маятником – ходики, экономика государства и т.п.). Обнаружено **три типа аттракторов**: *предельный цикл, тор, хаотический или странный аттрактор*.

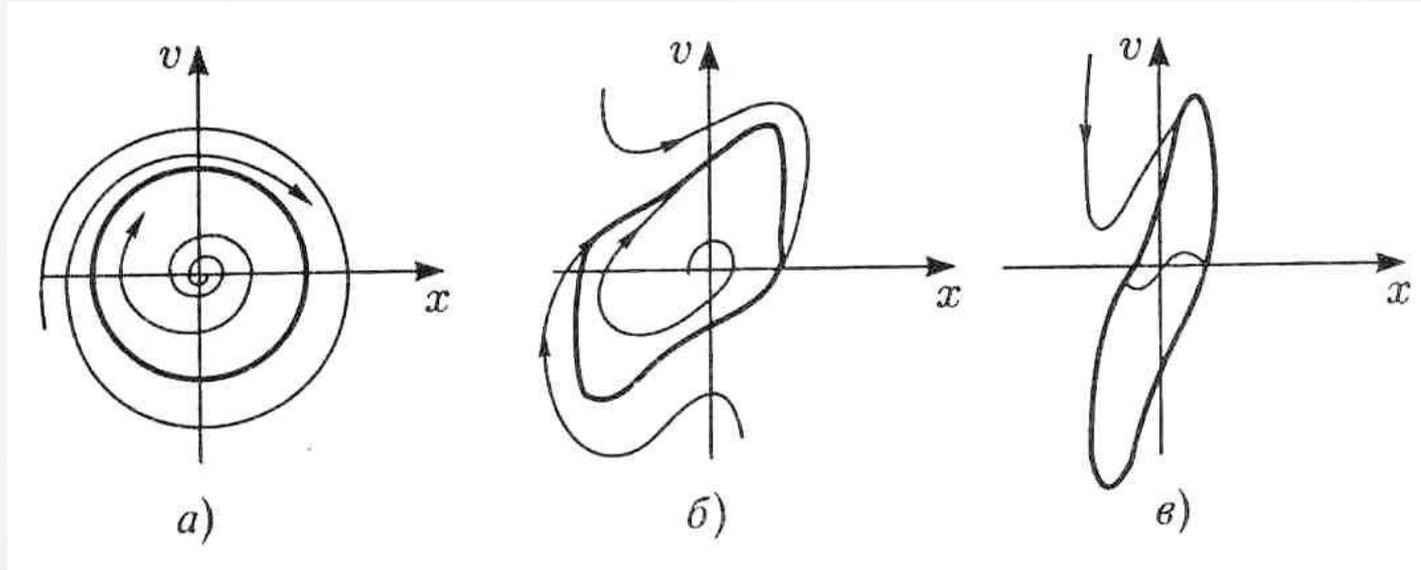


Рис. 2. Формы *предельного цикла*: квазигармонические $\varepsilon = 0,1$ (а); сильно несинусоидальные $\varepsilon = 1$ (б); релаксационные $\varepsilon = 10$ (в). Предельный цикл является аттрактором. Он притягивает к себе траектории из соседних участков **двухмерного** фазового пространства.

$$\ddot{x} - \varepsilon \cdot (1 - x^2) \cdot \dot{x} + x = 0 \quad - \text{уравнение Ван-дер-Поля.}$$

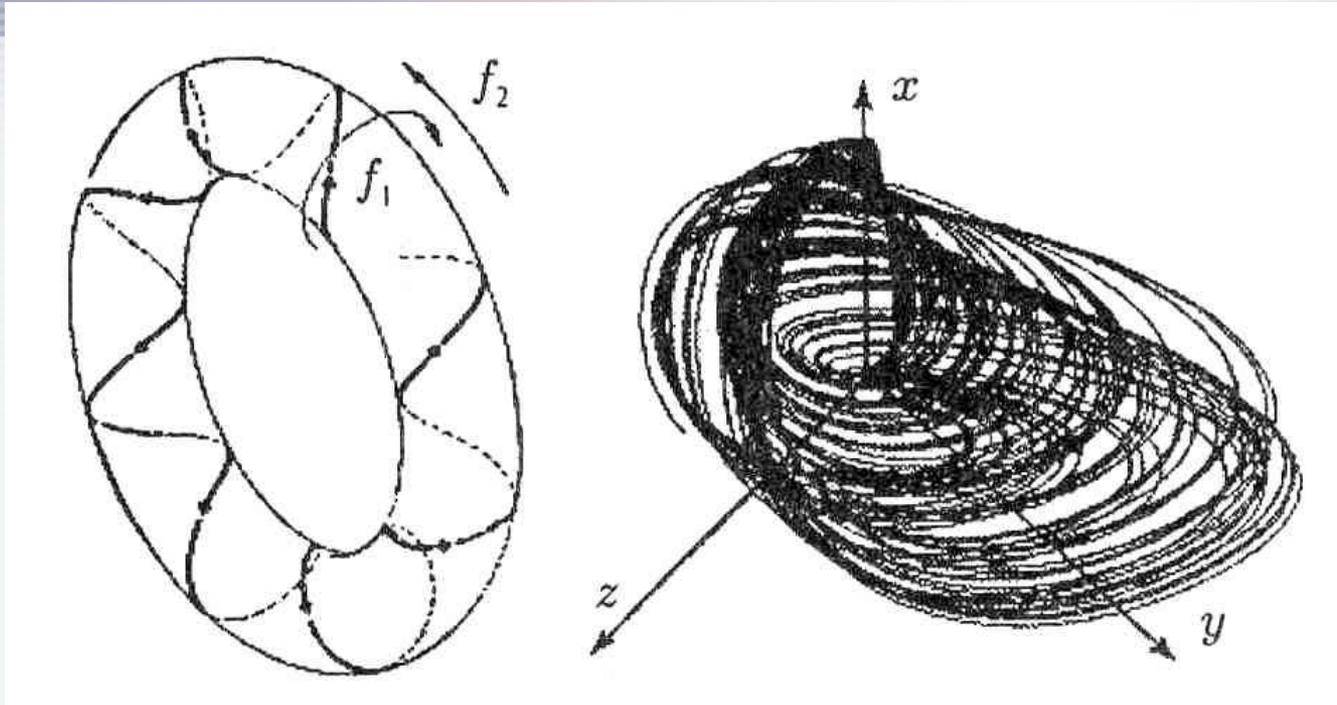


Рис 3. Фазовые портреты нелинейных систем с размерностью фазового пространства **равной трем**:

- а) *тор* – аттрактор квазипериодических колебаний. Траектории нигде не замыкаются, плотно наматываются на поверхность тора; f_1 и f_2 – частоты вращения по малому и большому кругам тора;
- б) *хаотический или странный аттрактор* – область фазового пространства, к которой притягиваются все траектории, исходящие из других точек фазового пространства.

3. Бифуркация Хопфа

Бифуркация Хопфа – это динамическое явление, приводящее к периодическому поведению системы при изменении бифуркационного параметра.

Динамика системы представлена уравнениями:

$$\frac{dr}{dt} = 0, \quad (1)$$

где r – действие, радиальная составляющая;
 ϕ – угол, азимутальная составляющая;
 ω – циклическая частота.

$$\frac{d\phi}{dt} = \omega, \quad (2)$$

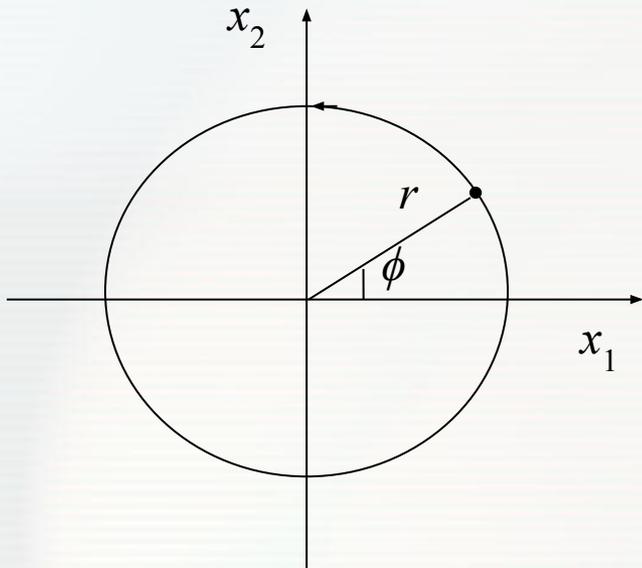


Рис. 4. Фазовая траектория системы в отсутствии возмущения. Координаты фазового пространства $x_1 = r \cdot \cos\phi$; $x_2 = r \cdot \sin\phi$

Введение в систему возмущения λ и наложение его на радиальную часть при $\omega = \text{Const}$ дает **уравнение эволюции системы**:

$$\frac{dr}{dt} = \lambda r - r^3 \quad (3) \quad \text{где } \lambda - \text{бифуркационный (управляющий) параметр.}$$

r – радиус, всегда положительный.

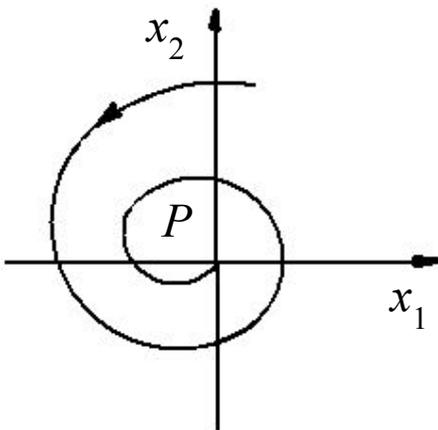
Анализ уравнения эволюции (3):

1. $\lambda < 0$. Рассеивание энергии превышает ее поступление в систему, тогда условие стационарности:

$$\frac{dr}{dt} = 0 \quad \text{при} \quad r = 0$$

Состояние устойчиво только в точке $x_1 = x_2 = 0$

Рис. 5. Фазовый портрет системы при $\lambda < 0$.
 $P(0,0)$ – аттрактор



2. $\lambda > 0$. Поступление энергии в систему превышает ее рассеивание.

Тогда условие стационарности: $\frac{dr}{dt} = 0$ при $r = \sqrt{\lambda}$ состояние устойчиво.

Это означает, что состояние системы в неподвижной точке P – неустойчиво, система покидает его и стремится к состоянию движения по траектории, радиус которой растет с увеличением λ .

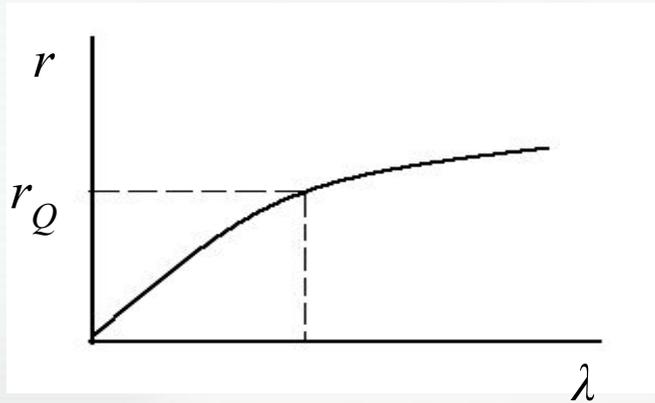


Рис. 6. Радиус предельного цикла $r = r(\lambda)$

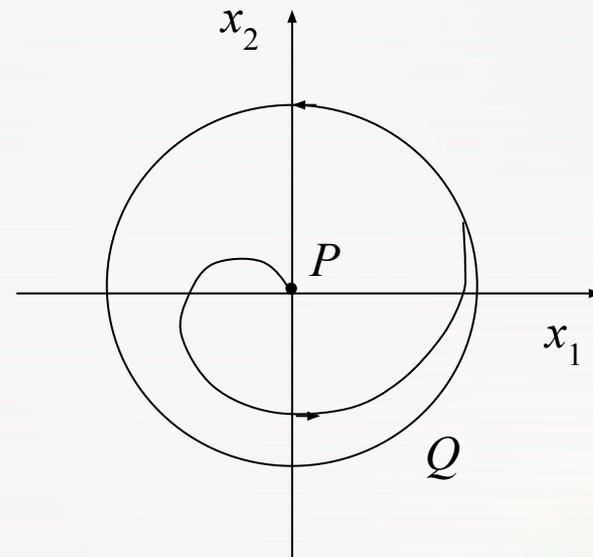


Рис. 7. Фазовая траектория эволюции системы к аттрактору Q при $\lambda > 0$; Q – предельный цикл при $\lambda = \text{Const}$.

Бифуркация Хопфа:

- приводит систему к периодическому (колебательному) поведению, в результате которого система достигает предельного цикла;
- является структурно – устойчивым явлением: период, амплитуда колебаний зависят лишь от собственных характеристик системы λ и ω .
- объясняет приобретение нового качества в движении системы при малом изменении ее параметров.
- иллюстрирует вид нестандартного поведения системы, хорошо понятый в теории бифуркаций и в экономической теории.
- точка бифуркации ($\lambda = 0$) разделяет линейные ($\lambda < 0$) и нелинейные ($\lambda > 0$) явления.

4. Теорема Хопфа о бифуркациях

В экономической системе:

$$\frac{dx_1}{dt} = \lambda x_1 - x_2 - (x_1^2 + x_2^2) \cdot x_1 \quad (4)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \lambda x_2 + x_1 - (x_1^2 + x_2^2) \cdot x_2 \quad (5)$$

При $\lambda > 0$ можно наблюдать бифуркацию Хопфа.

Теорема: при положительном значении управляющего параметра $\lambda = \text{Const}$ у системы есть периодическое решение. Оно устойчиво в том смысле, что все орбиты, находящиеся в его окрестности, к нему стремятся.

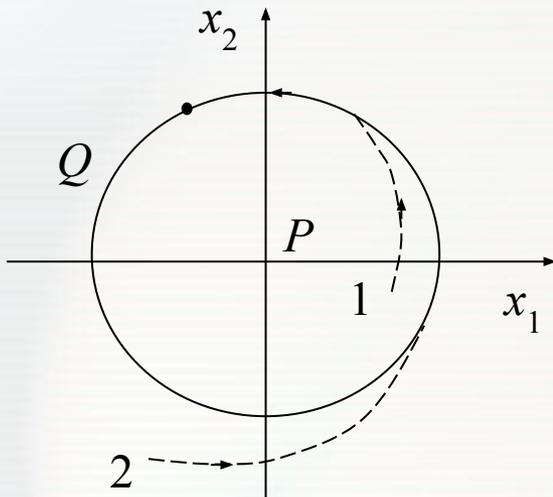


Рис. 8. Система (точка) имеет устойчивую орбиталь Q при $\lambda = \text{Const} > 0$. Все траектории стягиваются к аттрактору Q .

В уравнениях (4) и (5) при малых значениях переменных x_1 и x_2 доминируют линейные члены и они выталкивают траекторию 1 к Q .

При больших значениях x_1 и x_2 доминируют кубические члены и они притягивают траекторию 2 к Q .

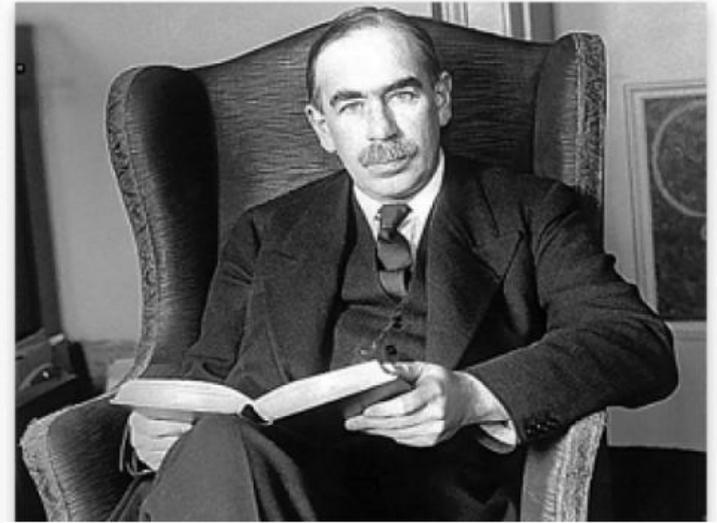
В результате конкуренции этих силовых факторов образуется периодическое решение Q .

Итак теорема:

- формулирует достаточные условия возникновения периодической орбиты.
- объясняет механизм движения системы к периодическому состоянию.
- служит основой для построения моделей нелинейных процессов в экономике (приложения).

5. Упрощенная модель делового цикла Д.М. Кейнса

Джон Мейнард Кейнс - английский экономист, основатель кейнсианского направления в экономической теории. Возникшее под влиянием идей Д.М. Кейнса экономическое течение впоследствии получило название кейнсианство.



- Динамическая экономическая система характеризуется переменными:
 Y – национальный доход; R – процентная ставка.
- Д.М. Кейнс предложил упрощенную модель делового цикла.
В соответствии с теоремой Хопфа она описывается уравнениями:

$$\frac{dY}{dt} = \alpha \{I(Y, R) - S(Y, R)\} = \alpha F(Y, R) \quad (6)$$

$$\frac{dR}{dt} = \beta \{L(Y, R) - L_s\} \quad (7)$$

$$\frac{dY}{dt} = \alpha \{I(Y, R) - S(Y, R)\} = \alpha F(Y, R) \quad (6)$$

$$\frac{dR}{dt} = \beta \{L(Y, R) - L_s\} \quad (7)$$

Все параметры и переменные положительны и означают:

Y – национальный доход;

R – процентная ставка;

$I(Y, R)$ – функция спроса на инвестиции ($I_Y > 0, I_R < 0$);

$S(Y, R)$ – функция сбережений ($S_Y > 0, S_R > 0$);

$L(Y, R)$ – суммарный спрос на деньги ($L_Y > 0, L_R < 0$);

L_s - предложение денег (фиксированная величина);

α, β – положительные параметры установления или коэффициенты реакции экономических агентов на отклонения системы от состояния «равновесия».

Условия, налагаемые на входящие в систему функции и их производные, означают, что

1. инвестиции находятся в прямой зависимости от объема выпуска продукции и в обратной от процентной ставки ($I_Y > 0, I_R < 0$).
2. рост национального дохода или процентной ставки будет побуждать население к большим сбережениям ($S_Y > 0, S_R > 0$).
3. рост производства продукции или уменьшение процентной ставки приведут к возрастанию спроса на деньги ($L_Y > 0, L_R < 0$).

При $\beta = \text{const}$, α – бифуркационный параметр. Рожденные в результате бифуркации Хопфа циклы приближенно описываются уравнениями.

$$Y(t) = Y_0 + A\alpha F_R \cos \omega \cdot t \quad (8)$$

$$R(t) = R_0 + B\alpha \sin \omega \cdot t - C\alpha F_Y \cos \omega \cdot t \quad (9)$$

$$B = f(\alpha, F_{Y,R}, L_{Y,R}) \quad (10)$$

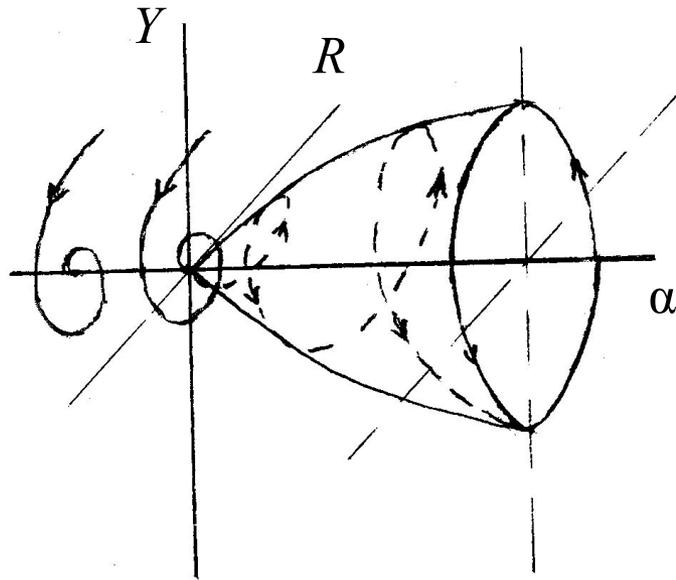


Рис. 9. Бифуркация циклов в модели Кейнса. Радиус цикла зависит от бифуркационного параметра α .

- Национальный доход Y и процентная ставка R колеблются относительно средних значений Y_0 и R_0 .
- *Периодичность изменения переменных вызвана нелинейным характером взаимодействия процентной ставки и объема производства.*

6. Модель управления запасами

Система состоит из: домохозяйств, фирм, товара (*денег, труда, продуктов производства*).

Фирма загружает производство с учетом ожидаемого сбыта, поддерживая заданные соотношения между сбываемым и имеющимся в наличии товаром.

V – объем запаса товаров;

S^E – объем ожидаемого сбыта товаров;

S – эффективный спрос потребителей, т.е. сбыт.;

Q – текущий выпуск продукции, т.е. объем производства.

На основании теоремы Хопфа динамика системы:

$$\frac{dV}{dt} = Q - S \quad (11)$$

$$\frac{dS^E}{dt} = S - S^E \quad (12)$$

Объем производства Q и сбыт S связаны:

$$S = a + c \cdot Q \quad (13)$$

где $a = \frac{bM_0}{P}$, (14) b – параметр, характеризующий сбыт товара и бюджетные ограничения, $0 < b < 1$;
 M_0 – нижний уровень потребления населения;
 P – цена товара.

$c = \frac{wb}{Pd}$, (15) w – номинальная заработная плата;
 d – коэффициент равный выпуску продукции Q на ед. объема труда L .

$$Q = d \cdot L, \quad (16)$$

При условии наличия безработицы (11) и (12) можно преобразовать в уравнения:

$$\frac{dV}{dt} = (1 - c)[S^E + f(S^E) - V] - a \quad (17)$$

$$\frac{dS^E}{dt} = (c - 1)S^E + cf(S^E) - cV + a \quad (18)$$

где c – бифуркационный параметр;

$f(S^E)$ – функция, оценивающая накопления. Фирмы производят столько продукции Q , сколько, как им кажется, они могут продать S^E плюс поправка на накопление $f(S^E) - V$ т. е.

$$Q = S^E + f(S^E) - V \quad (19)$$

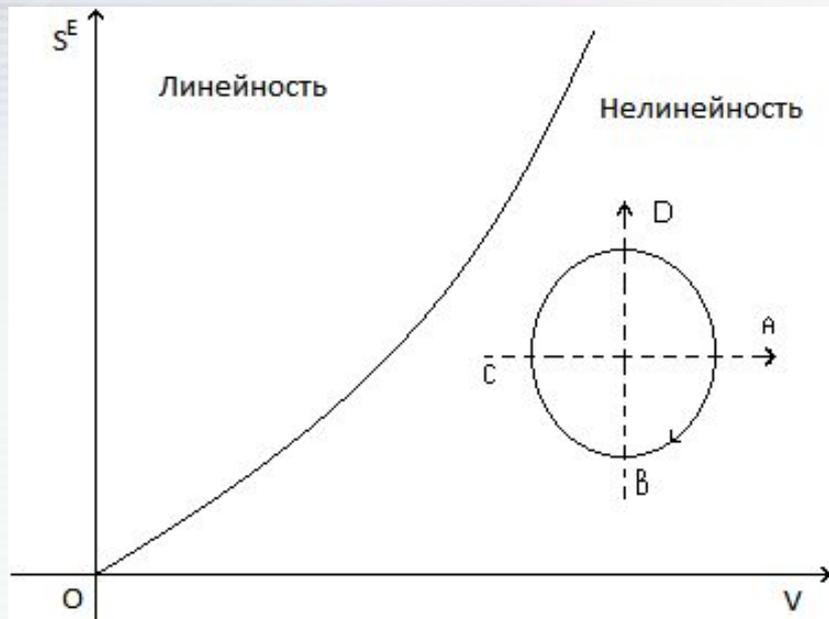


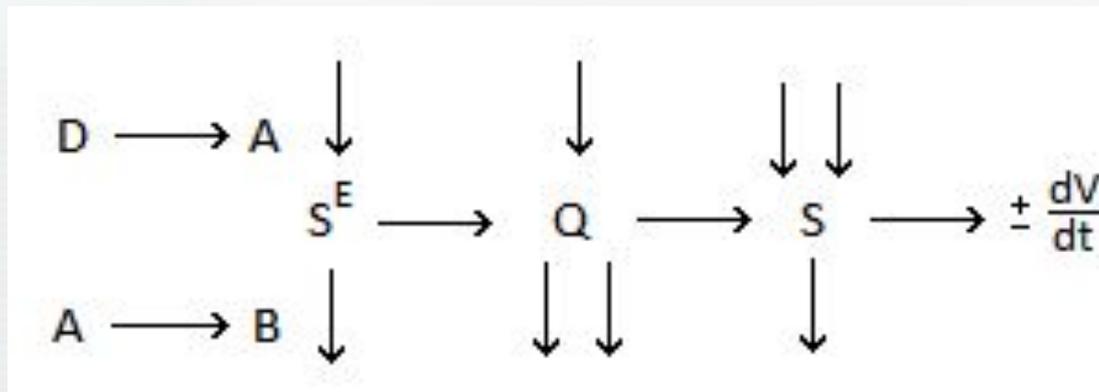
Рис 10. Циклический характер поведения системы в нелинейной области значений: V и S^E , вызванный нелинейностью взаимодействия между производством и сбытом товаров.

$$\frac{dV}{dt} = Q - S \quad (11)$$

$$S = a + c \cdot Q \quad (13)$$

$$Q = S^E + f(S^E) - V \quad (19)$$

Схема процесса движения системы:



Периодичность обнаруживает также коэффициент $g(t) = \frac{V}{S}$

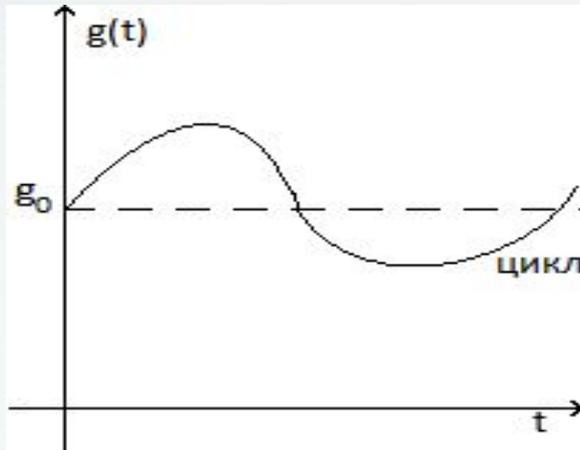
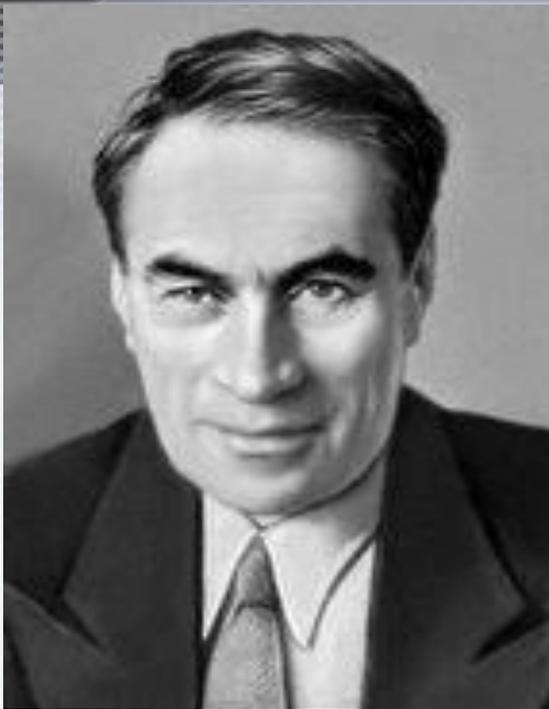


Рис. 11. Осцилляции товарного рынка.

Итак,

- объем запаса товаров V и ожидаемый сбыт S^E периодически меняются по величине и знаку, что соответствует реальной ситуации в экономике;
- *нелинейность между производством Q и сбытом товаров S приводит к периодическому движению экономической системы;*
- теорема Пуанкаре – Андронова – Хопфа как аналитический метод исследования успешно применяется в экономике при изучении сложных процессов.



А.А. Андронов



Ж.А. Пуанкаре



Хопф Эберхард



Д.М. Кейнс

7. Долгосрочные циклы в экономике

1. Долгосрочные циклы Н.Д. Кондратьева установлены на эмпирическом анализе большого числа различных экономических показателей: индекса цен, долговые государственные бумаги, номинальная заработная плата, показатели внешнего оборота, добыча угля, золота, производство чугуна и др.

Н.Д. Кондратьев считал, что колебания обусловлены отклонением от равновесного состояния, к которому стремится экономика. Сейчас мы знаем, что это не совсем так.

Циклы Н.Д. Кондратьева затрагивают экономические, технологические, экологические, психологические и социальные сферы общества.

Кондратьев
Николай
Дмитриевич



Циклы Кондратьева

	1–2	2–3	3–4	4–5
Процветание	1785–1815	1860–1873	1905–1920	1948–1970
Спад	1815–1825	1873–1886	1920–1929	1970–1990
Депрессия	1825–1840	1886–1896	1929–1937	1990–2000
Восстановление	1840–1860	1895–1905	1937–1948	2000
Длительность цикла	65 лет	56 лет	41 год	63 года
Доминирующие технологии и отрасли производства	Энергия пара, текстильная промышленность	Уголь, сталь, железные дороги	Нефть, электроэнергия, химическая и автомобильная промышленность	Компьютеры, ракеты, авиационная и электронная промышленность

2. Типы циклов.

Циклы подразделяются на:

- Политико-деловой (4 – 5 лет)
- Деловой (6 – 12 лет)
- Строительный или цикл С. Кузнеца (15 – 25 лет)
- Цикл лидерства (100 – 150 лет)

3. Циклы лидерства:

- Португалия (1494 – 1580 гг.)
- Нидерланды (1580 – 1688 гг.)
- Британия (1688 – 1792 и 1792 – 1914 гг.)
- США (1914 – 2030 гг.)

Циклы борьбы за мировое лидерство показывают подъем и упадок государства.

Итак, теория бифуркаций ее методы, ее «интернациональный» язык успешно используются в исследовании экономических циклических процессов.

Спасибо за внимание!!!

